Cours de mathématiques

Thomas Rey

classe de première ES - spécialité

Table des matières

Chapitre 1

Les fonctions affines par morceaux

1.1 Fonction affine

1.1.1 Définition et propriétés

Définition 1.1
Soit a et b deux réels. La fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = ax + b$ est appelée une *fonction affine*.

Remarque 1.1
On a deux cas particuliers :
- si $b = 0$, la fonction f est une fonction *linéaire*,
- si $a = 0$, la fonction f est une fonction *constante*.

Théorème 1.1
Variations d'une fonction affine :
- si a est positif, la fonction affine $x \longmapsto ax + b$ est croissante sur $\mathbf{R}$.
- si a est négatif, la fonction affine $x \longmapsto ax + b$ est décroissante sur $\mathbf{R}$.

Théorème 1.2
La fonction f est une fonction affine, si et seulement si l'accroissement Δy de l'image est proportionnel à l'accroissement Δx de la variable.

Si x_1 et x_2 sont deux réels distincts, avec $f(x_1)$ et $f(x_2)$ leurs images respectives, on a :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = a$$

1.1.2 Représentation graphique

Propriété 1.1
Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, la représentation graphique de la fonction affine f définie par $f : x \longmapsto ax + b$ est la droite $\mathscr{D}$ de *coefficient directeur* a et passant par le point $P(0\ ;\ b)$.
$y = ax + b$ est l'équation réduite de la droite $\mathscr{D}$.

Remarque 1.2
Si la fonction affine f est linéaire, la droite $\mathscr{D}$ passe par l'origine du repère.
Si la fonction affine f est constante, la droite $\mathscr{D}$ est parallèle à l'axe des abscisses.

1.2 Fonction affine par morceaux

1.2.1 Préliminaires : les valeurs absolues

Définition 1.2
Soit x un nombre réel. On appelle *valeur absolue* de x, et on note $|x|$ le nombre :

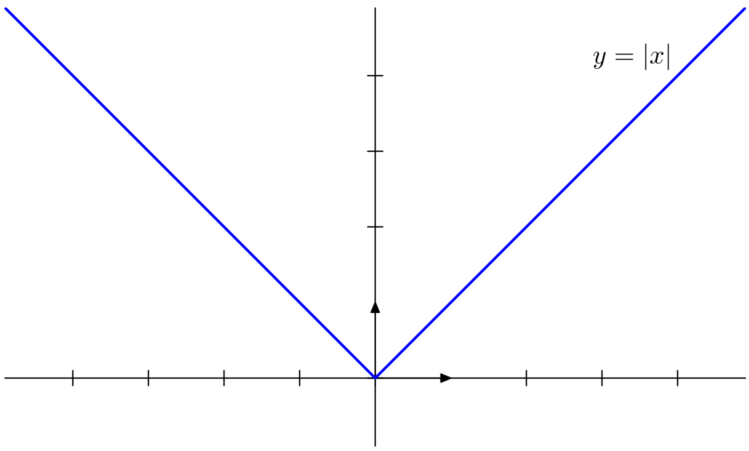
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Remarque 1.3
Pour tout réel x, on a $|x| \geq 0$.

Propriété 1.2
Pour tout x réel, on a : $|x| = |-x|$.

Démonstration :
Si $x \geq 0$, alors $-x \leq 0$ et on a donc : $|x| = x$ et $|-x| = -(-x) = x$, ainsi $|x| = |-x|$.
Si $x \leq 0$, alors $-x \geq 0$ et on a donc : $|x| = -x$ et $|-x| = -x$, ainsi $|x| = |-x|$.

Représentation graphique de la fonction valeur absolue :



Exemple 1.1

$$|2-3| + 5|7 - 2\times 5| - |6+3| = |-1| + 5 \times |-3| - |9| = 1 + 15 - 9 = 7$$

Exemple 1.2

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } 2x-3 \geq 0 \\ -(2x-3) & \text{si } 2x-3 \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } |2x-3| = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \\ -2x+3 & \text{si } x \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

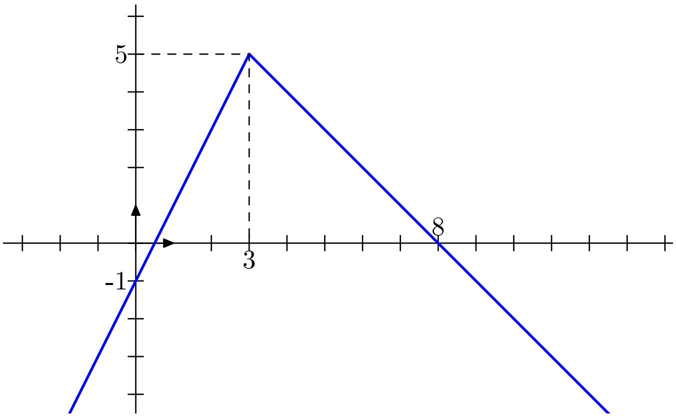
1.2.2 Fonction affine par morceaux

Définition 1.3
Une fonction est dite *affine par morceaux* si elle est définie sur plusieurs intervalles disjoints[1] par des fonctions affines.

Exemple 1.3
La fonction f définie ci-dessous est une fonction affine par morceaux :

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{pour } x \in]-\infty;3] \\ -x+8 & \text{pour } x \in]3;+\infty] \end{cases}$$

Ici, on aurait pu choisir comme intervalles $]-\infty;3]$ et $[3;+\infty]$ (avec 3 comme valeur commune) car si $x=3$, $2x-1=5$ et $-x+8=5$. Donc la valeur 3 a une même image par les deux fonctions affines.



Remarque 1.4
La représentation graphique d'une fonction affine par morceaux est constituée de la réunion de plusieurs segments ou demi-droites.

Exemple 1.4
On obtient souvent une fonction affine par morceaux lorsque l'expression contient des valeurs absolues. La fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x)=|2x-1|$ est une fonction affine par morceaux. En effet, pour $x \in]-\infty;\frac{1}{2}]$, $f(x)=1-2x$ et pour $x \in [\frac{1}{2};+\infty[$, $f(x)=2x-1$.

1.2.3 Interpolation linéaire

Lorsqu'on ne connaît que quelques points d'une courbe $\mathscr{C}_f$ représentant une fonction f, on peut relier ces points par des segments ; on obtient alors une courbe $\mathscr{C}_i$ appelée *courbe d'interpolation linéaire* de la courbe $\mathscr{C}_f$ associée aux points connus.
La courbe $\mathscr{C}_i$ est la représentation graphique d'une fonction affine par morceaux.

Exemple 1.5
Un automobiliste quitte son domicile à 0 h. On donne dans le tableau suivant la distance parcourue à certaines heures :

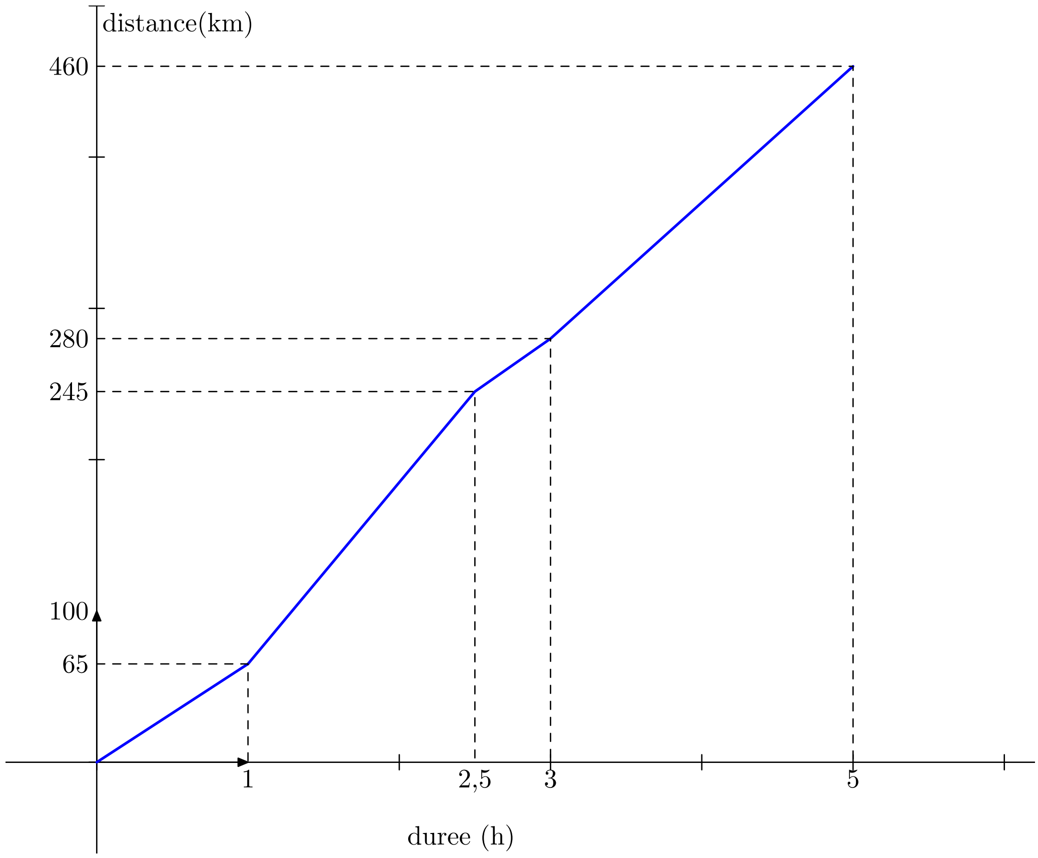
[1] ou presque.... Les intervalles peuvent avoir des valeurs communes, à condition que l'image de ces valeurs par les fonctions affines soit unique. (Voir Exemple 1.3)

heure	1h	2h30	3h	5h
distance parcourue (km)	65	245	280	460

On note t la durée du trajet, et $f(t)$ la distance parcourue après t heures de trajet.

1. Peut-on donner une expression de la fonction f en fonction de t ? Justifier.
2. Tracer la courbe d'interpolation linéaire correspondant aux valeurs connues.
3. Déterminer la fonction affine par morceaux g qui lui est associée.

Solution :

1. On ne peut pas donner d'expression de f en fonction de t car la distance parcourue dépend de la vitesse à chaque instant, donnée qui nous est inconnue.
2. 

3. – On a $f(0)=0$ et $f(1)=65$ donc on en déduit que sur l'intervalle $[0;1]$, $f(t)=65t$.
   – On a $f(1)=65$ et $f(2,5)=245$, on résout le système $\begin{cases} a\times 1+b=65 \\ a\times 2,5+b=245 \end{cases}$ soit pour $t\in[1;2,5]$, $f(t)=120t-55$.
   – On a $f(2,5)=245$ et $f(3)=280$. On résout le système $\begin{cases} a\times 2,5+b=245 \\ a\times 3+b=280 \end{cases}$ soit pour $t\in[1;2,5]$, $f(t)=70t+70$.
   – On a $f(3)=280$ et $f(5)=460$. On résout le système $\begin{cases} a\times 3+b=280 \\ a\times 5+b=460 \end{cases}$ soit pour $t\in[1;2,5]$, $f(t)=90t+10$.

Finalement, on obtient :

$$f(t)=\begin{cases} 65t & \text{si } t\in[0;1] \\ 120t-55 & \text{si } t\in[1;2,5] \\ 70t+70 & \text{si } t\in[2,5;3] \\ 90t+10 & \text{si } t\in[3;5] \end{cases}$$

Chapitre 2

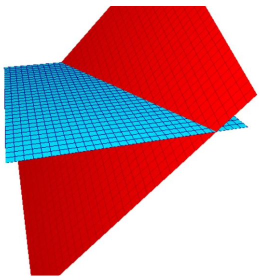
Calcul vectoriel dans l'espace

2.1 Préliminaires : positions relatives

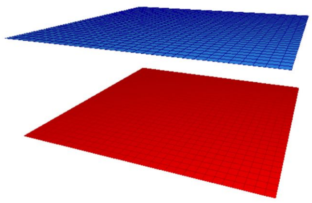
Par deux points distincts de l'espace il ne passe qu'une seule droite.
Trois points non alignés de l'espace définissent un unique plan.
On dit que deux droites sont coplanaires si elles sont dans un même plan. On peut le dire aussi de quatre points (ou plus…).

2.1.1 Deux plans

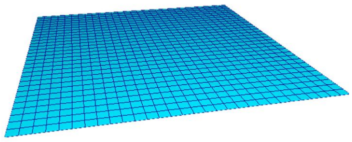
Deux plans de l'espace peuvent être sécants, strictement parallèles ou confondus.



Plans sécants



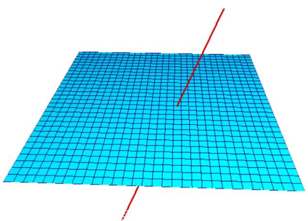
Plans parallèles



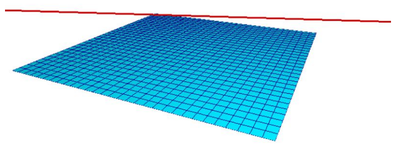
Plans confondus

2.1.2 Un plan et une droite

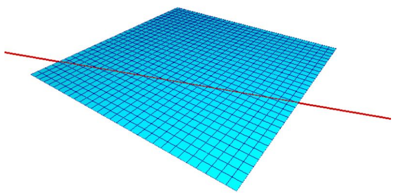
Une droite peut être sécante à un plan, elle peut être strictement parallèle au plan ou encore être contenue dans le plan :



Droite sécante au plan



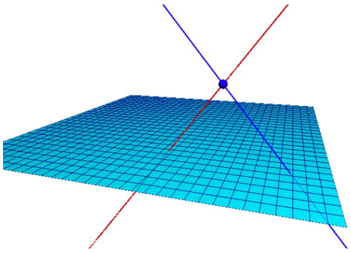
Droite parallèle au plan



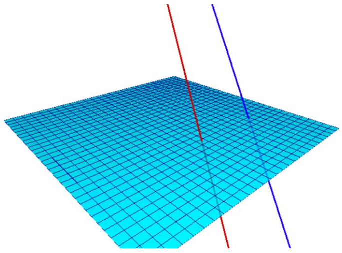
Droite contenue dans le plan

2.1.3 Deux droites

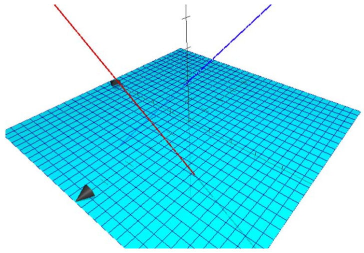
Deux droites peuvent être coplanaires, dans ce cas elles sont parallèles ou sécantes, ou alors non-coplanaires,dans ce cas elles n'ont pas de point commun mais ne sont pas non plus parallèles.



Droites sécantes



Droites parallèles



Droites non coplanaires

2.2 Calcul vectoriel

2.2.1 Vecteurs de l'espace

Définition 2.1
Soit A et B deux points de l'espace. On peut définir le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par :
– sa *direction* : celle de la droite (AB).
– son *sens* : de A vers B.
– sa *longueur* : la distance AB.

Remarque 2.1

– La longueur d'un vecteur est aussi appelée sa *norme*. On la note $||\overrightarrow{AB}||$.
– Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est appelé *vecteur nul*. On le note $\vec{0}$.
– Un vecteur peut être désigné par une seule lettre : on peut poser par exemple $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

2.2.2 Vecteurs égaux

On dit que deux vecteurs sont égaux, lorsqu'ils ont la même direction, le même sens, et la même norme.

Propriété 2.1
Soit A, B, C, et D quatre points non alignés. Dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux équivaut à dire que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.

2.2.3 Vecteurs et opérations

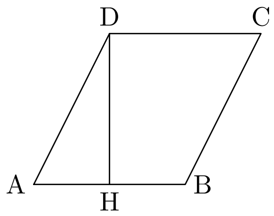
Addition vectorielle

Les règles de l'addition des vecteurs de l'espace sont les mêmes que dans le plan :
– Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
– Règle du parallélogramme : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$, où D est le point de l'espace tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

Exemple 2.1
Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un parallélogramme. On a les égalités vectorielles suivantes (il en existe bien d'autres...) :

$$\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{AD}; \qquad \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$$

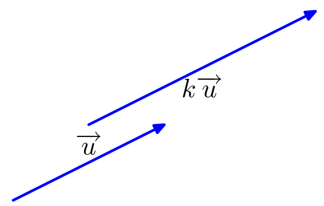
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}; \qquad \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}$$



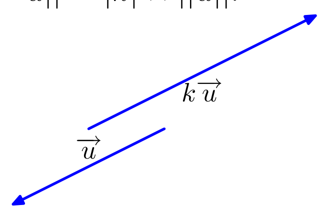
Multiplication par un réel

Définition 2.2
Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace, et k un nombre réel.

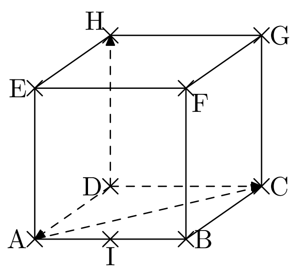
– Si $k>0$ et $\vec{u}\neq\vec{0}$, alors le vecteur $k\cdot\vec{u}$ a la même direction et le même sens que $\vec{u}$, et il a pour norme : $||k\cdot\vec{u}||=k\times||\vec{u}||$.



– Si $k<0$ et $\vec{u}\neq\vec{0}$, alors le vecteur $k\cdot\vec{u}$ a la même direction que $\vec{u}$, il est de *sens contraire* à celui de $\vec{u}$, et il a pour norme : $||k\cdot\vec{u}||=|k|\times||\vec{u}||$.



Exemple 2.2
Sur la figure ci-dessous, $ABCDEFGH$ est un cube ; I est le milieu de $[AB]$.



– Pour retrouver un vecteur égal à $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FG}$, on peut remplacer $\overrightarrow{FG}$ par le vecteur $\overrightarrow{BC}$ car $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FG}$. D'où :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC} \quad \text{d'après } \textsc{Chasles}$$

– De même, $\frac{1}{2}\overrightarrow{FE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$, car $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{BA}$. Donc : $\frac{1}{2}\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BI}$.

Application : Compléter à l'aide d'un seul vecteur.

$$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EH}=\dots\dots; \qquad \overrightarrow{BF}+\overrightarrow{BC}=\dots\dots; \qquad \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FH}=\dots\dots; \qquad \frac{1}{2}\overrightarrow{HG}=\dots\dots;$$

$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\dots\dots; \qquad \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GF}=\dots\dots; \qquad \overrightarrow{AG}+\overrightarrow{HB}=\dots\dots;$$

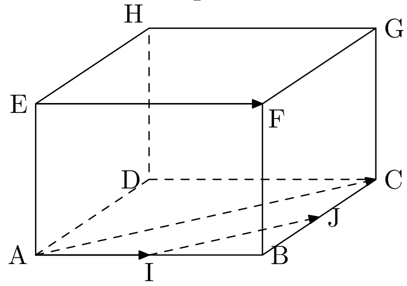
2.3 Vecteurs colinéaires. Vecteurs coplanaires

2.3.1 Vecteurs colinéaires

Définition 2.3
On dit que deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *colinéaires* s'il existe un réel non nul k tel que $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$.

Par *convention*, le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire avec tous les vecteurs de l'espace.

Exemple 2.3
Sur la figure ci-contre, $ABCDEFGH$ est un pavé droit avec I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[BC]$.
Les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires car $\overrightarrow{EG} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{EG}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires car $\overrightarrow{EF} = 2 \cdot \overrightarrow{AI}$.



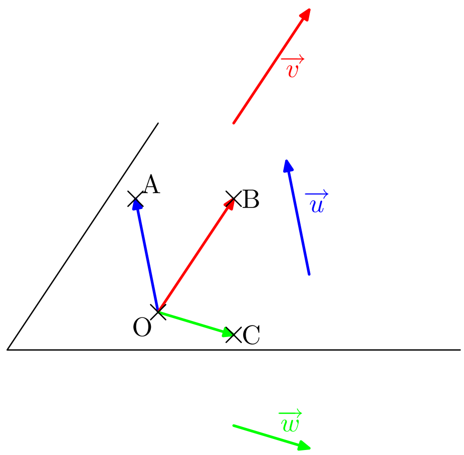
Remarque 2.2
Deux vecteurs égaux sont colinéaires.

Propriété 2.2
Dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Propriété 2.3
Dire que les points A, B, et C sont alignés équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires. (Ou encore que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, ou encore que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.)

2.3.2 Vecteurs coplanaires

Définition 2.4
Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$ sont dits *coplanaires* s'il existe des représentants respectifs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, et $\overrightarrow{OC}$ de même origine O, de sorte que les points O, A, B, et C soient dans un même plan.

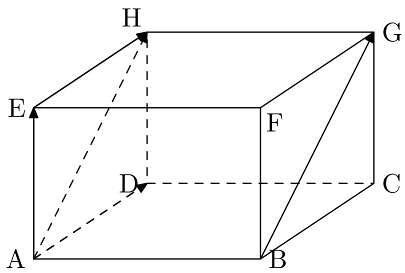


Théorème 2.1
Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne soient pas colinéaires.
Dire que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires équivaut à dire qu'il existe deux réels a et b tels que :

$$\vec{w} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$$

Remarque 2.3
Dans le cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$ sont nécessairement coplanaires.

Exemple 2.4
Sur la figure ci-contre, $ABCDEFGH$ est un pavé droit.
– Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{EH}$, et $\overrightarrow{BG}$ sont coplanaires car : $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$, et les points A, E, D, et H sont coplanaires (sur la face latérale gauche.)
  On peut écrire : $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{BG} = a \cdot \overrightarrow{AE} + b \cdot \overrightarrow{EH}$, avec $a = b = 1$.
– Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}$, et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires car les points A, E, D et B ne sont pas dans un même plan.



Propriété 2.4
Dire que quatre points A, B, C et D sont coplanaires équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

2.4 Repérage dans l'espace

2.4.1 Repère de l'espace

Définition 2.5
Si O, I, J sont trois points non alignés et K un point qui n'est pas dans le plan (OIJ), on dit que $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$ est un repère de l'espace.

Remarque 2.4
– Si les droites (OI), (OJ) et (OK) sont deux à deux perpendiculaires, on dit que le repère est orthogonal.
– Si de plus on a $OI = OJ = OK = 1$, on dit que le repère est orthonormal.
– En posant : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$, on peut aussi noter le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

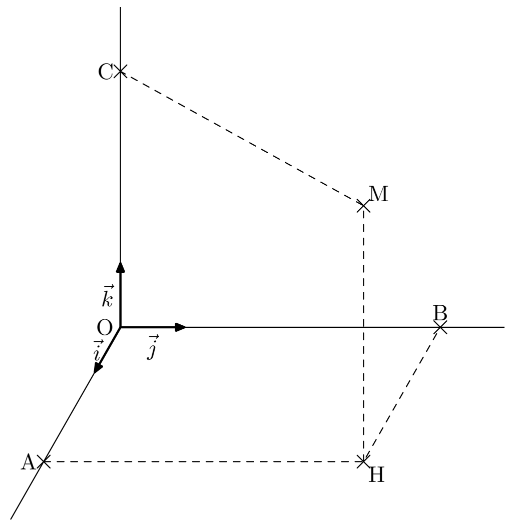
2.4.2 Coordonnées d'un point de l'espace

Théorème 2.2
Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace. Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet (x, y, z) de réels tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Démonstration (existence) :
On se place dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit H le point d'intersection du plan (OIJ) et de la parallèle à $(O; \vec{k})$ passant par M. Soit $(x; y)$ les coordonnées de H dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan (OIJ). On a : $\overrightarrow{OH} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et le couple $(x; y)$ est unique.
Par définition de H, les vecteurs $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{k}$ sont colinéaires. Donc il existe un unique réel z tel que $\overrightarrow{HM} = z\vec{k}$. On a donc :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = x\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

Donc le triplet $(x; y; z)$ existe et il est unique.



Remarque 2.5
La première coordonnée (x) est appellée *l'abscisse*, la deuxième (y) est appelée *l'ordonnée*, et la troisième (z) est appelée *la cote*.

2.4.3 Coordonnées d'un vecteur de l'espace

Définition 2.6
Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur de l'espace. On appelle *coordonnées* du vecteur $\vec{u}$ dans ce repère le triplet $(x; y; z)$ coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. On note $\vec{u}(x; y; z)$.

2.4.4 Propriétés

Dans la suite, $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace.
Les propriétés sur les coordonnées de vecteurs du plan restent valables dans l'espace :

Théorème 2.3
Dire que deux vecteurs de l'espace sont égaux équivaut à dire qu'ils ont les mêmes coordonnées.

Théorème 2.4
Soit $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ deux vecteurs et k un réel quelconque.
– le vecteur $k \cdot \vec{u}$ a pour coordonnées $(kx; ky; kz)$.
– le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'; y + y'; z + z')$.

Théorème 2.5
Soit $M(x; y; z)$ et $N(x'; y'; z')$ deux points de l'espace. Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées $(x' - x; y' - y; z' - z)$.

Théorème 2.6
Soit $M(x; y; z)$ et $N(x'; y'; z')$ deux points de l'espace. Le milieu I du segment $[MN]$ a pour coordonnées $(\frac{x+x'}{2}; \frac{y+y'}{2}; \frac{z+z'}{2})$.

Exemple 2.5
Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on donne : $A(2; -1; 0)$, $B(-3; 5; 3)$, et $C(0, 0, 6)$. Calculer

les coordonnées de :

$$\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}, \quad \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right), \quad I \text{ milieu de } [BC]$$

2.4.5 Colinéarité

Théorème 2.7
Soit $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère de l'espace et $\vec{u}(x;y;z)$, $\vec{v}(x';y';z')$ deux vecteurs non nuls.
Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à dire qu'il existe un réel k tel que :

$$x = kx', \quad y = ky', \quad z = kz'$$

Démonstration : par la définition de la colinéarité.

2.5 Distance et orthogonalité

2.5.1 Distance entre deux points

Dans ce paragraphe, on se place dans un repère orthonormal de l'espace.

Théorème 2.8
Dans un repère orthonormal, si les points M et N ont pour coordonnées respectives $(x;y;z)$ et $(x';y';z')$, alors :

$$MN^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$

Démonstration :
On choisit A le point de l'espace tel que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{MN}$. On a alors $MN = OA$. Soit I le point d'intersection de $(O;\vec{i},\vec{j})$ et de la parallèle à $(O,\vec{k})$ passant par A.
On est dans un repère orthonormal donc OIA est rectangle en I et donc $OA^2 = OI^2 + IA^2$. Or $OI^2 = x_A^2 + y_A^2$ et $IA = z_A$. Donc :

$$MN^2 = OA^2 = x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$

Exemple 2.6
On donne $A(5;3;-2)$ et $B(-1;2;4)$.

$$AB^2 = (-1-5)^2 + (2-3)^2 + (4-(-2))^2 = (-6)^2 + (-1)^2 + 6^2 = 73$$

Donc $AB = \sqrt{73}$.

Remarque 2.6
Le carré de la norme d'un vecteur $\vec{u}(x;y;z)$ est : $||\vec{u}||^2 = x^2+y^2+z^2$. En effet, soit M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. On alors $||\vec{u}||^2 = ||\overrightarrow{OM}||^2 = OM^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2$.

2.5.2 Orthogonalité de deux vecteurs

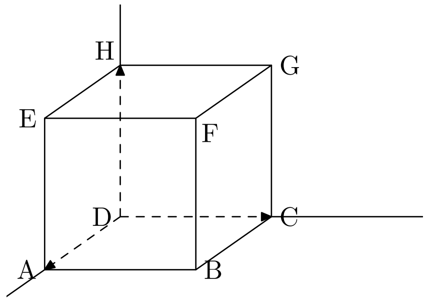
Définition 2.7
On dit que deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux si les droites (AB) et (CD) le sont (orthogonales).

Remarque 2.7
Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur de l'espace.

Théorème 2.9
Dans un repère *orthonormal*, dire que les vecteurs $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ sont orthogonaux équivaut à dire que :

$$xx' + yy' + zz' = 0$$

Exemple 2.7
Sur la figure ci-contre on a un cube $ABCDEFGH$. On considère le repère orthonormal $(D;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$. Les vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont-ils orthogonaux ? Même question pour $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{BD}$.



Dans le repère proposé, les vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{AG}$ ont pour coordonnées respectives $(0-1;0-1;1-0)$ et $(0-1;1-0;1-0)$. Soit : $\overrightarrow{BH}(-1;-1;1)$ et $\overrightarrow{AG}(-1;1;1)$.
On calcule $xx'+yy'+zz' = -1\times(-1)+(-1)\times 1+1\times 1 = 1$.
Donc d'après le théorème 2.9, les vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{AG}$ ne sont pas orthogonaux.
Soit m et n deux réels de l'intervalle $[0;1]$. Sur la figure précédente, on place le point M de $[CG]$ tel que $CM = m$ et le point N de $[AE]$ tel que $AN = n$. À quelle condition sur m et n les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont-ils orthogonaux ?
$M(0;1;m)$ et $N(1;0;n)$. Donc $\overrightarrow{BM}(-1;0;m)$ et $\overrightarrow{BN}(0;-1;n)$. On calcule :

$$xx' + yy' + zz' = -1\times 0 + 0\times(-1) + m\times n = mn$$

Donc d'après le théorème 2.9, les deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si $mn = 0$; soit $m = 0$ ou $n = 0$. Pour que les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{BM}$ soient orthogonaux, il faut et il suffit que l'un des deux points M et N soit sur la face $ABCD$ du cube.

Chapitre 3

Les matrices

3.1 Définitions

3.1.1 Matrice

Définition 3.1
Une matrice $m \times n$ est un tableau de nombres à m lignes et n colonnes. Les nombres qui composent la matrice sont appelés les *éléments* de la matrice (ou aussi les *coefficients*).
Notations :
- Les coefficients s'écrivent sans « séparation » verticale ou horizontale et la matrice est « encadrée » par des parenthèses.
- Si A est une matrice de dimension $m \times n$, on note généralement a_{ij} le coefficient qui est à la i^{e} ligne et dans la j^{e} colonne de la matrice, où $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.

Exemple 3.1
$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice à 3 lignes et 4 colonnes.
On a $a_{13} = -1$, $a_{31} = \sqrt{2}$.

Définition 3.2 (cas particuliers)
- Une matrice dont tous les éléments sont nuls est appelée *matrice nulle*.
- Une matrice ne contenant qu'une ligne (matrice $1 \times n$) est appelée *matrice ligne* ou encore *vecteur ligne*.
- Une matrice ne contenant qu'une colonne (matrice $m \times 1$) est appelée *matrice colonne* ou encore *vecteur colonne*.
- Une matrice ayant le même nombre de lignes et de colonnes (matrice $m \times m$) est appelée une *matrice carrée*.

3.1.2 Matrices carrées

- Dans une matrice carrée, la *diagonale* est la suite des éléments de la diagonale issue du coin haut-gauche au coin bas-droit.
  $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & -7 & 0 \\ \sqrt{5} & 0 & -2 \end{pmatrix}$. La diagonale de B est en bleu : $\begin{pmatrix} 4 & -7 & -2 \end{pmatrix}$

- Une matrice carrée dont tous les éléments en dehors de la diagonale sont nuls[1] est appelée matrice *diagonale*.
  $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale.
- La matrice diagonale $n \times n$ dont tous les éléments de la diagonale sont égaux à 1 est appelée *matrice unité*. On la note I_n.
  $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice unité d'ordre 4.

3.1.3 Transposée d'une matrice

Définition 3.3
Soit M une matrice $m \times n$. La transposée de la matrice M est la matrice $n \times m$ notée ${}^tM$ dont les lignes sont les colonnes de M.

Exemple 3.2
Soit D la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. La transposée de D est ${}^tD = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$${}^t\begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

3.1.4 Égalité de deux matrices

Définition 3.4
Soit A et B deux matrices ayant le même nombre de lignes et de colonnes. On dit que $A = B$ si tous les éléments de A sont égaux aux élements correspondants de B.

Exemple 3.3
On donne : $E = \begin{pmatrix} 2x+3 & 5 \\ 3 & -2y-4 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer x et y pour que les matrices E et F soient égales.
E et F sont égales si $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x+3 & = & -1 \\ -2y-4 & = & 5 \end{array} \right.$. Soit $x = -2$ et $y = -\frac{9}{2}$.

3.2 Opérations élémentaires

3.2.1 Addition de matrices

Définition 3.5
Soit M et N deux matrices ayant le même nombre de lignes et de colonnes. La somme des matrices M et N est la matrice de mêmes dimensions que M et N dont chaque élément est la somme des éléments correspondants de M et N.

[1] Certains éléments de la diagonales peuvent aussi être nuls.

Exemple 3.4
$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -8 \end{pmatrix}$

3.2.2 Multiplication d'une matrice par un nombre

Définition 3.6
Soit M une matrice quelconque et λ un réel. Le produit de λ par M est la matrice de mêmes dimensions que M dont chaque élément est le produit de λ par l'élément correspondant de M.

Exemple 3.5
Soit $M = \begin{pmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{pmatrix}$, et $\lambda \in \mathbf{R}$. On a : $\lambda M = \begin{pmatrix} 4\lambda & \lambda a \\ \lambda b & -\lambda \end{pmatrix}$

Remarque 3.1
En prenant $\lambda = -1$, on peut ainsi définir la matrice opposée d'une matrice A : c'est la matrice $(-1) \times A$ qu'on note aussi $-A$. De même on définit la soustraction de deux matrices A et B : $A - B = A + (-1) \cdot B$.

Exemple 3.6
Soit A et B les matrices définies par : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$.
L'opposée de B est $-B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, et la différence de A et B est : $A - B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

3.2.3 Propriétés

On admettra le théorème suivant :

Théorème 3.1
Soit A, B et C trois matrices ayant le même nombre de lignes et de colonnes, λ et λ' deux réels.

$$\begin{aligned} A + B &= B + A & (1) \\ (A+B)+C &= A + (B+C) & (2) \\ \lambda(A+B) &= \lambda A + \lambda B & (3) \\ (\lambda + \lambda')A &= \lambda A + \lambda' A & (4) \\ \lambda(\lambda' A) &= (\lambda\lambda')A & (5) \end{aligned}$$

Remarque 3.2
- L'égalité (1) caractérise la *commutativité* de l'addition matricielle.
- L'égalité (2) traduit son *associativité*.
- L'égalité (3) traduit la *distributivité* de la multiplication de matrice par un réel par rapport à l'addition de matrices.
- L'égalité (3) traduit la *distributivité* de la multiplication de matrice par un réel par rapport à l'addition de réels.

Remarque 3.3
Soit A et B deux matrices connues, et X une matrice dont on ne connait pas les coefficients telle que $A + X = B$.

En utilisant la remarque 3.1, on peut soustraire aux deux membres de cette égalité matricielle la matrice A et on obtient : $X = B - A$.

Exemple 3.7
On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. Soit X une matrice 2×2 telle que $2X + 3A = B$. Déterminer X.
En utilisant la remarque 3.3, on obtient que $2X = B - 3A$. En multipliant les matrices $2X$ et $B - 3A$ par $\frac{1}{2}$, on obtient $X = \frac{1}{2}(B - 3A)$.
$3A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$. Donc $-3A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$. Et donc : $B - 3A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.
Finalement, on obtient $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3.3 Produit de matrices

3.3.1 Produit d'une matrice par un vecteur colonne

On peut effectuer le produit d'une matrice à n colonnes (quelque soit le nombre m de lignes) par un vecteur colonne à n lignes[2]. Le résultat est alors un vecteur colonne à m lignes.

Exemple 3.8
On considère une matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ -1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ et un vecteur colonne $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Le produit AV est le vecteur colonne $V = \begin{pmatrix} 2x + 4y - 5z \\ -x + 6y + 3z \end{pmatrix}$.

Exemple 3.9 (technique de calcul)
On obtient le résultat en additionnant les « produits diagonaux » :

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2\times1 + 0\times(-2) + (-3)\times3 \\ -2\times1 + 1\times(-2) + 3\times3 \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

3.3.2 Produit d'un vecteur ligne par une matrice

On peut effectuer le produit d'un vecteur ligne à m colonnes par une matrice à m lignes (quelque soit le nombre n de colonnes). Le résultat est alors un vecteur ligne à n colonnes.

Exemple 3.10

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1\times3 + (-2)\times2 + 4\times(-2) & 1\times(-1) + (-2)\times0 + 4\times4 \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} -9 & 15 \end{pmatrix} \end{array}$$

[2] le même « n »

3.3.3 Produit de deux matrices

On peut effectuer le produit d'une matrice à m lignes et n colonnes par une matrice à n lignes[3] et p colonnes. Le résultat est alors une matrice à m lignes et p colonnes.

Exemple 3.11
On note $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.
Le produit AB est la matrice à 3 lignes et 4 colonnes suivante :
$$\begin{pmatrix} 2\times 2+1\times 1 & 2\times 4+1\times(-2) & 2\times 6+1\times 3 & 2\times(-1)+1\times 5 \\ 4\times 2+3\times 1 & 4\times 4+3\times(-2) & 4\times 6+3\times 3 & 4\times(-1)+3\times 5 \\ (-1)\times 2+(-2)\times 1 & (-1)\times 4+(-2)\times(-2) & (-1)\times 6+(-2)\times 3 & (-1)\times(-1)+(-2)\times 5 \end{pmatrix}$$
qui est égale à $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 15 & 3 \\ 11 & 10 & 33 & 11 \\ -4 & 0 & -12 & -9 \end{pmatrix}$

Remarque 3.4 (Attention !)
Le produit de matrices n'est pas commutatif, c'est à dire que si A et B sont deux matrices, en général, $AB \neq BA$. En effet, le nombre de lignes et de colonnes des matrices A et B peuvent permettre d'effectuer le produit AB mais pas nécessairement le produit BA. De plus même dans le cas où les deux produits existent (si les matrices sont carrées par exemple), AB n'est pas toujours égal à BA

Exemple 3.12
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.
Le produit AB existe : c'est la matrice $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 12 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 6 & 19 \end{pmatrix}$. Par contre le produit $B \times A$ n'existe pas car le nombre de colonnes de B n'est pas égal au nombre de lignes de A.

Exemple 3.13
On donne $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer AB puis BA.
$AB = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

3.3.4 Propriétés

Propriété 3.1
Soit A, B et C trois matrices. On a :

$$A(BC) = (AB)C$$

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$(A+B)C = AC + BC$$

[3] le même « n »

Définition 3.7
Soit A une matrice carrée et n un entier naturel non nul. On note A^n la matrice égale à $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ facteurs}}$.

Exemple 3.14
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^3.
$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Et $A^3 = A \times A^2 = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.

Remarque 3.5 (Attention !)
Pour a et b réels, si $ab = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$. Cette propriété est fausse pour les matrices : on considère $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a : $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3.4 Inverse d'une matrice

3.4.1 Définition

Exemple 3.15
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer AB, puis BA.
On a : $AB = BA = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Définition 3.8
Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n. On dit que B est *l'inverse* de A si on a $AB = I_n$.

Remarque 3.6
Dans ce cas, on a : $AB = BA = I_n$.

Exemple 3.16
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est sa propre inverse.
Il s'agit de montrer que $A \times A = I_n$. On calcule : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple 3.17
On donne $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que les matrices A et B sont inverses l'une de l'autre.

3.4.2 Recherche de l'inverse

Exemple 3.18
On donne $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, et on note B l'inverse de A si elle existe. La matrice B existe-t-elle ? Si oui, quels sont ses coefficients ?

Si $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ existe, on a : $A \times B = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Or, $A \times B = \begin{pmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ 3a+5c & 3b+5d \end{pmatrix}$. Donc résoudre $A \times B = I_2$ équivaut à résoudre le système :

$$\begin{cases} 2a+3c=1 & (1) \\ 2b+3d=0 & (2) \\ 3a+5c=0 & (3) \\ 3b+5d=1 & (4) \end{cases}$$

Ce système peut, en fait, se décomposer en deux systèmes :

$$\begin{cases} 2a+3c=1 & (1) \\ 3a+5c=0 & (3) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} 2b+3d=0 & (2) \\ 3b+5d=1 & (4) \end{cases}$$

qu'on peut facilement résoudre pour obtenir le quadruplet $(5; -3; -3; 2)$ comme unique solution pour $(a; b; c; d)$.

On vérifie que B convient, c'est à dire que $A \times B = I$; ce qui est le cas. Donc B existe et elle est égale à : $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Remarque 3.7

Certaines matrices n'ont pas d'inverse. On considère par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On cherche $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que : $A \times B = I_2$.

Or $A \times B = \begin{pmatrix} 2a+6c & 2b+6d \\ a+3c & b+3d \end{pmatrix}$. Donc si $A \times B = I_2$, alors $2a+6c = 1$ et $a+3c = 0$. Ce qui est impossible car la première de ces deux équations est équivalente à $a+3c = \frac{1}{2}$ et $a+3c$ ne peut être à la fois égal à $\frac{1}{2}$ et à 0. La matrice B n'existe donc pas !

Exemple 3.19 (Cas particulier)

Déterminer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exemple 3.20

En utilisant la calculatrice, déterminer l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 7 & -8 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

3.5 Application à la résolution d'un système linéaire

3.5.1 Système linéaire et matrice

On donne une matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, un vecteur colonne inconnu $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, et un vecteur colonne connu $C = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Résoudre l'équation matricielle $AV = C$ équivaut à résoudre le système $\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ 2x \quad 3y = -5 \end{cases}$.

Ainsi pour résoudre un tel système, il suffit de déterminer A^{-1} et en multipliant (à gauche) l'égalité $AV = C$ par A^{-1}, on obtient : $A^{-1}AV = A^{-1}C$ soit $V = A^{-1}C$.

Dans l'exemple précedent, on détermine A^{-1} à l'aide de la calculatrice, et on obtient

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & \frac{2}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{pmatrix} \text{ et } V = A^{-1}C = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

La solution du système est donc $\mathscr{S} = \{(2; -3)\}$.

3.5.2 Application

Exemple 3.21

Résoudre le système suivant à l'aide du mode « matrices » de la calculatrice, puis vérifier à l'aide de la méthode de Gauss :

$$(S) : \begin{cases} 2x - 3y + z = 16 \\ 3x - 4y - 2z = 5 \\ -4x + 5y - 3z = -34 \end{cases}$$

Exemple 3.22

Un fournisseur fabrique quatre types de produits P_1, P_2, P_3 et P_4 qu'il vend à quatre clients différents : C_1, C_2, C_3 et C_4. On a regroupé dans le tableau ci-contre les commandes de chaque produit pour les quatre acheteurs. De plus les montants des factures adressées à chaque client sont respectivement 51,95 €, 42,35 €, 36,60 € et 277 €.

	P_1	P_2	P_3	P_4
C_1	5	6	2	3
C_2	11	0	24	5
C_3	0	4	100	0
C_4	40	20	10	30

Déterminer le prix de vente de chaque article.

Chapitre 4

Plans, droites, courbes de niveau de l'espace

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère de l'espace.

4.1 Plans de l'espace

4.1.1 Plan parallèle à un plan de coordonnées

Propriété 4.1
Soit $A(0;0;\lambda)$ un point de l'espace où $\lambda \in \mathbf{R}$. Le plan $\mathscr{P}$ parallèle à $(O;\vec{i},\vec{j})$ passant par A a pour équation $z=\lambda$.

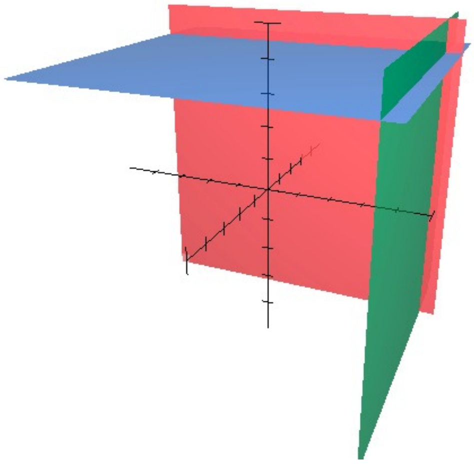
On note : $\mathscr{P} : z=\lambda$.

Cela signifie que :

– si $M(x;y;z) \in \mathscr{P}$, alors $z=\lambda$ (x et y sont quelconques),
– si M est un point tel que $z_M=\lambda$, alors $M \in \mathscr{P}$.

Remarque 4.1
De même, les plans $\mathscr{Q}$ et $\mathscr{R}$ passant repsectivement par $B(0;\mu;0)$ et $C(\nu;0;0)$ et parallèles respectivement à $(O;\vec{i},\vec{k})$ et $(O;\vec{j},\vec{k})$ ont pour équation :

$$\mathscr{Q} : y=\mu \quad \text{et} \quad \mathscr{R} : x=\nu$$



4.1.2 plan parallèle à un axe de coordonnées

Propriété 4.2

- Un plan parallèle à $(O;\vec{k})$ a une équation du type $ax+by=d$.
- Un plan parallèle à $(O;\vec{j})$ a une équation du type $ax+cz=d$.
- Un plan parallèle à $(O;\vec{i})$ a une équation du type $by+cz=d$.

Exemple 4.1 (démonstration d'un cas particulier)
Soit $A(3;0;0)$ et $B(0;2;0)$ deux points de l'espace. $\mathscr{P}$ est le plan parallèle à $(O;\vec{k})$ passant par A et B.

Soit $M(x;y;z)$ un point de $\mathscr{P}$, et H son projeté orthogonal sur $(O;\vec{i},\vec{j})$. On a $\left\{\begin{array}{l} x_H = x \\ y_H = y \\ z_H = 0 \end{array}\right.$. Donc le couple $(x_H;y_H)$ vérifie l'équation de la droite (AB) dans $(O;\vec{i},\vec{j})$. Or $(AB) : 2x+3y=6$
z est quelconque car pour tout z, le projeté orthogonal de M sur $(O;\vec{i},\vec{j})$ ne change pas. On dit que l'équation du plan $\mathscr{P}$ est $2x+3y=6$.

4.1.3 Plan quelconque

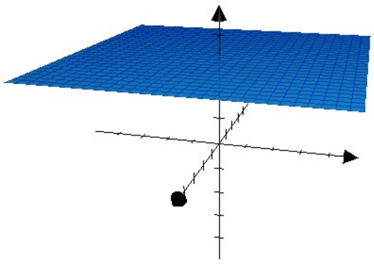
Théorème 4.1 (admis)
Si a, b et c sont trois réels non tous nuls et d un réel quelconque, l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan. On dit que $ax+by+cz+d=0$ est une équation de ce plan.

Remarque 4.2

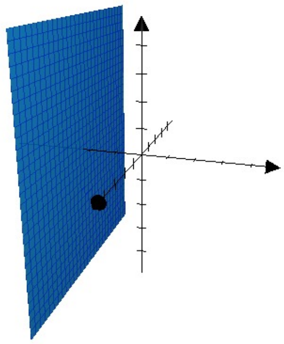
- un plan admet une infinité d'équations (on peut multiplier l'une d'elle par n'importe quel réel non nul).
- si $d \neq 0$, l'équation du plan peut s'écrire sous la forme $ax+by+cz+1=0$ (On multiplie l'équation initiale par $1/d$). Dans ce cas, l'origine du repère n'appartient pas au plan.

4.1.4 Quelques figures

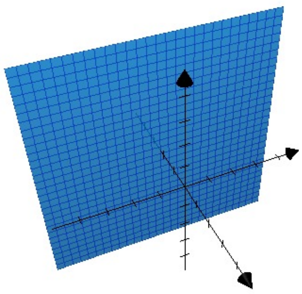
plan parallèle à (xOy) : $z = \lambda$



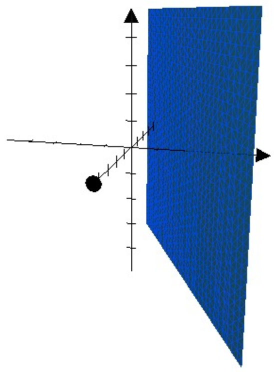
plan parallèle à (xOz) : $y = \mu$



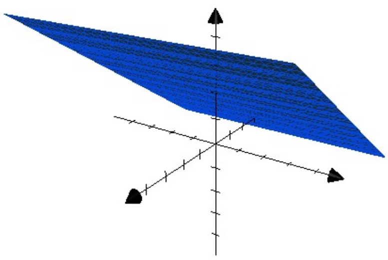
plan parallèle à (yOz) : $x = \nu$



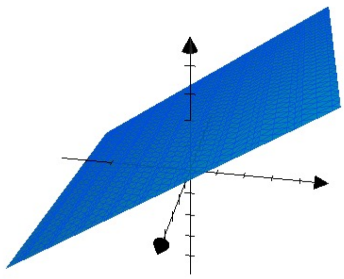
plan parallèle à (Oz) : $ax + by = d$



plan parallèle à (Oy) : $ax + cz = d$



plan parallèle à (Ox) : $by + cz = d$



4.2 Vecteur orthogonal à un plan

Définition 4.1

On dit qu'un vecteur $\vec{n}$ est *orthogonal* (ou *normal*) à un plan si sa direction est une droite orthogonale au plan.

Remarque 4.3
$\vec{n}$ est donc un vecteur orthogonal à un plan $\mathscr{P}$ s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de $\mathscr{P}$.

Théorème 4.2
Si $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormal, alors le plan $\mathscr{P}$ d'équation $ax+by+cz+d=0$ admet le vecteur $\vec{n}(a;b;c)$ comme vecteur normal.

Exemple 4.2
Le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x-3y+z+3=0$ admet pour vecteur normal $\vec{n}(2;-3;1)$.
Le plan $\mathscr{Q}$ d'équation $x+3z-1=0$ a pour vecteur normal $\vec{n'}(1;0;3)$

4.3 Plans parallèles

Théorème 4.3
Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux plans d'équations respectives $ax+by+cz+d=0$ et $a'x+b'y+c'z+d'=0$.
$\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont parallèles si et seulement si il existe un réel non nul k tel que : $\begin{cases} a'=ka \\ b'=kb \\ c'=kc \end{cases}$

Preuve : (si $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est orthonormé)
On utilise les vecteurs normaux aux deux plans.

Remarque 4.4
Dans ce cas, a', b', c' et a, b, c sont deux suites proportionnelles.

4.4 Système d'équations cartésiennes d'une droite

Propriété 4.3
Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace. M appartient à une droite d de l'espace si et seulement si ses coordonnées vérifient un système d'équations cartésiennes de la forme :

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

où a, b, c sont non tous nuls ; de même que a', b' et c'. Ces deux suites n'étant pas proportionnelles.

Preuve :
- si d est une droite de l'espace, elle est l'intersection de deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$. Donc si $M \in d$, alors M vérifie les équations des deux plans.
- Réciproquement, si M vérifie un tel système, alors il appartient aux deux plans ayant pour équations les équations du système. D'après les hypothèses, ces deux plans ne sont pas parallèles donc ils se coupent suivant une droite d.

4.5 Fonctions de deux variables

4.5.1 Introduction

Rappel : une fonction f d'une variable x permet d'associer à chaque nombre x un autre nombre noté $f(x)$. On peut envisager d'associer à *deux* variables x et y, un seul autre nombre qu'on peut noter $f(x;y)$. On dit alors que f est une *fonction de deux variables*.

Exemple 4.3
On considère un rectangle de largeur x et de longueur y. À ces deux nombres on peut associer l'aire $\mathscr{A}$ du rectangle. Ce nombre $\mathscr{A}$ dépend à la fois de x et de y. On écrit donc :

$$\mathscr{A}(x;y) = x \times y$$

On pourrait aussi définir la fonction p qui à x et y associe le périmètre du rectangle. On a alors :

$$p(x;y) = 2(x+y)$$

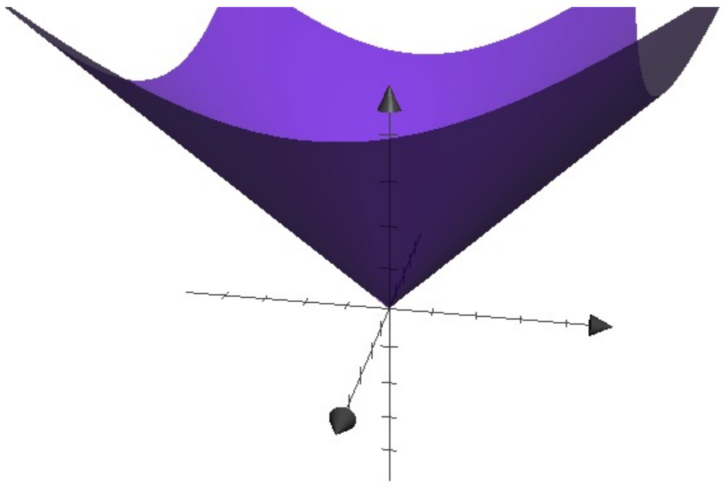
Exemple 4.4
À chaque couple de réels $(x;y)$, on associe le réel $f(x;y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

1. Calculer $f(x;y)$ si $x = -3$ et si $y = 1$.
2. Calculer $f(2,3)$.
3. Trouver les valeurs de x pour que $f(x;3) = 5$.

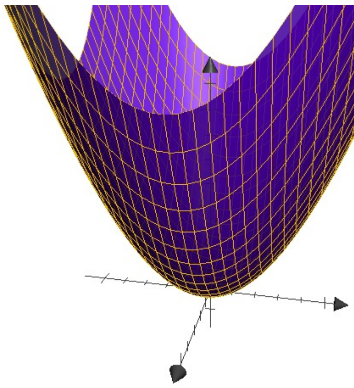
4.5.2 Surface d'équation $z = f(x;y)$

À chaque couple $(x;y)$, une fonction de deux variables f associe un nombre noté $f(x;y)$. En notant z ce nombre $f(x;y)$, on obtient un triplet $(x;y;z)$ auquel on peut associer un point M de l'espace. L'ensemble des points M de coordonnées $(x;y;f(x;y))$ est la *surface d'équation* $z = f(x;y)$.

Exemple 4.5
En reprenant la fonction de deux variables de l'exemple 4.4, on obtient la surface suivante :



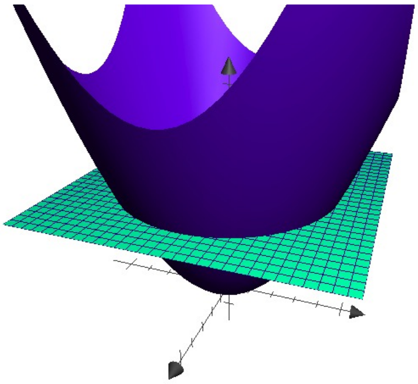
Exemple 4.6
On considère la fonction f de deux variables définie par $f(x;y) = x^2+y^2$. La surface d'équation $z = f(x;y)$ est appelée *paraboloïde*. Elle est tracée ci-dessous :

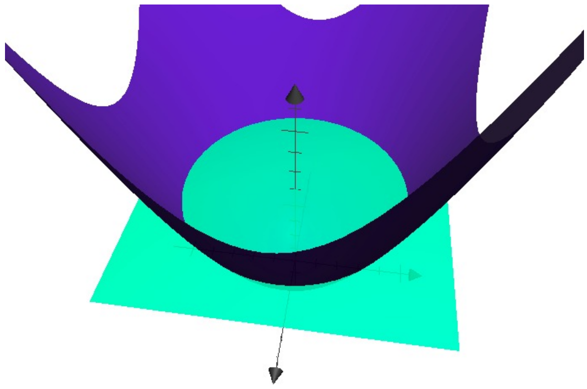


4.5.3 Courbes de niveau

Définition 4.2
L'intersection entre une surface d'équation $z = f(x;y)$ et le plan d'équation $z = \lambda$ est appelée *courbe de niveau* λ de la fonction f.

Exemple 4.7
En reprenant l'exemple 4.6 on trace le plan d'équation $z = 5$, on obtient la courbe $\mathscr{C}$ de niveau 5 dont deux vues sont représentées ci-dessous :





Index