Chapitre 1

Les pourcentages

1.1 Variation en pourcentage

1.1.1 Calcul d'une variation

Propriété 1.1
Si une quantité passe d'une valeur x_0 à une valeur x_1 sa variation en pourcentage vaut :

$$\frac{x_1 - x_0}{x_0} \times 100$$

Exemple 1.1
Au cours d'un mois, le prix du baril de pétrole est passé de 68 \$ à 72 \$. En pourcentage, son augmentation est de :

$$\frac{72 - 68}{68} \times 100 \approx 5{,}88$$

Le prix du baril a augmenté d'environ 5,88 %.

1.1.2 Expression d'une variation en pourcentage

Propriété 1.2
Augmenter un nombre de x % revient à le multiplier par $(1 + \frac{x}{100})$. De même, diminuer un nombre de x % revient à le multiplier par $(1 - \frac{x}{100})$.

En effet, soit A un nombre. L'augmentation de A de x % vaut : $A \times \frac{x}{100}$. Donc, le nombre A augmenté de x % vaut : $A + A \times \frac{x}{100} = A(1 + \frac{x}{100})$.

Exemple 1.2
Un ordinateur coûtait 1300 €. Maurice obtient une réduction de 15 %. Il va payer :

$$1300 \times \left(1 - \frac{15}{100}\right) = 1300 \times 0{,}85 = 1105 \text{ €}.$$

Exemple 1.3
Le baril de pétrole brut coûtait 62 \$. Il a augmenté de 5 %. Il coûte désormais :

$$62 \times \left(1 + \frac{5}{100}\right) = 62 \times 1{,}05 = 65{,}1 \text{ \$ le baril.}$$

Exemple 1.4
Sur mon livret d'épargne, je possède 553,50 €. Il y a un an j'avais 540 €, et je n'ai fait ni versement, ni retrait. Le coefficient d'augmentation est de $\frac{553,5}{540} = 1{,}025$. Donc le taux d'intérêts de mon livret est de $1{,}025 - 1 = 0{,}025 = 2{,}5$ % par an.

1.2 Successions d'augmentations et réductions

Propriété 1.3
augmenter un nombre de x %, puis de y % revient à le multiplier par :

$$\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{y}{100}\right)$$

(à adapter pour les diminutions ou les combinaisons d'augmentation et de divisions)

Exemple 1.5
Un article coûtait 240 €. Il subit une augmentation de 10 %, puis il est soldé à -40 %. Son prix soldé est :

$$240 \times \left(1+\frac{10}{100}\right) \times \left(1-\frac{40}{100}\right) = 240 \times 1{,}10 \times 0{,}60 = 158{,}40 \text{ €}.$$

Exemple 1.6
un article coûtait 80 €, il augmente de 10 %, puis il baisse de 10 %. son nouveau prix n'est pas 80 € mais :

$$80 \times 1{,}10 \times 0{,}90 = 79{,}20 \text{ €}.$$

1.3 Variation d'un pourcentage

1.3.1 Variation d'un pourcentage

Un pourcentage est l'expression d'un quotient de dénominateur 100. Il sert à comparer facilement des rapports de grandeurs. On l'obtient généralement par le calcul d'un rapport $\frac{x}{y}, y \neq 0$. La variation du pourcentage peut donc être liée à une variation de x, ou à une variation de y.

Exemple 1.7
Dans un ménage, le loyer est de 750 € pour des revenus de 3000 €. Le loyer représente donc $\frac{750}{3000} = 0{,}25 = 25$ % des revenus. Un an plus tard, le loyer représente 30 % des revenus. Cette variation est peut-être dûe à une augmentation du loyer : $\frac{x}{3000} = 0{,}30$ donc $x = 900$ € ; ou encore à une baisse des revenus : $\frac{750}{y} = 0{,}30$ donc $y = \frac{750}{0{,}30} = 2500$ €. On peut même imaginer un mélange des deux !

1.3.2 Notion d'indice

Pour exprimer plus facilement une évolution d'une grandeur en pourcentage à partir d'une date t_0, on fixe un *indice* (généralement 100) à cette date, puis on exprime les autres indices, en calculant des quatrièmes proportionnelles :

date	t_0	t_i
valeur	A_0	A_i
indice	100	$I_{i/0}$

Ici, l'indice $I_{i/0} = 100 \times \dfrac{A_i}{A_0}$.

Exemple 1.8
Le CAC 40 est l'indice de la bourse de Paris. On a fixé sa valeur à 1 000 le 31 décembre 1987. Depuis il évolue en fonction du cours des actions des entreprises qui le composent.

1.4 Pourcentage de pourcentage

Propriété 1.4
Prendre t_1 % de t_2 % d'un nombre A c'est effectuer le calcul suivant :

$$\frac{t_1}{100} \times \frac{t_2}{100} \times A$$

Exemple 1.9
Dans une classe de 32 élèves, 75 % des élèves étudient l'anglais en LV1, et parmi eux, 37,5 % étudient l'italien en LV2. Le nombre d'élèves de la classe étudiant l'anglais en LV1 et l'italien en LV2 est :

$$\frac{75}{100} \times \frac{37{,}5}{100} \times 32 = 0{,}75 \times 0{,}375 \times 32 = 9 \text{ élèves}$$

1.5 Addition et comparaison de pourcentages

1.5.1 Addition de pourcentages

L'addition de deux pourcentages n'a de sens que lorsque ces pourcentages représentent deux parties sans élement commun d'un même ensemble.

Exemple 1.10
Dans une classe, 85 % des élèves ont un ordinateur et parmi eux, 15 % ont une connexion internet bas-débit, et 65 % ont une connexion internet haut-débit. Si on considère comme ensemble de référence, les élèves qui ont un ordinateur, on peut dire que 65% + 15% = 80 % des élèves ayant un ordinateur ont accès à internet.

Exemple 1.11
Au dernier contrôle de maths, 20 % des élèves ont eu plus de 16/20, et 50 % ont eu plus de 12/20. La somme de ces pourcentages n'a aucun sens car l'ensemble des élèves ayant eu plus de 16 est contenu dans l'ensemble des élèves ayant eu plus de 12.

Propriété 1.5
On note A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. L'ensemble $A \cup B$ (on lit A union B) est constitué des éléments qui appartiennent à A ou à B (ou aux deux). L'ensemble $A \cap B$ (on lit A inter B) est constitué des éléments qui appartiennent à A et à B. En notant p_A la proportion de A dans E, ..., on a :

$$p_{A\cup B} = p_A + p_B - p_{A\cap B}$$

Exemple 1.12
Dans une classe de 25 élèves (population E), 10 élèves ont eu entre 10 et 14 au contrôle de maths (population A), et 12 élèves ont eu entre 12 et 16 (population B). On sait que 15 élèves ont eu entre 10 et 16. Calculer le nombre d'élèves ayant eu entre 12 et 14.
Soit n l'effectif cherché. $A \cup B$ est l'ensemble des élèves ayant eu entre 10 et 16, et $A \cap B$ est

l'ensemble des élèves ayant eu entre 12 et 14. On a :

$$p_{A \cup B} = p_A + p_B - p_{A \cap B}$$

$$\text{soit : } \frac{15}{25} = \frac{10}{25} + \frac{12}{25} - \frac{n}{25}$$

$$\text{d'où : } n = 10 + 12 - 15 = 7$$

1.5.2 Comparaison de pourcentages

Propriété 1.6
Lorsque deux pourcentages portent sur des ensembles distincts, l'ordre des pourcentages, n'est pas obligatoirement le même que celui des données absolues.

Exemple 1.13
Le loyer d'une famille A aux revenus mensuels de 3000 € est de 750 €. Le loyer d'une famille B aux revenus mensuels de 2100 € est de 630 €.

Famille	Loyer en €	loyer en % des revenus
A	750	$\frac{750}{3000} = 25$ %
B	630	$\frac{630}{2100} = 30$ %

En données absolues, c'est la famille A qui paye un loyer plus important, mais en pourcentage des revenus, c'est la famille B qui paye le plus.