Révisions de mathématiques
Première spé Maths

Thomas Rey

Pour passer un bon été. . .
9 juin 2020

Ce document est un condensé des notions à maîtriser impérativement pour débuter l'année de Terminale dans de bonnes conditions. Il n'est en aucun cas un cours exhaustif de première !
Quelques exercices sont proposés en fin de chaque chapitre. La plupart sont corrigés (ou les réponses sont proposées) à la fin du document.

Ce document est sous licence Creative Commons Paternité BY-NC-SA.
Cela signifie que vous pouvez l'utiliser comme bon vous semble (si possible pour faire des maths !), tant que vous indiquez leur auteur (moi) et leur provenance (le site http://reymarlioz.free.fr), que vous ne les utilisez pas dans un but commercial et que toutes les versions (éventuellement modifiées) que vous distribuez soient aussi sous licence CC BY-NC-SA (voir ici pour plus de précision).

Table des matières

1 Le second degré **5**
- 1.1 Forme canonique d'un polynôme de degré 2 . . . 5
- 1.2 Équation de degré 2 . . . 5
- 1.3 Signe d'un trinôme de degré 2 . . . 6
  - 1.3.1 Factorisation d'un trinôme du second degré . . . 6
  - 1.3.2 Signe d'un trinôme du second degré . . . 6
- 1.4 Récapitulons... . . . 7

2 Suites numériques **9**
- 2.1 Suite de nombres réels . . . 9
  - 2.1.1 Définition . . . 9
  - 2.1.2 Suite définie « en fonction de n » . . . 9
  - 2.1.3 Suite définie par récurrence . . . 10
- 2.2 Variations d'une suite . . . 11
- 2.3 Suites arithmétiques . . . 11
- 2.4 Suites géométriques . . . 12

3 Probabilités conditionnelles **16**
- 3.1 Probabilités conditionnelles . . . 16
  - 3.1.1 Définition . . . 16
  - 3.1.2 Arbres pondérés . . . 16
  - 3.1.3 Formule des probabilités totales . . . 17
- 3.2 Indépendance . . . 17
  - 3.2.1 Événements indépendants . . . 17
  - 3.2.2 Expériences enchaînées . . . 18
- 3.3 Application des probabilités aux calculs d'aires . . . 19

4 Fonctions numériques **22**
- 4.1 Fonction numérique . . . 22
- 4.2 Variations . . . 22
- 4.3 Fonctions usuelles . . . 23
  - 4.3.1 Fonctions affines . . . 23
  - 4.3.2 La fonction carré . . . 23
  - 4.3.3 La fonction inverse . . . 23
  - 4.3.4 Racine carrée . . . 24
  - 4.3.5 Fonction cube . . . 24

5 Dérivation **28**
5.1 Nombre dérivé – Fonction dérivée . . . 28
5.1.1 Nombre dérivé . . . 28
5.1.2 Interprétation graphique . . . 28
5.1.3 Fonction dérivée . . . 29
5.2 Dérivées usuelles et opérations . . . 29

6 Fonctions trigonométriques **32**
6.1 Repérage sur le cercle trigonométrique . . . 32
6.2 Lignes trigonométriques . . . 33
6.2.1 Cosinus et sinus . . . 33
6.2.2 Propriétés . . . 33
6.3 Fonctions trigonométriques . . . 34
6.3.1 Parité. Périodicité . . . 34
6.3.2 Dérivée . . . 34
6.3.3 Représentation graphique . . . 35

7 Dérivation : applications **38**
7.1 Variations d'une fonction . . . 38
7.1.1 Des variations au signe de la dérivée . . . 38
7.1.2 Du signe de la dérivée aux variations . . . 38
7.2 Extrema d'une fonction . . . 39
7.2.1 Définitions . . . 39
7.2.2 Propriétés . . . 39

8 Calcul vectoriel et produit scalaire **42**
8.1 Quatre expressions du produit scalaire . . . 42
8.2 Propriétés et conséquences . . . 43
8.2.1 Remarques . . . 43
8.2.2 Vecteurs orthogonaux . . . 43
8.2.3 Propriétés algébriques . . . 43
8.3 Applications . . . 44
8.3.1 Théorèmes métriques . . . 44
8.3.2 Lieux de points . . . 44

9 Fonction exponentielle **46**
9.1 Définition . . . 46
9.2 Propriétés et étude . . . 46
9.2.1 Propriétés algébriques . . . 46
9.2.2 Étude de la fonction exponentielle . . . 47
9.2.3 Application : équations - inéquations . . . 48
9.2.4 Composée avec une fonction affine . . . 49

10 Variables aléatoires réelles **51**
10.1 Variable aléatoire . . . 51
10.2 Paramètres d'une variable aléatoire . . . 51
10.2.1 Définitions . . . 51
10.2.2 Propriétés . . . 52

11 Équations cartésiennes dans le plan **54**
11.1 Droites du plan 54
11.1.1 Rappel de seconde 54
11.1.2 Vecteur normal à une droite 54
11.1.3 Propriétés 55
11.1.4 Application : projeté orthogonal 55
11.2 Cercles du plan 56
11.3 Paraboles d'axe vertical 56

 CC BY NC SA

Chapitre 1

Le second degré

Dans tous le chapitre, on considère un polynôme de degré 2 s'écrivant sous la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \text{ avec } a \neq 0$$

1.1 Forme canonique d'un polynôme de degré 2

Propriété 1.1
Il existe des réels α et β tels que :

$$ax^2 + bx + c = a(x+\alpha)^2 - \beta$$

L'écriture $a(x+\alpha)^2 - \beta$ est appelée *forme canonique* du trinôme.

À savoir...
Il faut savoir mettre un polynôme sous forme canonique. Par exemple :

$$\begin{aligned}
2x^2 - 5x + 3 &= 2\left(x^2 - \frac{5}{2}x\right) + 3 \\
&= 2\left(x^2 - 2 \times x \times \frac{5}{4} + \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2\right) + 3 \\
&= 2\left(\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right) + 3 \\
&= 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{8} + \frac{24}{8} \\
&= 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

1.2 Équation de degré 2

Dans cette partie on considère l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

 CC BY NC SA

Théorème 1.1
On note $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant. On a trois cas possibles :
- si $\Delta < 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution ;
- si $\Delta = 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- si $\Delta > 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes :

$$\boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}} \text{ et } \boxed{x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

À savoir...
Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
On calcule le discriminant : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$.
L'équations a donc deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

On a donc : $\mathscr{S} = \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

1.3 Signe d'un trinôme de degré 2

1.3.1 Factorisation d'un trinôme du second degré

Théorème 1.2 (admis)
Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré ($a \neq 0$) et Δ son discriminant. On a alors trois cas possibles :
- si $\Delta < 0$ alors $ax^2 + bx + c$ n'est pas factorisable ;
- si $\Delta = 0$ alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$ où $x_0 = -\frac{b}{2a}$;
- si $\Delta > 0$ alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ où $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

À savoir...
Factoriser le trinôme $3x^2 - 5x - 2$.
On calcule $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 49 > 0$; donc le trinôme a deux racines :
$x_1 = \frac{-(-5)-\sqrt{49}}{2\times3} = -\frac{1}{3}$ et $x_2 = \frac{-(-5)+\sqrt{49}}{2\times3} = 2$.
On a alors : $3x^2 - 5x - 2 = 3(x + \frac{1}{3})(x - 2)$.

1.3.2 Signe d'un trinôme du second degré

 CC BY NC SA

Théorème 1.3
Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

si $\Delta < 0$, alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $ax^2 + bx + c$ est du signe de a.

si $\Delta = 0$, alors pour tout $x \neq -\frac{b}{2a}$, $ax^2 + bx + c$ est du signe de a.

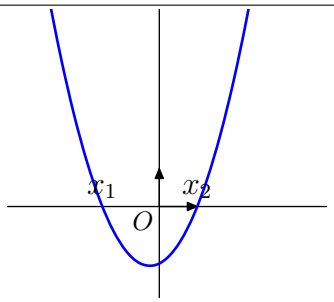
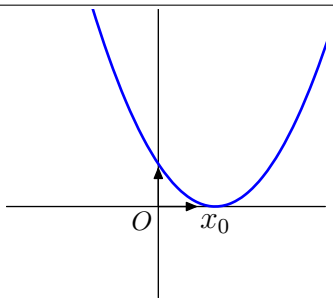
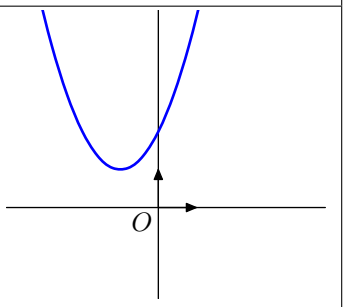
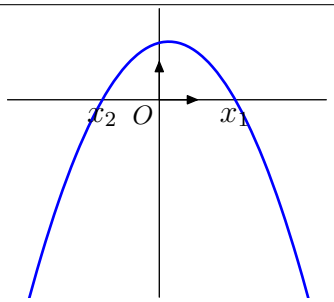
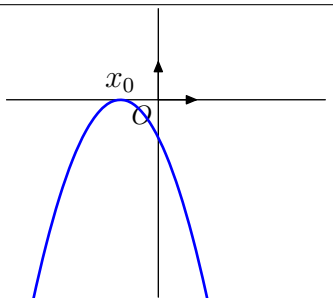
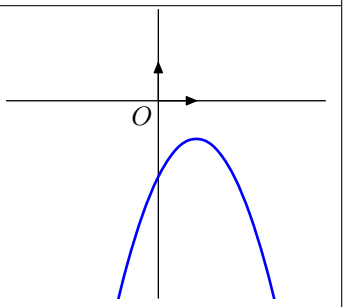
si $\Delta > 0$, alors $ax^2 + bx + c$
— est du signe de a pour x « à l'extérieur des racines » de $ax^2 + bx + c$,
— est du signe contraire de a « entre des racines » de $ax^2 + bx + c$.

Le cas où $\Delta > 0$ peut se résumer par le tableau suivant où on note x_1 et x_2 les deux racines de $ax^2 + bx + c$ rangées par ordre *croissant* :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

1.4 Récapitulons...

— $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$.
— $\Delta = b^2 - 4ac$ avec $x_0 = -\frac{b}{2a}$ si $\Delta = 0$ et $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ si $\Delta > 0$.

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
	x: $-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$ $f(x)$: $+$ 0 $-$ 0 $+$	x: $-\infty$ x_0 $+\infty$ $f(x)$: $+$ 0 $+$	x: $-\infty$ $+\infty$ $f(x)$: $+$
$a < 0$			
	x: $-\infty$ x_2 x_1 $+\infty$ $f(x)$: $-$ 0 $+$ 0 $-$	x: $-\infty$ x_0 $+\infty$ $f(x)$: $-$ 0 $-$	x: $-\infty$ $+\infty$ $f(x)$: $-$

 CC BY NC SA

Exercices

Exercice 1.1
Écrire les polynômes suivants sous forme canonique :

$$f(x) = 2x^2 - 16x + 37; \qquad g(x) = -3x^2 - 12x + 4; \qquad h(x) = \frac{3}{2}x^2 + x + 1$$

Exercice 1.2
Résoudre les équations suivantes (donner les réponses en valeurs *exactes*) :

$$(E_1) : 2x^2 + x - 6 = 0; \qquad x^2 - 3x + 4 = 0; \qquad 2x^2 - 12x + 18 = 0; \qquad 2x^2 - 4x + 1 = 0$$

Exercice 1.3
Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x+3}{4x^2+16x-9}$.

Exercice 1.4
Résoudre les équations suivantes :

$$(E_1) : \frac{2x+3}{2x^2-x-1} = 3; \qquad (E_2) : \frac{2x}{x+3} - \frac{x+1}{x-5} = 1$$

Exercice 1.5
Dresser le tableau de signes des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto 3x^2 - 7x + 2; \qquad g : x \mapsto 2x^2 + 6x + \frac{9}{2}; \qquad h : x \mapsto \frac{3x^2 - 5x + 2}{x - 5}$$

Les corrigés de ce chapitre commencent à la page 58.

 CC BY NC SA

Chapitre 2

Suites numériques

2.1 Suite de nombres réels

2.1.1 Définition

Définition 2.1

On appelle suite de terme général u_n et on note $(u_n)_{n\geq 0}$ ou plus simplement u la liste *ordonnée* des nombres u_0, u_1, u_2, u_3, ... Les nombres u_i sont appelés les *termes* de la suite.
Une suite (u_n) permet donc d'associer à chaque entier n un réel qu'on note u_n.

Remarque 2.1

Il faut bien remarquer que, dans la notation u_n, n est un entier dont dépend la valeur de u_n. Cet entier est appelé *l'indice* du terme u_n. Il joue le même rôle que le « x » dans l'expression de $f(x)$ où f est une fonction numérique. La notation indicielle est ici plus commode et courte à écrire.

Exemple 2.1

Pour n entier naturel, on pose $u_n = 2 \times n$, on a alors :
$u_6 = 2 \times 6 = 12$, $u_n = 2 \times n$, mais aussi $u_p = 2 \times p$ ou encore $u_t = 2 \times t$.
Si on choisit comme indice l'entier $n+1$ on a $u_{n+1} = 2 \times (n+1) = 2n+2$. À ne pas confondre avec $u_n + 1 = (2 \times n) + 1 = 2n + 1$. Il est donc très important d'écrire les indices au bon endroit et à la bonne taille !

2.1.2 Suite définie « en fonction de n »

Une suite est définie *explicitement* si on connait une expression de u_n *en fonction* de n.

Exemple 2.2

La suite u définie par : $u_n = f(n) = \frac{n+3}{n^2+1}$ est définie explicitement : pour toute valeur de n, on peut calculer directement u_n.

 CC BY NC SA

2.1.3 Suite définie par récurrence

Définition 2.2

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbf{R}$, et a un réel quelconque. On dit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour tout } n \in \mathbf{N} \end{cases}$ est définie par *récurrence* et on note :

$$u : \begin{cases} u_0 = a \\ \text{pour } n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

L'égalité « $u_{n+1} = f(u_n)$ » est appelée *relation de récurrence* de la suite.

Remarque 2.2

Lorsqu'une suite est définie par récurrence, pour calculer u_n, on est obligé d'avoir calculé avant tous les termes précédents.

Représentation graphique d'une suite définie par récurrence

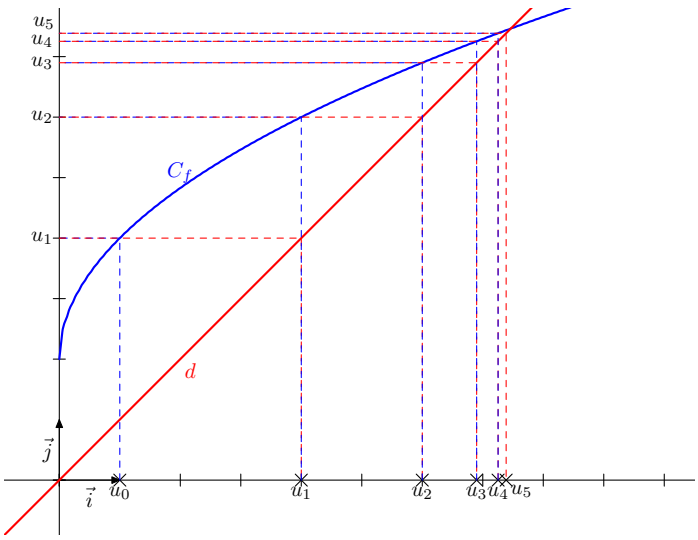
Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbf{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$

On trace dans un repère la droite d d'équation $y = x$ et la courbe représentative C_f de la fonction f. On place ensuite sur l'axe des abscisses u_0. On a $u_1 = f(u_0)$; on peut donc lire u_1 sur l'axe des ordonnées comme l'image de u_0 par f. On reporte alors u_1 sur l'axe des abscisses grâce à d.

Exemple 2.3

Le graphique ci-dessous est obtenu avec $f : x \mapsto 2\sqrt{x} + 2$ et $u_0 = 1$. On a donc u définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} + 2 \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$



 CC BY NC SA

2.2 Variations d'une suite

Définition 2.3

On dit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est :

— strictement croissante si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} > u_n$;

— strictement décroissante si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} < u_n$.

Propriété 2.1

Soit u une suite à termes strictement positifs. Alors :

— la suite u est strictement croissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$;

— la suite u est strictement décroissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

Propriété 2.2

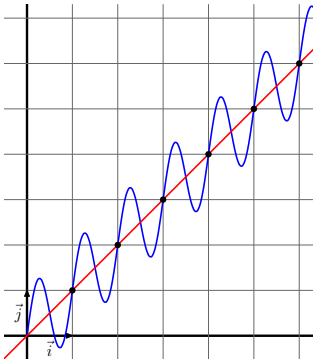
Soit f un fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ et u la suite définie pour $n \in \mathbf{N}$ par $u_n = f(n)$. Alors :

— si f est croissante sur $\mathbf{R}_+$ alors u est croissante ;

— si f est décroissante sur $\mathbf{R}_+$ alors u est décroissante.

Remarque 2.3

Attention : les réciproques des propositions de la propriété 2.2 sont fausses : u peut être croissante et f ne pas l'être sur $\mathbf{R}_+$ (f peut avoir des variations quelconques entre deux entiers consécutifs) :



2.3 Suites arithmétiques

Définition 2.4

Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite *arithmétique* si la différence entre deux termes consécutifs est constante. C'est à dire qu'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$. Le réel r est appelé *raison* de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

 CC BY NC SA

Propriété 2.3
Une suite arithmétique est croissante si sa raison est positive et décroissante sinon.

Théorème 2.1
— si u est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = u_0 + nr$;
— si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = a + b \times n$, alors, u est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = a$ et de raison b.

À savoir...
Si le premier terme d'une suite arithmétique est u_1, et sa raison est r, on a :

$$\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = u_1 + (n-1)r$$

Et de façon plus générale, si u est une suite arithmétique de raison r, pour tous les entiers n et p on a :

$$\boxed{u_n = u_p + (n-p) \times r}$$

Propriété 2.4
La somme S des n premiers termes d'une suite arithmétique est :

$$\boxed{S = \frac{n \times (\text{premier terme} \ + \ \text{dernier terme})}{2}}$$

Dans le cas où le premier terme est u_0, on obtient : $S = \dfrac{n \times (u_0 + u_{n-1})}{2}$.
Dans le cas où le premier terme est u_1, on obtient : $S = \dfrac{n \times (u_1 + u_n)}{2}$.

2.4 Suites géométriques

Définition 2.5
Une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est dite *géométrique* si chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par un même nombre q. C'est à dire qu'il existe un réel q tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le réel q est appelé *raison* de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

 CC BY NC SA

Remarque 2.4

Si on considère que la suite u n'est pas la suite nulle[a], u est géométrique si pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$.

a. La suite nulle est la suite dont tous les termes sont égaux à zéro.

Propriété 2.5

Soit u une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q. Alors :

- si $u_0 > 0$ et $q > 1$ la suite est strictement croissante ;
- si $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$ la suite est strictement décroissante ;
- si $u_0 < 0$ les deux résultats précédents sont inversés.

Théorème 2.2

- si u est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$;
- si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = a \times b^n$, alors, u est la suite géométrique de premier terme $u_0 = a$ et de raison b.

À savoir...

Si le premier terme est u_1, on a : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = u_1 \times q^{n-1}$. De façon plus générale, si u est une suite géométrique de raison q alors pour tous les entiers n et p on a :

$$\boxed{u_n = u_p \times q^{n-p}}$$

Propriété 2.6

Soit u une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, avec q différent de 1 et de 0. On a :

$$\boxed{u_0 + u_1 + \ldots \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$$

Remarque 2.5

Si u est une suite géométrique de raison q, la somme des premiers termes peut aussi s'écrire :

$$\boxed{S = \frac{\text{premier terme} - q \times \text{dernier terme}}{1 - q}}$$

 CC BY NC SA

Exercices

Exercice 2.1
On considère les suites u, v et w définies sur $\mathbf{N}$ par :

$$u_n = 3n + 1; \qquad v_n = \frac{n}{n+1}; \qquad w_n = -n^2 + 2n - 1$$

Calculer les cinq premiers termes de chaque suite.

Exercice 2.2
On considère les suites u, v et w définies sur $\mathbf{N}$ par :

$$u : \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n + 1, n \in \mathbf{N} \end{cases} ; \quad v : \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{v_n}{v_n+1}, n \in \mathbf{N} \end{cases} ; \quad w : \begin{cases} w_0 = 2 \\ w_{n+1} = -w_n^2 + 2w_n - 1, n \in \mathbf{N} \end{cases}$$

Calculer les cinq premiers termes de chaque suite.

Exercice 2.3
1. Une suite arithmétique u est définie par son premier terme $u_0 = -2$ et sa raison $r = 3$. Calculer u_9 et u_{99}.
2. Une suite arithmétique v est définie par son premier terme $v_0 = 1$ et sa raison $r = -2$. Calculer v_5 et v_{20}.
3. Une suite arithmétique w est définie par son premier terme $w_1 = -1$ et sa raison $r = 5$. Calculer w_6 et w_{30}.

Exercice 2.4
1. Une suite arithmétique u est définie par ses deux premiers termes $u_0 = 2$ et $u_1 = 3{,}5$. Déterminer sa raison et l'expression de son terme général en fonction de n.
2. Une suite arithmétique v est définie par les termes $v_5 = 2$ et $v_9 = 14$. Déterminer sa raison, son premier terme v_0 et l'expression de son terme général en fonction de n.
3. Une suite arithmétique w est définie par les termes $w_{10} = 14$ et $w_{35} = 44$. Déterminer sa raison, son premier terme w_0 et l'expression de son terme général en fonction de n.

Exercice 2.5
Calculer la somme des dix premiers termes de chacune des suites de l'exercice 2.3

Exercice 2.6
1. Une suite géométrique u est définie par son premier terme $u_0 = 1$ et sa raison $q = 2$. Calculer u_4 et u_{11}.
2. Une suite géométrique v est définie par son premier terme $v_0 = 128$ et sa raison $q = \frac{1}{2}$. Calculer v_4 et v_{11}.
3. Une suite géométrique w est définie par son premier terme $w_1 = \frac{1}{27}$ et sa raison $q = 3$. Calculer w_4 et w_9.

 CC BY NC SA

Exercice 2.7

1. La suite géométrique u est définie par les termes $u_3 = 2{,}4$ et $u_{10} = 307{,}2$. Déterminer la raison q, le premier terme u_0 et l'expression de u_n en fonction de n.
2. La suite géométrique v est définie par les termes $v_2 = 25$ et $v_6 = 0{,}04$. Déterminer la raison q, le premier terme v_0 et l'expression de v_n en fonction de n.

Exercice 2.8

Calculer la somme des cinq premiers termes des suites de l'exercice 2.6.

Exercice 2.9

On considère la suite u définie sur $\mathbf{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1, \text{ pour } n \in \mathbf{N} \end{cases}$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3.
2. La suite u est-elle arithmétique ? géométrique ?
3. On définit la suite v par $v_n = u_n - 3$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
   a. Calculer v_0, v_1, v_2.
   b. Déterminer la nature de la suite v.
   c. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
4. a. Exprimer u_n en fonction de v_n, puis en fonction de n.
   b. Calculer u_8.

Exercice 2.10

On considère la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par récurrence par : $\begin{cases} v_0 = 10 \\ v_{n+1} = (v_n)^2 + 3v_n + 1 \end{cases}$.

Étudier les variations de u.

Les corrigés de ce chapitre commencent à la page 58.

 CC BY NC SA

Chapitre 3

Probabilités conditionnelles

3.1 Probabilités conditionnelles

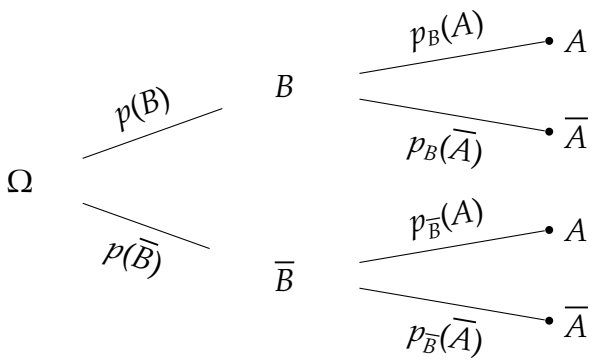
3.1.1 Définition

Définition 3.1
Soit A et B deux événements d'un univers Ω.
Si $p(B) \neq 0$, on appelle « probabilité de A sachant B » ou « probabilité de A si B » et on note $p_B(A)$ le nombre :

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Remarque 3.1
Lorsqu'on calcule une probabilité conditionnelle, on restreint l'univers de l'expérience aléatoire à un sous ensemble de celui-ci.

3.1.2 Arbres pondérés



Règles de l'arbre pondéré : on considère l'arbre pondéré tracé ci-dessus. Les règles indiquées ci-dessous sont toujours vérifiées :

— la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1 :

$$p_B(A) + p_B(\overline{A}) = 1;$$

 CC BY NC SA

— la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des différentes branches qui constituent ce chemin :

$$p_B(A) \times p(B) = p(A \cap B)$$

3.1.3 Formule des probabilités totales

Définition 3.2
Des événements forment une partition de l'univers Ω si les deux conditions suivantes sont réalisées :
— ils sont deux à deux disjoints ;
— leur réunion forme Ω.
Cela signifie que chaque éventualité de Ω appartient à un et un seul de ces événements.

Exemple 3.1
Dans le groupe de spécialité maths 1Maths.1, les classes de provenance des élèves (101 à 108) forment une partition du groupe : chacun d'entre vous provient d'une classe de première et d'une seule.

Propriété 3.1 (Formule des probabilités totales)
On considère une expérience aléatoire d'univers Ω. Si $B_1, B_2, \ldots, B_n$ forment une partition de Ω, alors pour tout événement A de Ω, on a :

$$p(A) = p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + \cdots + p(A \cap B_n)$$

Avec l'arbre vu dans les règles de l'arbre pondéré (page 16), l'événement A est la réunion de deux chemins : $p(A)$ est la somme des probabilités de ces chemins :

$$p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})$$

3.2 Indépendance

3.2.1 Événements indépendants

Définition 3.3
On considère A et B deux événements d'une expérience aléatoire d'univers Ω.
Les événements A et B sont dits indépendants si :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

 CC BY NC SA

Propriété 3.2
On considère A et B deux événements d'une expérience aléatoire d'univers Ω tels que A, $\overline{A}$, B et $\overline{B}$ soient de probabilité non nulle. On a alors :
- les événements A et B sont indépendants si et seulement si $p_B(A) = p(A)$;
- si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B le sont aussi.

Remarque 3.2
Pour savoir si deux événements A et B sont indépendants, on a (au moins) deux méthodes :
- on calcule séparément $p(A \cap B)$ puis $p(A) \times p(B)$ et alors A et B sont indépendants si et seulement si les résultats des deux calculs précédents sont égaux ;
- on calcule séparément $p(A)$ et $p_B(A)$ et alors A et B sont indépendants si et seulement si les résultats des deux calculs précédents sont égaux ;

Attention : si A et B ne sont pas indépendants, alors on utilise (par exemple) :

$$p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A) = p_B(A) \times p(B)$$

3.2.2 Expériences enchaînées

Des expériences aléatoires successives sont indépendantes si le résultat de l'une d'elles n'influe pas sur le résultat des autres.

Propriété 3.3
Dans le cas d'une succession d'expériences aléatoires indépendantes, la probabilité d'obtenir une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat élémentaire de cette liste.

Exemple 3.2
On lance trois fois de suite un dé équilibré à six faces. On obtient ainsi un nombre à trois chiffres : le premier lancer nous donne le chiffre des centaines, le deuxième lancer le chiffre des dizaines et le troisième lancer le chiffre des unités.
Chacun des lancers de dé est indépendant, donc la probablité d'obtenir le nombre 421 est : $p(421) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$.
Attention : ce n'est pas la probabilité d'obtenir « 421 » en jetant trois dés simultanément car dans ce cas, l'ordre n'a pas d'importance (« 421 », « 214 », « 412 », ... ne forment qu'une seule et même combinaison).

3.3 Application des probabilités aux calculs d'aires

Pour cette partie, se référer au cours qui est difficilement « résumable ».

 CC BY NC SA

Exercices

Exercice 3.1
Au menu de la cantine, on choisit une entrée, un plat un dessert parmi :

Trois entrées :	**Trois plats :**	**Deux desserts :**
– du taboulé(*) ;	– un sauté de bœuf ;	– une salade de fruits(*) ;
– des crudités(*) ;	– des pâtes bolognaise ;	– un gâteau au poulet (recette secrète !)
– un friand à la viande	– un couscous légumes(*) ;	

Les plats végétariens sont marqués d'une étoile (*).

1. Tom souhaite respecter la loi n° 2018-938 instaurant l'expérimentation de l'obligation de proposer un repas végétarien par semaine. S'il choisit son repas totalement au hasard, quelle est la probabilité que son repas soit végétarien ? Justifier.
2. Il adore le taboulé et il ne peut s'empêcher de choisir cette entrée sans respecter le hasard. Quelle est alors la probabilité qu'il mange végétarien, s'il choisit au hasard ses deux autres assiettes ?
3. Dans cette question, on ne s'intéresse qu'aux entrées et aux plats. Calculer la probabilité que Tom prenne au moins une assiette végétarienne parmi les deux (entrée et plat).

Exercice 3.2 (5 points)
Dans une station de ski, 40 jeunes se sont inscrits à un stage dans un club : les deux cinquièmes ont choisi un stage « ski » et les autres un stage « patinage ». En ski, on compte dix filles et en patinage on compte seize filles.
On choisit au hasard un jeune de ce stage et on note S l'événement « le jeune fait du ski » et F l'événement « le jeune est une fille ».

1. Calculer la probabilité de l'événement F puis de l'événement S.
2. Expliciter l'événement $F \cap S$ et calculer sa probabilité.
3. Compléter le tableau de probabilités suivant :

	Ski	Patinage	Total
Filles			
Garçons			
Total	0,4		1

4. Expliciter l'événement $F \cup S$ et calculer sa probabilité.
5. On choisit un jeune et c'est une fille. Calculer la probabilité que ce soit une skieuse en donnant la notation correspondante.

Exercice 3.3 (6 points)
Lors d'une enquête sur les logements réalisée auprès des familles d'une région, on apprend que 55 % des familles interrogées sont propriétaires de leur logement, 40 % en sont locataires et 5 % occupent leur logement à titre gratuit [1]. De plus toutes les familles interrogées habitent soit une maison individuelle, soit un appartement ; toute habitation ne contient qu'une seule

1. C'est à dire qu'ils ne sont ni propriétaires, ni locataires mais ont tout de même un logement.

 CC BY NC SA

famille. 60 % des propriétaires habitent une maison individuelle, 80 % des locataires habitent un appartement et enfin 10 % des occupants à titre gratuit habitent une maison individuelle. On interroge au hasard une famille de cette région. On note :

— A l'événement « la famille habite un appartement » ;
— G l'événement « la famille est occupant à titre gratuit » ;
— L l'événement « la famille est locataire » ;
— P l'événement « la famille est propriétaire ».

1. a. Recopier dans la copie la proposition précise de l'énoncé permettant d'indiquer la valeur de chacune des probabilités suivantes :

$$p_P(\overline{A}), \qquad p_L(A); \qquad p_G(\overline{A})$$

   b. Construire un arbre pondéré résumant la situation.
2. Calculer la probabilité de l'événement « la famille est propriétaire et habite un appartement ».
3. Montrer que la probabilité de l'événement A est égale à 0,585.
4. On interroge au hasard une famille habitant un appartement. Calculer la probabilité qu'elle en soit propriétaire. Arrondir à 10^{-3}.

Exercice 3.4

Dans un collège, les élèves choisissent une option parmi *latin* et *théâtre*. Ils choisissent également une langue vivante parmi *allemand*, *italien* et *russe*. Le tableau ci-dessous récapitule les choix des élèves de ce collège :

	Italien	Allemand	Russe	Total
Latin		30	10	80
Théâtre				
Total		120	20	320

1. Compléter le tableau.
2. On choisit au hasard un élève de ce collège.
   a. Calculer la probabilité qu'il ait choisi *italien* et *théâtre*.
   b. Calculer la probabilité qu'un latiniste ait choisi l'*italien*.
   c. Calculer la probabilité qu'il ne fasse ni *allemand*, ni *théâtre*.
3. a. Les événements « faire du latin » et « faire de l'allemand » sont-ils indépendants ?
   b. Même question pour « faire du théâtre » et « faire du russe » .

Les corrigés de ce chapitre commencent à la page 60.

 CC BY NC SA

Chapitre 4

Fonctions numériques

4.1 Fonction numérique

Définition 4.1

Une fonction numérique f permet d'associer à chaque nombre x d'un ensemble D un autre nombre que l'on note $f(x)$. On note : $f : x \longmapsto f(x)$.
Le nombre $f(x)$ est appelé *image* de x par la fonction f. L'image d'un nombre par une fonction numérique est unique.
Le réel x est appelé *antécédent* de $f(x)$ par f. Un nombre peut avoir plusieurs antécédents ; il peut aussi ne pas en avoir.
L'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ existe est noté $\mathscr{D}_f$: c'est l'*ensemble de définition* de f.
Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on pose $y = f(x)$. À chaque couple $(x; y)$ on peut donc associer un point dans un repère. L'ensemble de ces points est appelé *courbe représentative* de la fonction f. On la note généralement $\mathscr{C}_f$.

À savoir...

Soit f et g deux fonctions numériques définies sur un intervalle $[a; b]$. À savoir :

- résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ c'est trouver les *abscisses* des points d'intersections de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$;
- résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$, c'est trouver les *abscisses* des points $M(x; f(x))$ et $N(x; g(x))$ tels que M est au dessus de N.

4.2 Variations

Définition 4.2

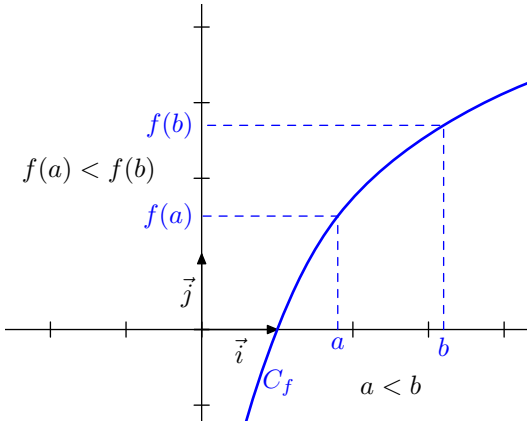
On dit qu'une fonction f est *strictement croissante* sur un intervalle I si pour tout a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) < f(b)$.
On dit qu'une fonction f est *strictement décroissante* sur un intervalle I si pour tout a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) > f(b)$.

 CC BY NC SA

Remarque 4.1

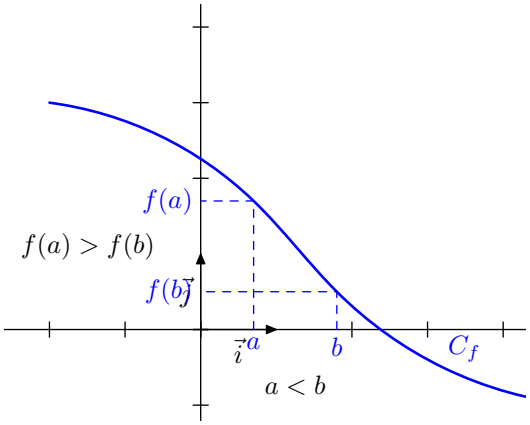
Graphiquement, une fonction est croissante si sa courbe « monte » lorsqu'on se déplace de la gauche vers la droite ; Et une fonction est décroissante si sa courbe « descend » lorsqu'on se déplace de la gauche vers la droite.

Fonction strictement croissante :



Pour tous les réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) < f(b)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ « monte » lorsqu'on se déplace vers la droite.

Fonction strictement décroissante :



Pour tous les réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) > f(b)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ « descend » lorsqu'on se déplace vers la droite.

4.3 Fonctions usuelles

4.3.1 Fonctions affines

Une fonction définie sur $\mathbf{R}$ est dite affine s'il existe deux réels m et p tels que pour $x \in \mathbf{R}$ on a $f(x) = mx + p$.
Si $m > 0$ la fonction est croissante sur $\mathbf{R}$, si $m < 0$ elle est décroissante sur $\mathbf{R}$ et enfin si $m = 0$ elle est constante sur $\mathbf{R}$.
La représentation graphique d'une fonction affine dans un repère est la droite d'équation $y = mx + p$.

4.3.2 La fonction carré

La fonction carré est définie sur $\mathbf{R}$ par $x \mapsto x^2$. Ses variations sont les suivantes :
- elle est décroissante sur $]-\infty; 0[$;
- elle est croissante sur $]0; +\infty[$.

Sa représentation graphique est une parabole de sommet l'origine du repère.

4.3.3 La fonction inverse

La fonction inverse est définie sur $\mathbf{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. Elle est décroissante sur $\mathbf{R}^*_-$ et décroissante aussi sur $\mathbf{R}^*_+$ (Attention ! Elle n'est pas décroissante sur $\mathbf{R}^*$).
Sa représentation graphique est une hyperbole.

 CC BY NC SA

4.3.4 Racine carrée

Définition 4.3
La fonction racine carrée est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ qui à tout réel positif x associe sa racine carrée.

$$x \longmapsto \sqrt{x}$$

Propriété 4.1
La fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$.

4.3.5 Fonction cube

Définition 4.4
La fonction cube est la fonction définie sur $\mathbf{R}$ qui à tout réel x associe son cube x^3.

$$x \longmapsto x^3$$

Propriété 4.2
La fonction cube est croissante sur $\mathbf{R}$.

 CC BY NC SA

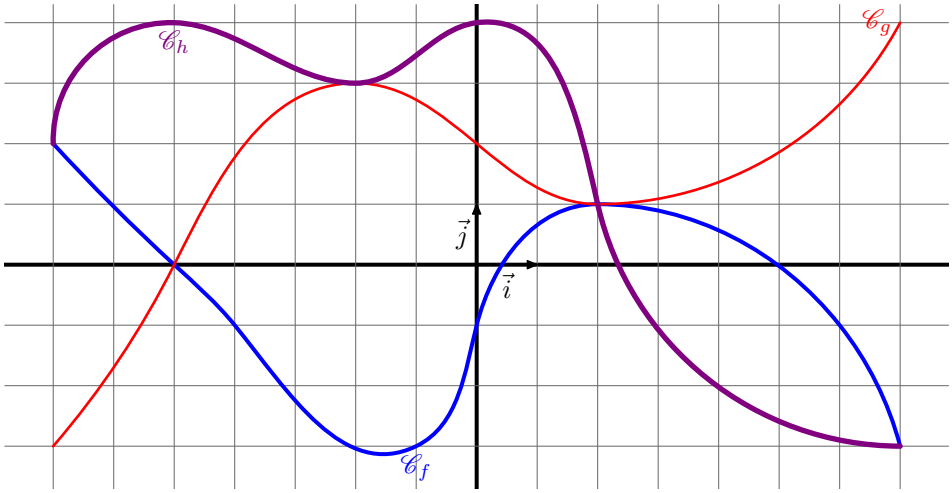
Exercices

Exercice 4.1
Soit f la fonction définie sur $[-5;5]$ par $f(x) = -2(x+3)^2 + 5$.
En utilisant les propriétés du cours (à expliquer), dresser le tableau de variations de f sur $[-5;5]$.

Exercice 4.2 (7 points)
Soit f la fonction définie sur $I = [0\,;\,7]$ par $f(x) = x^2 - 8x + 17$.

1. Écrire $f(x)$ sous forme canonique.
2. Écrire le programme de calcul de la fonction f.
3. Étudier les variations de f sur $[0\,;\,4]$ puis sur $[4\,;\,7]$.
4. Dresser le tableau de variation complet de f sur $[0\,;\,7]$.

Exercice 4.3
On donne ci-dessous les représentations graphiques de trois fonctions f, g et h :



1. Résoudre graphiquement les équations $f(x) = g(x)$, $f(x) = h(x)$ et $g(x) = h(x)$. Dans chaque cas, on donnera une phrase expliquant la réponse.
2. Résoudre graphiquement les inéquations $f(x) < g(x)$ et $f(x) \leq g(x)$.
3. Soit $A(2;1)$ et $B(7;-3)$.
   a. Placer sur le graphique ci-dessus les points A et B.
   b. Tracer le droite (AB) et déterminer son équation réduite.
   c. En déduire l'expression de $m(x)$ où m est la fonction affine représentée par la droite (AB).
   d. Résoudre l'équation $h(x) = m(x)$ (on donnera si besoin une valeur approchée des solutions).
   e. Résoudre l'inéquation $h(x) \geq m(x)$.

 CC BY NC SA

Exercice 4.4

Pour chacune des questions posées ci-après, il peut y avoir une ou plusieurs bonnes réponses.

Questions	Réponses
1. Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^2 - 5x - 1$. Alors :	□ -1 est un antécédent de 6 par f □ $f(-1) = 6$ □ 6 est un antécédent de -1 par f
2. Soit f la fonction définie par $f(x) = -2x^2 + 1$. Alors :	□ l'image de -2 par f est 9 □ 0 a deux antécédents par f □ l'équation $f(x) = 4$ a deux solutions □ $f(4) = -31$
3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{x^2+x-2}$. Quels sont les points qui appartiennent à $\mathscr{C}_f$ courbe représentative de f ?	□ $A(0; -\frac{1}{2})$ □ $B(-1; -\frac{1}{2})$ □ $C(2; \frac{1}{2})$ □ $D(0; 0)$
4. $M(4; -1)$ est un point de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f. Alors :	□ $f(-1) = 4$ □ 4 est un antécédent de -1 par f □ $f(4) = -1$ □ $N(-1; 4)$ appartient aussi à $\mathscr{C}_f$
5. Si x appartient à l'intervalle $]-2\,;\,3]$, alors :	□ $x = 0$ □ x peut être nul □ x peut être égal à -2 □ x peut être égal à 3
6. Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{2x-3}$. Alors :	□ $\frac{3}{2}$ est une valeur interdite pour g □ $\mathscr{D}_g = [\frac{3}{2}\,;\,+\infty[$ □ $g(\frac{3}{2}) = 0$
7. Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{x+3}{x-2}$. Alors :	□ $x = -3$ est valeur interdite pour h □ $x = 2$ est valeur interdite pour h □ $h(5) = 2{,}67$

 CC BY NC SA

Les corrigés de ce chapitre commencent à la page 62.

 BY NC SA

Chapitre 5

Dérivation

5.1 Nombre dérivé – Fonction dérivée

Dans toute cette partie, sauf indication contraire, f est une fonction numérique définie sur un intervalle I, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère. a et x sont deux réels distincts dans l'intervalle I privé de ses bornes. On note h le réel non nul tel que $x = a + h$.
Dans un repère du plan, on note $A(a; f(a))$ et $M(x; f(x))$.

5.1.1 Nombre dérivé

Définition 5.1

Lorsque h se rapproche de plus en plus de 0 (soit quand x se rapproche de a), si le quotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ devient de plus en plus proche d'un nombre réel ℓ fixe, on dit que la limite lorsque h tend vers 0 de ce quotient vaut ℓ. Dans ce cas on dit que f est *dérivable* en a et cette limite est appelée *nombre dérivé* de f en a. On note :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell$$

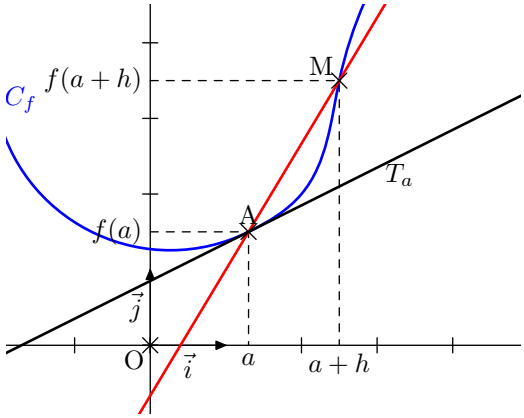
Exemple 5.1

En prenant la fonction carré f on montre que : $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 2a + h$.
On montrerait sans peine que $\lim_{h \to 0}(2a + h) = 2a$ donc f est dérivable en a et on a $f'(a) = 2a$.

5.1.2 Interprétation graphique

Lorsque h se rapproche de 0, le point M se rapproche de A, et la droite (AM) se rapproche d'une « position limite » appelée *tangente* à $\mathscr{C}$ au point A ; son coefficient directeur est $f'(a)$.

 CC BY NC SA



Propriété 5.1
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et dérivable en $a \in I$. La tangente T_a à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation :

$$T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

5.1.3 Fonction dérivée

Soit f une fonction définie et dérivable en tout a d'un intervalle I. On a vu que pour $a \in I$, $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et on l'a appelée « nombre dérivé de f en a » et noté $f'(a)$.

Définition 5.2
Soit f une fonction dérivable en tout x d'un intervalle I, alors la fonction qui à x associe $f'(x)$ est appelée *fonction dérivée* de f sur I. On la note f'.

5.2 Dérivées usuelles et opérations

Les propriétés de cette partie sont résumées dans le tableau suivant.
Dans la suite de ce formulaire, λ est un réel quelconque fixé et n est un entier naturel non nul.

Fonction f	Dérivée f'	Ensemble de dérivabilité de f
$x \mapsto \lambda$	$x \mapsto 0$	**R**
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	**R**
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto 2x$	**R**
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto nx^{n-1}$	**R**

 CC BY NC SA

Fonction f	Dérivée f'	Ensemble de dérivabilité de f
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbf{R}_+^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbf{R}^*$

Par ailleurs, si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et λ un réel quelconque alors :

$$(\lambda u)' = \lambda u' \qquad (u+v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ pour } v \neq 0 \text{ sur } I$$

$$(u^2)' = 2uu' \qquad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \text{ pour } v \neq 0 \text{ sur } I$$

 CC BY NC SA

Exercices

Exercice 5.1
Calculer les dérivées des fonctions suivantes en précisant l'ensemble sur lequel elles sont dérivables :

$$f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 6x - 7; \qquad g(x) = \frac{1}{x} + 2\sqrt{x} + x; \qquad h(x) = (x^2+3)(2x^3 - x + 7)$$

$$p(x) = \frac{2x+3}{x^2-5}; \qquad q(x) = \frac{x^2-5}{x^2+1}; \qquad r(x) = -\frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}$$

Exercice 5.2
Soit f une fonction telle que $f(3) = 5$ et $f'(3) = -2$.
Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3.

Exercice 5.3
Soit $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 + x - 7$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan. On donne $\delta : y = x - 2$.
Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à la droite δ.

Exercice 5.4
Soit f la fonction définie par $x^3 - 12x^2 + 36x$. On admet que f est dérivable sur $\mathbf{R}$.

1. Déterminer la fonction dérivée de f sur $\mathbf{R}$.
2. Déterminer l'équation réduite de T tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 4.
3. Montrer que la position relative de $\mathscr{C}_f$ et T dépend du signe de $(x-4)^3$. Étudier cette position relative.

Les corrigés de ce chapitre commencent à la page 63.

 CC BY NC SA

Chapitre 6

Fonctions trigonométriques

6.1 Repérage sur le cercle trigonométrique

Définition 6.1

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, le cercle de centre O et de rayon 1 est appelé *cercle trigonométrique*.
Sur ce cercle, le *sens direct* est contraire au sens de rotation des aiguilles d'une montre et le *sens indirect* est le sens de rotation des aiguilles d'une montre.

À chaque nombre réel x on associe un unique point M du cercle tel que l'arc $\overset{\frown}{IM}$ ait pour mesure x.
Ce réel est alors la mesure en radians de l'angle $\widehat{IOM}$.

Remarque 6.1

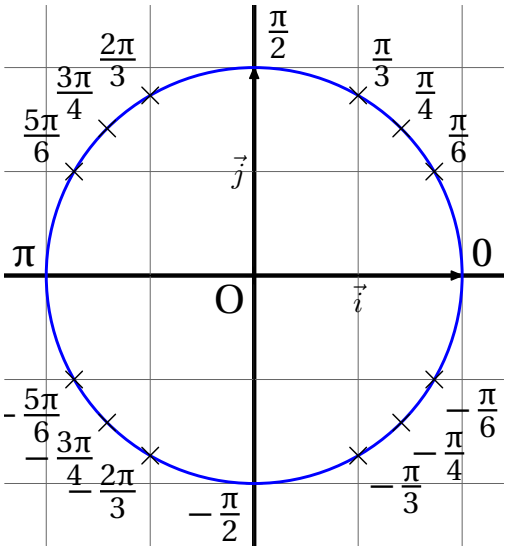
Les mesures d'un angle en degrés et en radians sont proportionnelles. On donne dans le tableau ci-dessous quelques correspondances :

mesure en degrés	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°	≈ 57°
mesure en radians	0 rad	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\pi}{2}$ rad	π rad	2π rad	1 rad

Remarque 6.2

Pour chaque point du cercle, il existe une infinité de réels associés à ce point. Ces réels diffèrent d'un multiple de 2π.
On appelle *mesure principale* d'un angle exprimée en radians la mesure de cet angle qui est comprise dans l'intervalle $]-\pi\,;+\pi]$.

Ci-contre, quelques mesures principales d'angles sur le cercle trigonométrique :



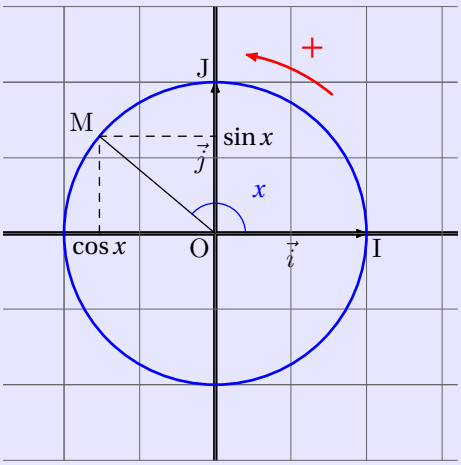
 CC BY NC SA

6.2 Lignes trigonométriques

6.2.1 Cosinus et sinus

Définition 6.2

Soit x un réel et M son image sur le cercle trigonométrique du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Le cosinus de x est le réel noté $\cos(x)$ égal à l'abscisse de M. Le sinus de x est le réel noté $\sin(x)$ égal à l'ordonnée de M.



6.2.2 Propriétés

Propriété 6.1 (de base)
Pour tout réel x et tout entier relatif k on a :

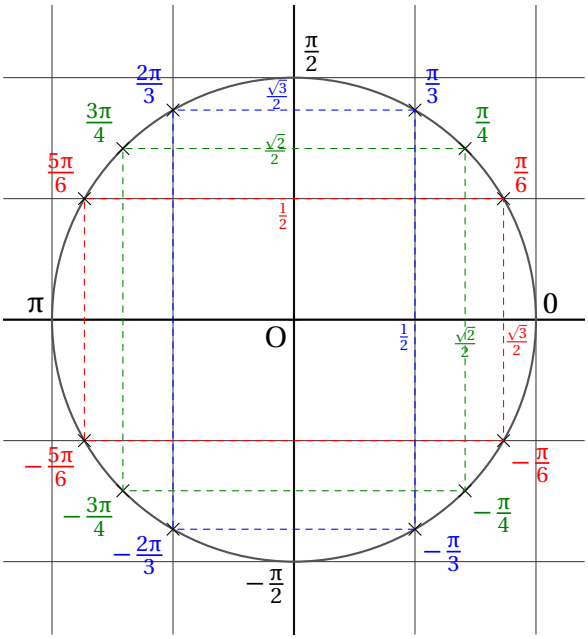
$-1 \leq \cos(x) \leq 1$ $-1 \leq \sin(x) \leq 1$	$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$	$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$

Tableau de quelques valeurs particulières :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Ce tableau se retrouve grâce à la figure suivante :

 CC BY NC SA



6.3 Fonctions trigonométriques

Définition 6.3
La fonction cosinus (resp. sinus) est la fonction qui à tout réel x associe le réel $\cos x$ (resp. $\sin x$) conformement à la définition 6.2.

6.3.1 Parité. Périodicité

Propriété 6.2
La fonction cosinus est une fonction *paire* et la fonction sinus est une fonction *impaire*.

Propriété 6.3
Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π.

À savoir...
Pour tracer la représentation graphique des fonctions sinus et cosinus, il suffit de les représenter sur un intervalle de longueur 2π et ensuite de les reproduire par translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$ où $k \in \mathbf{Z}$.
En combinant avec la restriction liée à la parité, on peut même restreindre l'étude des fonctions sinus et cosinus à l'intervalle $[0; \pi]$.

6.3.2 Dérivée

 CC BY NC SA

Propriété 6.4
Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$ on a :
$\cos'(x) = -\sin(x)$ et $\sin'(x) = \cos(x)$

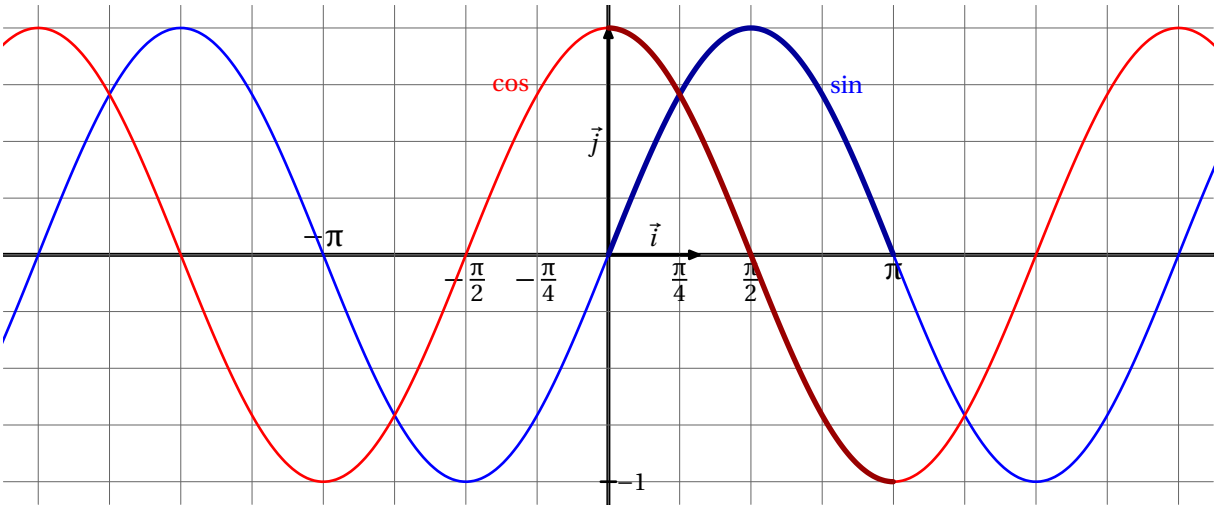
6.3.3 Représentation graphique

Dressons les tableaux de variations des fonctions sinus et cosinus sur $[0; \pi]$:

x	0		$\pi/2$		π
sin	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

x	0		$\pi/2$		π
cos	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

Par symétries et translations, on obtient les courbes représentatives de ces deux fonctions dans un repère orthogonal :



 CC BY NC SA

Exercices

Exercice 6.1
On donne ci-contre ule cercle trigonométrique associé à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Placer sur ce cercle les points correspondants aux réels indiqués ci-dessous :

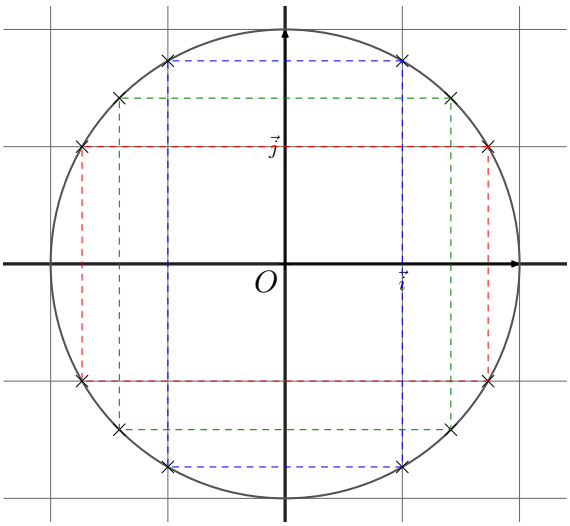
$$A : \frac{5\pi}{3}; \qquad B : \frac{17\pi}{4};$$

$$C : -\frac{11\pi}{6}; \qquad D : -\frac{7\pi}{2}$$

2. Compléter :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \ldots\ldots \qquad \sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = \ldots\ldots$$

$$\sin\left(-\frac{17\pi}{4}\right) = \ldots\ldots \qquad \cos(17\pi) = \ldots\ldots$$

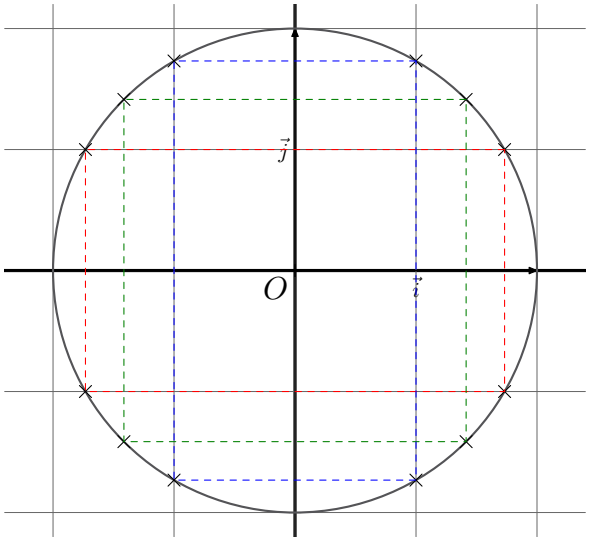


Exercice 6.2
On considère la fonction f définie par $f(x) = 2\cos(2x) + 1$.

1. Étudier la parité de la fonction f. Quelle conséquence peut-on en tirer pour sa représentation graphique ?
2. Montrer que la fonction f est π-périodique. Quelle conséquence peut-on en tirer pour sa représentation graphique ?
3. Sur quel intervalle est-il judicieux d'étudier f pour faire le moins de calculs possible ?
4. Résoudre dans $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 6.3
On donne ci-contre une représentation du cercle trigonométrique. On souhaite résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'inéquation suivante :
$2\sin(x) - 1 \geq 0$

1. a. Montrer que cette inéquation est équivalente à $\sin(x) \geq \frac{1}{2}$.
   b. Représenter sur le cercle trigonométrique les points tels que $\sin(x) = \frac{1}{2}$ puis repasser en couleur les points du cercle tels que $\sin(x) \geq \frac{1}{2}$.
   c. En déduire la solution de l'inéquation proposée.
2. Utiliser une méthode analogue pour résoudre $\cos(x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $]-\pi;\pi]$.



 CC BY NC SA

Les corrigés de ce chapitre commencent à la page 63.

Chapitre 7

Dérivation : applications

7.1 Variations d'une fonction

7.1.1 Des variations au signe de la dérivée

Propriété 7.1
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, on a :
- si f est *strictement croissante* sur I, alors f' est *positive* (ou nulle) sur I ;
- si f est *constante* sur I, alors f' est *nulle* sur I (sauf éventuellement en quelques valeurs « dispersées ») ;
- si f est *strictement décroissante* sur I, alors f' est *négative* (ou nulle) sur I.

Remarque 7.1
Graphiquement, cette propriété est assez « intuitive » : lorsque la fonction est croissante, la courbe « monte », et donc les tangentes aussi : elles ont donc des coefficients directeurs (les nombres dérivés de la fonction si vous avez bien retenu le chapitre 5) positifs.

7.1.2 Du signe de la dérivée aux variations

Théorème 7.1
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, alors :
- si pour $x \in I$ on a $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I ;
- si pour $x \in I$ on a $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I ;
- si pour $x \in I$ on a $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I.

Exemple 7.1
Soit f la fonction carré. On a donc pour $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$ et donc $f'(x) = 2x$.
Pour tout $x \in \mathbf{R}_-$, $f'(x) \leq 0$ donc f est décroissante sur $\mathbf{R}_-$.
De même, sur $\mathbf{R}_+$, $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur $\mathbf{R}_+$.

 CC BY NC SA

Exemple 7.2

Dresser le tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ sur $I = [-2; 5]$.
La fonction f est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur son ensemble de définition. Déterminons sa dérivée f' pour $x \in I$: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$
Déterminons son signe grâce au théorème 1.3 :
$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 > 0$.
Le trinome a donc deux racines : $x_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{16}}{2\times1} = -1$ et $x_2 = \frac{-(-2)+\sqrt{16}}{2\times1} = 3$.
On obtient donc le tableau de signes de $f'(x)$ et on peut alors compléter les variations de f :

x	-2		-1		3		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	3	$\nearrow$	10	$\searrow$	-22	$\nearrow$	10

7.2 Extrema d'une fonction

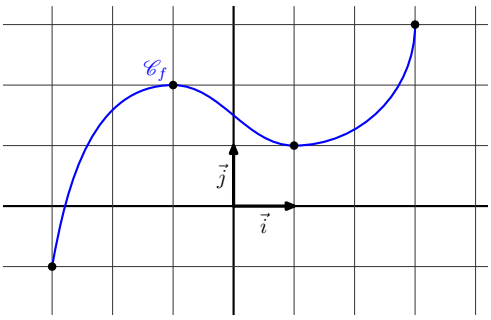
7.2.1 Définitions

Définition 7.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit c un réel de I :
- dire que $f(c)$ est un maximum de f signifie que pour $x \in I$, $f(x) \leq f(c)$;
- dire que $f(c)$ est un minimum de f signifie que pour $x \in I$, $f(x) \geq f(c)$.

Exemple 7.3

Sur la figure ci-contre, on a tracé la représentation graphique d'une fonction f définie sur $I = [-3\,;\,4]$:
- sur I, $f(-3) = -1$ est le minimum de f ;
- sur I, $f(-1) = 2$ est un maximum local de f ;
- sur I, $f(1) = 1$ est un minimum local de f ;
- sur I, $f(4) = 3$ est le maximum de f.



7.2.2 Propriétés

 CC BY NC SA

Propriété 7.2 (admise)
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si $f(c)$ est un extremum local de f alors $f'(c) = 0$.

Remarque 7.2
Attention la réciproque est fausse ! En effet considérons la fonction cube : $f(x) = x^3$. La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et on a $f'(x) = 3x^2$ donc $f'(0) = 0$. Pourtant $f(0)$ n'est pas un extremum local de f.

Propriété 7.3
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit $c \in I$ tel que f' s'annule en c en changeant de signe (c'est-à-dire par exemple que pour $a < x < c$, $f'(x) > 0$ et pour $c < x < b$, $f'(x) < 0$) alors $f(c)$ est un extremum local de f.

 CC BY NC SA

Exercices

Exercice 7.1
On donne $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 - 4x + 1$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier son signe et en déduire les variations de f.
3. Dresser le tableau de variations complet de f sur $[-2; 5]$.
4. Quels sont les extremums de f sur $[-2; 5]$?

Exercice 7.2
Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x^2-3x+1}{x+1}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dan un repère orthogonal du plan.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction f.
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes du repère.
3. Expliquer pourquoi f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ et calculer $f'(x)$.
4. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[-5; 5]$.
5. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

Exercice 7.3
On considère un carré $ABCD$ de côté 1. On place un point M sur le segment $[AB]$ et on place N sur $[BC)$ tel que $C \in [BN]$ et $CN = AM$. La droite (MN) coupe $[DC]$ en en un point P.
Déterminer la position du point M pour laquelle la distance PC est maximale.
On pourra par exemple poser $AM = x$ et exprimer PC en fonction de x.

Les corrigés de ce chapitre commencent à la page 65.

 CC BY NC SA

Chapitre 8

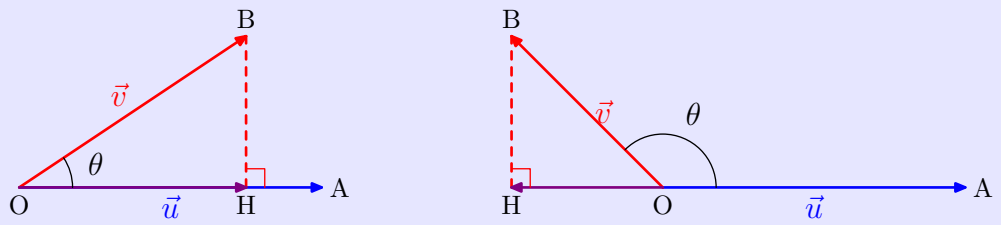
Calcul vectoriel et produit scalaire

8.1 Quatre expressions du produit scalaire

Définition 8.1

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Soit O un point du plan.
On note A et B les points du plan tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.
On appelle *produit scalaire* de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ tel que :

- si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;
- si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors, en notant H le projeté orthogonal de B sur (OA),
  - si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de même sens, $\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OH$;
  - si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de sens contraire, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -OA \times OH$.



$\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OH$ $\qquad$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = -OA \times OH$

Propriété 8.1

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. On note θ l'angle (géométrique) formé par ces vecteurs. Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta)$$

Propriété 8.2

Soit $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

 CC BY NC SA

Propriété 8.3
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Alors on a :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

8.2 Propriétés et conséquences

8.2.1 Remarques

Remarque 8.1
Le produit scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ par lui-même est noté $\vec{u}^2$. Il est égal à $\|\vec{u}\|^2$ et on l'appelle *carré scalaire* de $\vec{u}$.

Remarque 8.2
En physique, le travail d'une force $\overrightarrow{F}$ sur un déplacement $\vec{d}$ est égal au produit scalaire de ces deux vecteurs. Si $\|\overrightarrow{F}\|$ est exprimée en newtons et $\|\vec{d}\|$ en mètres alors le travail $W = \overrightarrow{F}\cdot\vec{d}$ s'exprime en joules.

8.2.2 Vecteurs orthogonaux

Définition 8.2
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Soit O un point du plan et soit A et B les points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits *orthogonaux* (et on note $\vec{u} \perp \vec{v}$) si l'une des deux situations suivantes est réalisée :
- $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$;
- les droites (OA) et (OB) sont perpendiculaires.

Propriété 8.4
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ssi $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

8.2.3 Propriétés algébriques

Propriété 8.5
Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan. Soit $k \in \mathbf{R}$. On a :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}; \quad (\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}; \quad (k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$$

 CC BY NC SA

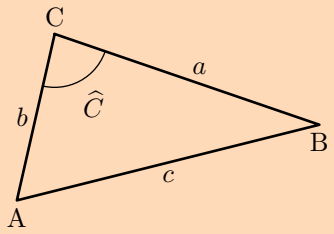
8.3 Applications

8.3.1 Théorèmes métriques

Propriété 8.6 (Théorème d'Al-Kashi)

Soit ABC un triangle quelconque. On note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. Alors :

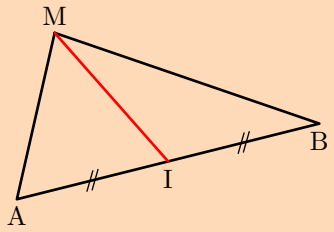
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(\widehat{C}\right)$$



Propriété 8.7 (Théorème de la médiane)

Soit ABM un triangle et I le milieu de $[AB]$. Alors :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$



8.3.2 Lieux de points

À savoir...
Rechercher un lieu de points c'est trouver un ensemble (droite, cercle, segment, parabole, ...) de points vérifiant une propriété donnée.

Exercices

Exercice 8.1 (4 points)
$ABCD$ est un carré de côté 6, E est le milieu de $[BC]$ et F celui de $[CD]$.

1. Calculer $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$.
2. En déduire une mesure arrondie au dixième de degré de l'angle $\widehat{EAF}$.

Exercice 8.2
Dans un repère orthonormé du plan on donne $A(2;3)$, $B(-3;5)$ et $C(-4;-1)$. Calculer une mesure arrondie au degré de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 8.3
Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AB = 5$, $AD = 3$ et $\widehat{BAD} = 42°$.
Calculer AC.

Exercice 8.4
$ABCD$ est un parallélogramme de centre I. $AB = 7$, $AD = 5$ et $BD = 8$. Calculer AC.

Exercice 8.5
Montrer que si ABM est un triangle avec I milieu de $[AB]$ on a les deux égalités suivantes :

$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA}; \qquad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$$

En déduire deux propriétés géométriques sur
— la médiane issue du sommet principal d'un triangle isocèle ;
— le cercle circonscrit à un triangle rectangle.

Exercice 8.6
Soient A et B deux points distincts du plan.
Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Exercice 8.7
Soient A et B deux points du plan.
Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points du plan tels que $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Les corrigés de ce chapitre commencent à la page 66.

 CC BY NC SA

Chapitre 9

Fonction exponentielle

9.1 Définition

Théorème 9.1
Il existe une seule fonction non nulle égale à sa dérivée sur $\mathbf{R}$ vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$.

Définition 9.1
L'unique solution de l'équation différentielle $y' = y$ définie sur $\mathbf{R}$ et vérifiant $y(0) = 1$ est appelée *fontion exponentielle*.
Cette fonction est notée exp : $x \mapsto \exp(x)$.

9.2 Propriétés et étude

9.2.1 Propriétés algébriques

Propriété 9.1
Pour tout $x \in \mathbf{R}$ on a $\exp(x) > 0$.

Propriété 9.2
Pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $y \in \mathbf{R}$ on a :

1) $\exp(a + b) = \exp(a)\exp(b)$;
2) $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$;
3) $\exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$;
4) pour tout $p \in \mathbf{Z}$, $\exp(pa) = (\exp(a))^p$.

 CC BY NC SA

Remarque 9.1

Pour tout $p \in \mathbf{Z}$ on a $\exp(px) = (\exp(x))^p$. En prenant $x = 1$ et en posant $\mathrm{e} = \exp(1) \approx 2{,}718\,28$ on peut donc écrire : pour tout $p \in \mathbf{Z}$, $\exp(p) = \mathrm{e}^p$.
On convient de généraliser cette notation à $p \in \mathbf{R}$ (qu'on note alors x) et on écrit alors :

$$\text{pour tout } x \in \mathbf{R}, \quad \exp(x) = \mathrm{e}^x$$

Remarque 9.2

La propriété 9.2 s'écrit alors, pour tous a, b dans $\mathbf{R}$ et tout $p \in \mathbf{Z}$:

$$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^b; \quad \mathrm{e}^{-a} = \frac{1}{\mathrm{e}^a}; \quad \mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}; \quad \mathrm{e}^{pa} = (\mathrm{e}^a)^p$$

À savoir...

1. Simplifier $(\exp(3x))^5 \times (\exp(x))^4$.
2. Résoudre $\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + 1 = 0$.
3. Résoudre $\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x + 1 = 0$.
4. Résoudre $\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + 3 = 0$.
5. Montrer que $f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$ est impaire.

Réponses

1. $(\exp(3x))^5 \times (\exp(x))^4 = \exp(15x) \times \exp(4x) = \exp(19x)$.
2. $\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + 1 = 0 \iff (\mathrm{e}^x)^2 - 2\mathrm{e}^x + 1 = 0$ et en posant $X = \mathrm{e}^x$ on obtient :
   $X^2 - 2X + 1 = 0$ soit $(X-1)^2 = 0$ ou encore $X = 1$.
   On doit donc résoudre $\mathrm{e}^x = 1$ qui donne $x = 0$.
3. Même principe mais on obtient $\mathrm{e}^x = -1$ ce qui est impossible car on a démontré que pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\mathrm{e}^x > 0$. Donc cette équation n'a pas de solution.
4. Même principe, on obtient $X^2 - 2x + 3 = 0$; pas de solution évidente : on calcule $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -8 < 0$ donc pas de solution non plus.
5. L'ensemble de définition de f est $\mathbf{R}$ car le dénominateur ne s'annule pas et la fonction exp est définie sur $\mathbf{R}$.
   Pour $x \in \mathbf{R}$, on a : $f(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{\mathrm{e}^{-x}+1} = \frac{(\mathrm{e}^{-x}-1)\times\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^{-x}+1)\times\mathrm{e}^x} = \frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = -f(x)$
   Donc f est bien impaire.

9.2.2 Étude de la fonction exponentielle

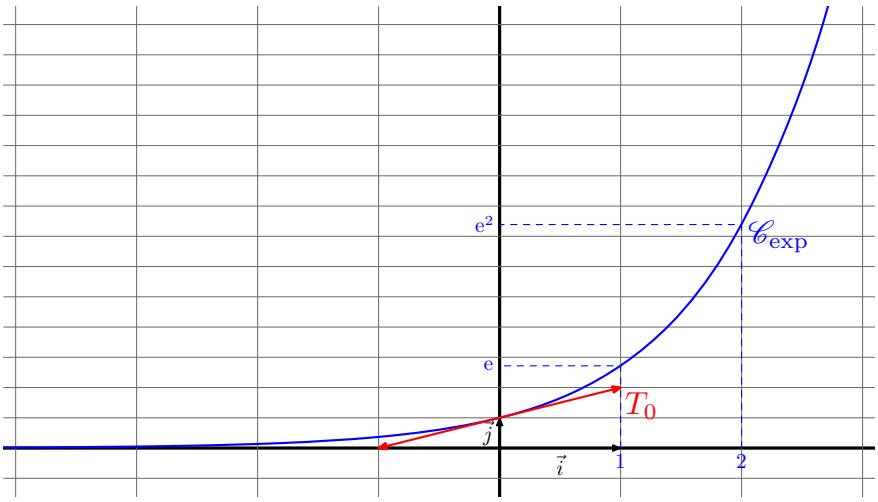
Variations :
La fonction exponentielle est, par définition, définie et dérivable sur $\mathbf{R}$.

 CC BY NC SA

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ (par définition et d'après la propriété 9.1) ; donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbf{R}$. On obtient donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$		$+$	
$\exp$		$\nearrow$	1	$\nearrow$	

Courbe représentative (attention, le repère n'est pas orthonormé) :



9.2.3 Application : équations - inéquations

Propriété 9.3
Soit x et y deux réels.

$$e^x = e^y \iff x = y \quad \text{et} \quad e^x < e^y \iff x < y$$

À savoir...
Résoudre :

$$e^x - e^{-x} = 0, \quad e^x - e^2 > 0, \quad e^{2x+3} - 2e^{x+7} + e^{11} = 0, \quad e^{x^2+2} < \left(e^{(x+4)}\right)^2$$

Résolutions :

$$\begin{aligned} e^x - e^{-x} = 0 &\iff e^x = e^{-x} \\ &\iff x = -x \\ &\iff 2x = 0 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^x - e^2 > 0 &\iff e^x > e^2 \\ &\iff x > 2 \end{aligned}$$

 CC BY NC SA

$$\begin{aligned}
e^{2x+3} - 2e^{x+7} + e^{11} = 0 &\iff e^3\left(e^{2x} - 2e^{x+4} + e^8\right) = 0 \\
&\iff (e^x)^2 - 2e^x e^4 + \left(e^4\right)^2 = 0 \\
&\iff \left(e^x - e^4\right)^2 = 0 \\
&\iff e^x = e^4 \\
&\iff x = 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{x^2+2} < \left(e^{x+4}\right)^2 &\iff e^{x^2+2} < e^{2x+8} \\
&\iff x^2 + 2 < 2x + 8 \\
&\iff x^2 - 2x - 6 < 0
\end{aligned}$$

On calcule $\Delta = 28 > 0$ donc deux racines : $\alpha = 1 - \sqrt{7}$ et $\beta = 1 + \sqrt{7}$. Finalement la dernière inéquation équivaut à $x \in]\alpha\,;\,\beta[$.

9.2.4 Composée avec une fonction affine

Théorème 9.2 (admis)
Soit u une fonction affine déinie par $u(x) = ax + b$. Soit $f : x \mapsto e^{u(x)}$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour $x \in \mathbf{R}$ on a $f'(x) = ae^{u(x)} = ae^{ax+b}$.

À savoir...
Étudier la dérivabilité de la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = e^{3x-1}$.
Résolution :
f est la composée d'une fonction affine suivie de l'exponentielle donc elle est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour $x \in \mathbf{R}$, on a :

$$f'(x) = 3e^{3x-1}$$

 CC BY NC SA

Exercices

Exercice 9.1
Calculer en donnant la réponse sous la forme e^a avec $a \in \mathbf{R}$:

$$A = \frac{e^{-3} \times e^{7}}{e^{-2}}; \qquad B = \left(e^{4}\right)^{-3}; \qquad C = \frac{e^{5-2} \times e}{e^{4}}$$

Exercice 9.2
Étudier le signe de $e^{2x} - e^{x+\frac{1}{2}}$.

Exercice 9.3 (6 points)
Une entreprise pharmaceutique fabrique un soin antipelliculaire. Elle peut produire entre 200 et 2 000 litres de produits par semaine. Le résultat, en dizaine de milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x centaines de litres est donné par la fonction R définie par :

$$R(x) = (5x - 30)e^{-0,25x}, \text{ pour } x \in [2; 20]$$

1. Justifier que $x \in [2; 20]$.
2. Calculer le résultat réalisé pour la fabrication et la vente de 7 centaines de litres de produit. On donnera cette valeur arrondie à l'euro près.
3. Vérifier que pour 400 litres de produit fabriqué et vendu, l'entreprise réalise un déficit (c'est-à-dire un résultat négatif).
4. Résoudre l'équation $R(x) \geq 0$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
5. On note R' la dérivée de R sur $[0; 20]$.
   a. Montrer que $R'(x) = (-1,25x + 12,5)e^{-0,25x}$.
   b. En déduire la quantité de produit à fabriquer et vendre pour obtenir un résultat maximal. On donnera le résultat arrondi au litre près.

Les corrigés de ce chapitre commencent à la page 67.

 CC BY NC SA

Chapitre 10

Variables aléatoires réelles

10.1 Variable aléatoire

Définition 10.1
Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. Si à chaque éventualité e_i de Ω on associe un réel x_j on dit qu'on définit une *variable aléatoire* sur Ω. Ainsi une variable aléatoire est une fonction définie sur Ω.

Remarque 10.1
Soit X une variable aléatoire associée à une expérience aléatoire. Cette variable aléatoire permet de définir des événements. Par exemple :

- $(X = 5)$ est l'événement réalisé lorsque, à l'issue de l'expérience, la valeur de la variable est 5 ;
- $(X \leq 10)$ est l'événement réalisé lorsque, à l'issue de l'expérience, la valeur de la variable est inférieure ou égale à 10.

Définition 10.2
Soit Ω un univers lié à une expérience aléatoire et soit X une variable aléatoire sur Ω prenant pour valeurs $x_1, \ldots, x_n$. La loi de probabilité de la variable X est la fonction qui à chaque x_i associe la probabilité que la variable prenne cette valeur ; probabilité qu'on note $p(X = x_i)$.

10.2 Paramètres d'une variable aléatoire

10.2.1 Définitions

Définition 10.3
L'*espérance*, notée $E(X)$, la *variance*, notée $V(X)$ et l'*écart-type*, noté $\sigma(X)$ de la variable X sont

 CC BY NC SA

respectivement les espérance, variance et écart-type de la loi de X (en notant $p_i = p(X = x_i)$) :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i; \quad V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(X)\right)^2; \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

10.2.2 Propriétés

Propriété 10.1
Soit X une variable aléatoire et soient a et b deux réels. Alors on a :

$$E(aX + b) = aE(X) + b \quad \text{et} \quad V(aX) = a^2 V(X)$$

Propriété 10.2 (application)
Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$. Alors on a :

$$V(X) = E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2$$

 CC BY NC SA

Exercices

Exercice 10.1
On lance un dé à six faces. Si le résultat est 6, on gagne 2 €; si le résultat est pair et inférieur strictement à 6 on ne gagne ni ne perd rien; sinon on perd 1 €.
Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique[1] du joueur.

1. Donner pour chaque issue de l'expérience la valeur de X.
2. Donner la loi de X.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 10.2
Une personne propose un jeu d'argent avec un dé truqué à six faces tel que :

Face	1	2	3	4	5	6
Probabilité		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{48}$

Chaque partie coûte 5 €. Un six rapporte 50 €, un quatre ou un cinq rapportent 20 € et un trois rapporte 10 €. Les autres chiffres sont perdants.

1. Justifier que la probabilité d'obtenir le « un » est égale à $\frac{1}{2}$.
2. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique d'une partie (en tenant compte du prix de la partie). Dresser le tableau de la loi de X.
3. Calculer l'espérance de X. Ce jeu est-il équitable ?

Exercice 10.3
On considère la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau ci-dessous :

Valeur x_i	2	5	10	100
$P(X = x_i)$	0,4	0,3	0,2	0,1
$x_i - E(X)$				

1. a. Calculer $E(X)$ et compléter la ligne vide du tableau.
   b. Calculer $V(X)$ en arrondissant au dixième.
2. Une deuxième variable aléatoire Y a pour paramètres $E(Y) = 14{,}3$ et pour variance $V(Y) = 100$. Quelle comparaison peut-on faire des deux variables X et Y ?

Les corrigés de ce chapitre commencent à la page 68.

1. C'est-à-dire positif ou négatif.

 CC BY NC SA

Chapitre 11

Équations cartésiennes dans le plan

Dans ce chapitre, le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

11.1 Droites du plan

11.1.1 Rappel de seconde

À savoir...

Soit $A(1;2)$ et $B(-2;3)$ deux points dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Déterminer une équation de la droite (AB).

Soit $M(x;y)$ un point du plan. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $(-3;1)$ et les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ sont $(x-1;y-2)$.

$$\begin{aligned} M \in (AB) &\iff A, B \text{ et } M \text{ sont alignés} \\ &\iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AM} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff -3(y-2)-1(x-1)=0 \text{ (Théorème de seconde)} \\ &\iff -3y+6=x-1 \end{aligned}$$

Ainsi l'équation réduite de (AB) est $y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$.

Remarque 11.1

Soit d une droite d'équation $ax+by=c$. Le vecteur de coordonnées $\vec{u}(-b;a)$ est un vecteur directeur de d.

11.1.2 Vecteur normal à une droite

Définition 11.1

Soit d une droite du plan et $\vec{n}$ un vecteur non nul du plan. On dit que $\vec{n}$ est un *vecteur normal* à d si la direction de $\vec{n}$ et celle de d sont orthogonales.

 CC BY NC SA

Propriété 11.1
Le plan est muni d'un repère orthonormal. Soit d une droite du plan.
Le vecteur $\vec{n}(a;b)$ est un vecteur normal de d si et seulement si il existe $c \in \mathbf{R}$ tel qu'une équation de d est $ax + by + c = 0$.

À savoir...
Soit $A(2;-3)$, $B(-1;2)$ et $C(3;5)$ dans un repère orthonormal. Déterminer une équation de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
On note h cette hauteur ; elle admet $\overrightarrow{BC}$ pour vecteur normal et passe par A. On a $\overrightarrow{BC}(4;3)$ et $\overrightarrow{AM}(x-2;y+3)$.

$$\begin{aligned} M \in h &\iff \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BC} \\ &\iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ &\iff 4(x-2) + 3(y+3) = 0 \\ &\iff 4x + 3y + 1 = 0 \end{aligned}$$

11.1.3 Propriétés

Dans la suite, on considère deux droites d et d' de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ et de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$.

Propriété 11.2

On a :

$$\begin{aligned} d//d' &\iff \vec{u} \text{ et } \vec{u'} \text{ colinéaires} \\ &\iff \vec{n} \text{ et } \vec{n'} \text{ colinéaires} \\ &\iff \vec{u} \text{ et } \vec{n'} \text{ orthogonaux} \\ &\iff \vec{u'} \text{ et } \vec{n} \text{ orthogonaux} \end{aligned}$$

Et de même :

$$\begin{aligned} d \perp d' &\iff \vec{u} \text{ et } \vec{u'} \text{ orthogonaux} \\ &\iff \vec{n} \text{ et } \vec{n'} \text{ orthogonaux} \\ &\iff \vec{u} \text{ et } \vec{n'} \text{ colinéaires} \\ &\iff \vec{u'} \text{ et } \vec{n} \text{ colinéaires} \end{aligned}$$

11.1.4 Application : projeté orthogonal

À savoir...
Prenons par exemple $d : 4x - 3y + 1 = 0$ et $M(9;4)$.

Un vecteur normal à d est $\vec{u}(4;-3)$. Ce vecteur est un vecteur directeur de (MH). Donc $(MH) : 3x + 4y + c' = 0$.
Or $M(9;4) \in (MH)$ donc $3 \times 9 + 4 \times 4 + c' = 0$ donc $c' = -43$.
Finalement, les coordonnées de H sont solution du système : $\begin{cases} 4x - 3y = -1 \\ 3x + 4y = -43 \end{cases}$
En le résolvant, on obtient $H(5;7)$.

 CC BY NC SA

11.2 Cercles du plan

Propriété 11.3
Le cercle de centre A et de rayon R a pour équation cartésienne :

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$$

Propriété 11.4
Soit A et B deux points distincts dans le plan. L'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

À savoir...
Dans un repère orthonormé, on donne $A(3;2)$ et $B(-1;4)$. Déterminons l'équation du cercle de diamètre $[AB]$:

$$\begin{aligned}
M(x;y) \in \mathscr{C}_{[AB]} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \\
&\Leftrightarrow (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0 \\
&\Leftrightarrow (x - 3)(x + 1) + (y - 2)(y - 4) = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 + y^2 - 6x + 8 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x - 1)^2 - 1 - 3 + (y - 3)^2 - 9 + 8 = 0 \quad \text{(Mise sous forme canonique)} \\
&\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 5
\end{aligned}$$

Donc le cercle de diamètre $[AB]$ a pour centre $\Omega(1;3)$ et pour rayon $r = \sqrt{5}$.

À savoir...
Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan qui vérifient : $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$. Montrer que $\mathscr{C}$ est un cercle dont on déterminera les coordonnées du centre et le rayon.

$$\begin{aligned}
M(x;y) \in \mathscr{C} &\iff (x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2) - 4 + (y^2 - 2 \times y \times 3 + 3^2) - 9 + 4 = 0 \\
&\iff (x + 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 - 3 = 0 \\
&\iff (x - (-2))^2 + (y - 3)^2 = 4^3
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $\Omega(-2;3)$ et de rayon 4.

11.3 Paraboles d'axe vertical

Propriété 11.5
L'ensemble des points $M(x;y)$ dont les coordonnées vérifient $y = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$ et b et c deux réels, est une parabole de sommet S d'abscisse $-\frac{b}{2a}$ et d'axe parallèle à $\left(O;\vec{j}\right)$.

 CC BY NC SA

Exercices

Exercice 11.1
Cet exercice est constitué de plusieurs questions type « cours » indépendantes les unes des autres. Pour chaque question, on se place dans un repère orthonormé.

1. On considère les points $A(4;2)$ et $B(2;6)$. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[AB]$.
2. Déterminer une équation de l'axe de symétrie de la parabole d'équation $y = x^2 + x + 3$.
3. On considère la droite d_1 d'équation $3x - 4y + 1 = 0$ et le point $C(1;1)$. Déterminer une équation de la droite d_2 perpendiculaire à d_1 passant par C.
4. On considère les droites $d_3 : 2x - y + 5 = 0$ et $d_4 : -4x + 2y + 7 = 0$. Déterminer la position relative de ces droites.

Exercice 11.2 (6 points)
Dans un repère orthonormé du plan, on donne $B(-2;-1)$ et $C(4;7)$.
On considère le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[BC]$.

1. Déterminer une équation de la droite (BC).
2. Montrer qu'une équation du cercle $\mathscr{C}$ est :
$$x^2 + y^2 - 2x - 6x - 15 = 0$$
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection du cercle avec les axes du repère (4 points à trouver dont un qui est $D(5;0)$).
4. Déterminer une équation de la tangente au cercle $\mathscr{C}$ au point $D(5;0)$.
5. Montrer que l'ensemble $\mathscr{E}$ d'équation $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 20$ est un cercle dont on donnera les coordonnées du centre et le rayon.

Exercice 11.3
Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan qui vérifient : $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.

1. Montrer que $\mathscr{C}$ est un cercle dont on déterminera les coordonnées du centre et le rayon.
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec la droite d'équation $y = 1$. On notera A celui dont l'abscisse est la plus grande.
3. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A.

Exercice 11.4
Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $x^2 + x - 2y - 4 = 0$.

1. Déterminer la nature précise de $\mathscr{P}$.
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{P}$ avec la droite d'équation $y = 4$. On note A celui qui a la plus grande abscisse.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{P}$ au point A.

Les corrigés de ce chapitre commencent à la page 69.

 CC BY NC SA

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1.1.

$$f(x) = 2(x-4)^2 + 5; \qquad g(x) = -3\,(x+2)^2 + 16; \qquad h(x) = \frac{3}{2}\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}$$

Corrigé de l'exercice 1.2.
$(E_1) : \mathscr{S} = \left\{-2; \frac{3}{2}\right\}$; $(E_2) : \mathscr{S} = \emptyset$; $(E_3) : \mathscr{S} = \{3\}$; $(E_4) : \mathscr{S} = \left\{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}; 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right\}$

Corrigé de l'exercice 2.1.
$u_0 = 1$, $u_1 = 4$, $u_2 = 7$, $u_3 = 10$ et $u_4 = 13$.
$v_0 = 0$, $v_1 = \frac{1}{2}$, $v_2 = \frac{2}{3}$, $v_3 = \frac{3}{4}$ et $v_4 = \frac{4}{5}$.
$w_0 = -1$, $w_1 = 0$, $w_2 = -1$, $w_3 = -4$ et $w_4 = -9$.

Corrigé de l'exercice 2.2.
$u_0 = 2$, $u_1 = 7$, $u_2 = 22$, $u_3 = 67$ et $u_4 = 202$.
$v_0 = 2$, $v_1 = \frac{2}{3}$, $v_2 = \frac{2}{5}$, $v_3 = \frac{2}{7}$ et $v_4 = \frac{2}{9}$.
$w_0 = 2$, $w_1 = -1$, $w_2 = -4$, $w_3 = -25$ et $w_4 = -676$.

Corrigé de l'exercice 2.3.

1. $u_9 = u_0 + (9-0) \times 3 = 25$ et $u_{99} = u_0 + 99 \times 3 = 295$.
2. $v_5 = 1 + 5 \times (-2) = -9$ et $v_{20} = -39$.
3. $w_6 = -1 + 5 \times 5 = 24$ et $w_{30} = -1 + 29 \times 5 = 144$.

Corrigé de l'exercice 2.4.

1. $r = u_1 - u_0 = 1{,}5$ et pour $n \in \mathbf{N}$ on a $u_n = 2 + 1{,}5n$.
2. $v_9 = v_5 + (9-5) \times r$ donc $r = \frac{v_9 - v_5}{4} = 3$. Donc pour $n \in \mathbf{N}$ on a $v_n = v_5 + (n-5) \times 3 = -13 + 3n$.
3. De même, $r = \frac{6}{5}$, $w_0 = 2$ et $w_n = 2 + \frac{6}{5} \times n$ pour $n \in \mathbf{N}$.

Corrigé de l'exercice 2.5.
Pour les suites u et v : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_9 = \frac{10(u_0 + u_9)}{2}$ donc :
$S_u = 115$, $S_v = -80$.
Pour la suite w : $S_w = \frac{10 \times (w_1 + w_{10})}{2} = 240$.

Corrigé de l'exercice 2.6.

1. $u_4 = u_0 \times 2^{4-0} = 16$ et $u_{11} = u_0 \times q^{11} = 2048$.
2. $v_4 = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 8$ et $v_{11} = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \frac{1}{16}$.
3. $w_4 = w_1 \times q^{4-1} = 1$ et $w_9 = w_1 \times q^8 = 243$.

 CC BY NC SA

Corrigé de l'exercice 2.7.

1. On a $u_{10} = u_3 \times q^{10-3}$ donc $q^7 = \frac{307,2}{2,4} = 128$. On cherche un nombre q tel que $q^7 = 128$; avec la touche $\sqrt[y]{x}$ de la calculatrice, on obtient $q = 2$. Ainsi, $u_3 = u_0 \times 2^3$ et donc $u_0 = \frac{2,4}{8} = 0,3$ et finalement, pour $n \in \mathbf{N}$ on a $u_n = 0,3 \times 2^n$.
2. De même on a $v_6 = v_2 \times q^{6-2}$ donc $q^4 = \frac{0,04}{25} = 0,001\,6$. Donc $q = 0,2$. De plus, $v_2 = v_0 \times 0,2^2$ donc $u_0 = \frac{25}{0,2^2} = 625$.

Corrigé de l'exercice 2.8.
On a $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \frac{u_0 - q \times u_4}{1-q} = \frac{1-2\times 2^4}{1-2} = 31$.
De même, $v_0 + \ldots v_4 = 248$ et $w_1 + \ldots w_5 = \frac{121}{27}$.

Corrigé de l'exercice 2.9.

1. $u_1 = \frac{2}{3} \times 2 + 1 = \frac{7}{3}$ et de même, $u_2 = \frac{23}{9}$, $u_3 = \frac{73}{27}$.
2. On a $u_1 - u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_2 - u_1 = \frac{2}{9}$ donc u n'est pas arithmétique.
   De même, $\frac{u_1}{u_0} = \frac{7}{6}$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{23}{21}$ donc u n'est pas géométrique.
   Attention : cette méthode n'est à utiliser que pour montrer qu'une suite *n'est pas* arithmétique ou géométrique (on écrit un *contre-exemple*) ; si on avait trouvé que $uu_2 - u_1 = u_1 - u_0$ on n'aurait pas pu conclure que la suite est arithmétique.
3. a. $v_0 = u_0 - 3 = -1$ et de même, $v_1 = u_1 - 3 = -\frac{2}{3}$ et $v_2 = u_2 - 3 = -\frac{4}{9}$. On peut conjecturer que v est géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
   b. Montrons la conjecture précédente. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a :
   $$v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{2}{3}u_n + 1 - 3 = \frac{2}{3}u_n - 2 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3} \times 3 = \frac{2}{3}(u_n - 3) = \frac{2}{3}v_n$$
   Donc v est bien géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = -1$.
   c. On a donc pour $n \in \mathbf{N}$, $v_n = (-1) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
4. On a pour $n \in \mathbf{N}$, $v_n = u_n - 3$ donc $u_n = v_n + 3 = 3 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
5. On a donc $u_8 = 3 - \left(\frac{2}{3}\right)^8 = \frac{19\,427}{6\,561}$.

Corrigé de l'exercice 2.10.
Pour étudier les variations de (v_n), on va calculer $v_{n+1} - v_n$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (v_n)^2 + 3v_n + 1 - v_n \\ &= (v_n)^2 + 2v_n + 1 \\ &= (v_n + 1)^2 \geq 0, \text{ pour } n \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

Donc la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

 CC BY NC SA

Corrigé de l'exercice 3.1.
On note respectivement EV, PV et DV les événements « prendre une entrée végétarienne », « prendre un plat végétarien » et « prendre un dessert végétarien ».
On note V l'événement « le repas est entièrement végétarien ».

1. Le repas est entièrement végétarien si on répète successivement les événements EV, PV et DV. On a donc :
$$p(V) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{9}}$$
2. Dans, ce cas, on calcule $p_{EV}(V) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{6}}$.
3. On calcule $p(EV \cup PV) = p(EV) + p(PV) - p(EV \cap PV) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \boxed{\frac{7}{9}}$.

Corrigé de l'exercice 3.2.

Attention, ici on demanddait un tableau de probabilités *et non pas d'effectifs. À part la notation de la dernière question, c'est de niveau seconde.*

1. $p(F) = \frac{26}{40} = \boxed{0{,}65}$ et $p(S) = \frac{16}{40} = \boxed{0{,}4}$.
2. $F \cap S$ est l'événement : « le jeune choisi est une fille pratiquant le ski ».
   On a donc $p(F \cap S) = \frac{10}{40} = \boxed{0{,}25}$.
3.

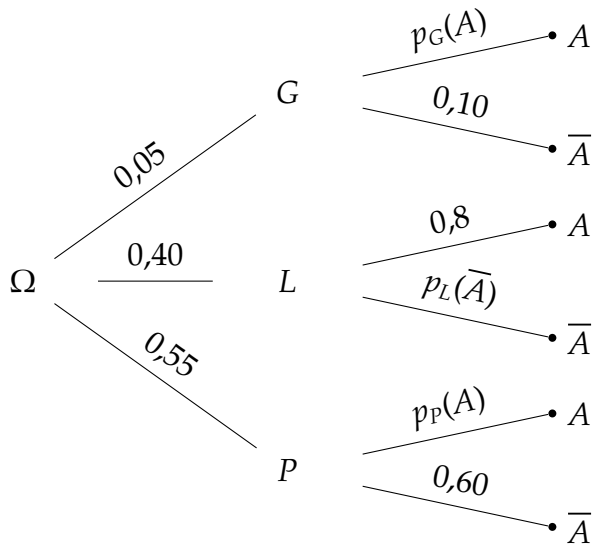
	Ski	Patinage	Total
Filles	0,25	0,4	0,65
Garçons	0,15	0,2	0,35
Total	0,4	0,6	1

4. $F \cup S$ est l'événement : « le jeune choisi est une fille ou il pratique le ski (ou les deux) »
   On a : $p(F \cup S) = p(F) + p(S) - p(F \cap S) = \boxed{0{,}8}$.
5. L'univers est désormais l'ensemble des filles.
   La probabilité cherchée est donc $p_F(S) = \frac{10}{26} = \boxed{\frac{5}{13}}$.

Corrigé de l'exercice 3.3.

1. a. En relisant l'énoncé :
   — « 60 % des propriétaires habitent une maison individuelle » donc $\boxed{p_P(\overline{A}) = 0{,}6}$;
   — « 80 % des locataires habitent un appartement » donc $\boxed{p_L(A) = 0{,}8}$;
   — « et enfin 10 % des occupants à titre gratuit habitent une maison individuelle » donc $\boxed{p_G(\overline{A}) = 0{,}1}$.
   b. L'arbre avec uniquement les probabilités données dans l'énoncé :

 CC BY NC SA



2. On cherche $p(P \cap A) = p_P(A) \times p(P) = (1 - 0{,}6) \times 0{,}55 = \boxed{0{,}22}$.
3. On calcule $p(A) = p(A \cap P) + p(A \cap L) + p(A \cap G)$ en utilisant la formule des probabilités totales car les événements V, B et R forment une partition de l'univers. Et en calculant les probas comme dans la question précédentes on obtient $p(A) = 0{,}22 + 0{,}40 \times 0{,}8 + 0{,}05 \times 0{,}9 = \boxed{0{,}585}$.
4. On calcule $p_A(P) = \frac{p(A \cap P)}{p(A)} = \frac{0{,}22}{0{,}585} \approx \boxed{0{,}376}$.

Corrigé de l'exercice 3.4.

Lecture de tableau : ici les probabilités conditionnelles se lisent par colonne (si on sait que l'élève fait une langue précise) ou par ligne (si on connait son activité Latin ou Théâtre) : bien penser à changer l'ensemble de référence donc le dénominateur de la fraction est le total de la ligne ou de la colonne !

On note chaque événement par l'initiale du mot qui le caractérise (I est l'événement « l'élève fait de l'italien » par exemple).

1.

	Italien	Allemand	Russe	Total
Latin	40	30	10	80
Théâtre	140	90	10	240
Total	180	120	20	320

2. a. On calcule $p(I \cap T) = \dfrac{140}{320} = \boxed{\dfrac{7}{16}}$ $(= 0{,}437\,5)$.

   b. On calcule $p_L(I) = \dfrac{40}{80} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$.

   c. On calcule $p(\overline{A} \cap \overline{T}) = p(L \cap I) + p(L \cap R) = \dfrac{50}{320} = \boxed{\dfrac{5}{32}}$ $(= 0{,}156\,25)$.

3. a. On calcule d'une part $p(L \cap A) = \dfrac{30}{320} = \boxed{\dfrac{3}{32}}$

   et d'autre part $p(L) \times p(A) = \dfrac{80}{320} \times \dfrac{120}{320} = \boxed{\dfrac{3}{32}}$.

   On a donc $p(A \cap L) = p(A) \times p(L)$ donc A et L sont indépendants.

b. De même :
$p(T \cap R) = \frac{1}{32}$ et $p(T) \times p(R) = \frac{3}{64}$. Cette fois $p(T \cap R) \neq p(T) \times p(R)$ donc les événements T et R ne sont pas indépendants.

Corrigé de l'exercice 4.1.
L'expression de $f(x)$ est donnée sous forme canonique.
Le coefficient $a = -2 < 0$ donc f est croissante puis décroissante.
De plus le maximum est $\beta = 5$ atteint pour $\alpha = -3$ donc :

x	-5		-3		5
f	-3	$\nearrow$	5	$\searrow$	-123

Corrigé de l'exercice 4.2.

1. $f(x) = (x-4)^2 + 1$.
2. $$x \xrightarrow{-4} x-4 \xrightarrow{X \mapsto X^2} (x-4)^2 \xrightarrow{+1} f(x)$$
3. Soit a et b dans $[0\,;\,4]$ tels que $a < b$; alors :

on a	$0 \leq a < b \leq 4$	on soustrait 4 :
donc	$-4 \leq a-4 < b-4 \leq 0$	or la fonction carré est décroissante sur $\mathbf{R}_-$
alors	$(a-4)^2 > (b-4)^2$	on ajoute 1
donc	$f(a) > f(b)$	

De même, la fonction f est décroissante sur $[0\,;\,4]$
4. La fonction f est donc croissante sur $[4\,;\,7]$ d'après l'énoncé. On a donc :

x	0		4		7
f	17	$\searrow$	1	$\nearrow$	10

Corrigé de l'exercice 4.3.

1. $f(x) = g(x)$ pour $x \in \{-5; 2\}$.
$f(x) = h(x)$ pour $x \in \{-7; 2; 7\}$.
$g(x) = h(x)$ pour $x \in \{-2; 2\}$.
2. $f(x) < g(x)$ pour $x \in]-5; 2[\cup]-2; 7]$.
$f(x) \leq g(x)$ pour $x \in]-5; 7]$.
3. a.
b. $(AB) : y = -\frac{4}{5}x + \frac{13}{5}$.
c. $m(x) = -\frac{4}{5}x + \frac{13}{5}$.
d. $h(x) = m(x)$ pour $x \in \{-1; 2; 7\}$.
e. $h(x) \geq m(x)$ pour $x \in [-1; 2] \cup \{7\}$.

 CC BY NC SA

Corrigé de l'exercice 4.4.
1ab ; 2d ; 3cd ; 4bc ; 5bd ; 6bc ; 7b ;

Corrigé de l'exercice 5.1.

$$f'(x) = 9x^2-10x+6; \qquad g'(x) = -\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}+1, x > 0; \qquad h(x) = 2x(2x^3-x+7)+(x^2+3)(6x^2-1)$$

$$p'(x) = \frac{-2x^2-6x-10}{(x^2-5)^2}, x \notin \left\{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right\}; \qquad q'(x) = \frac{12x}{(x^2+1)^2}$$

$$r'(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{8x}{x^4} = \frac{2x-8}{x^3}, x \neq 0$$

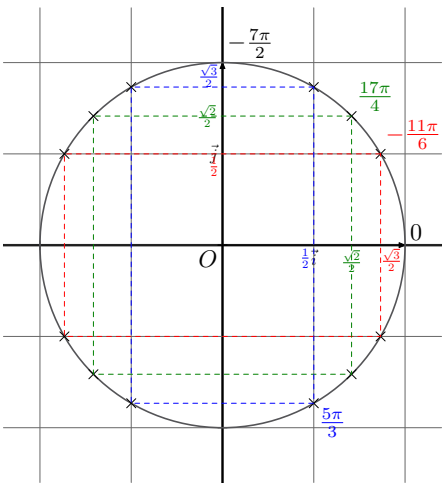
Corrigé de l'exercice 5.2.
$T_3 : y = f'(3)(x-3) + f(3)$ donc $T_3 : y = -2x + 11$.

Corrigé de l'exercice 5.3.
Soit $a \in \mathbf{R}$, on a $T_a // \delta \iff f'(a) = 1$ (mêmes coefficients directeurs). Il suffit donc de résoudre $f'(x) = 1$.
Or, pour $x \in \mathbf{R}$ on a $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$. Donc $f'(x) = 1$ pour $x = 0$ ou $x = \frac{2}{3}$.
Ainsi, $\mathscr{C}$ a deux points où la tangente est parallèle à δ aux abscisses 0 et $\frac{2}{3}$.

Corrigé de l'exercice 5.4.

1. $f'(x) = 3x^2 - 24x + 36$
2. $T_4 : y = -12x + 64$
3. $\mathscr{C}_f$ est au dessus de T si $x > 4$.
   $\mathscr{C}_f$ est en dessous de T si $x < 4$.

Corrigé de l'exercice 6.1.

1. 

2. On a :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \qquad \sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(-\frac{17\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos(17\pi) = -1$$

 CC BY NC SA

Corrigé de l'exercice 6.2.

1. La fonction f est définie sur $\mathbf{R}$ et pour $x \in \mathbf{R}$, on a :

$$f(-x) = 2\cos(-2x) + 1 = 2\cos(2x) + 1 = f(x)$$

   Donc f est une fonction $\boxed{\text{paire}}$: sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2. Pour $x \in \mathbf{R}$, on a :

$$f(x+\pi) = 2\cos(2(x+\pi)) + 1 = 2\cos(2x+2\pi) + 1 = 2\cos(2x) + 1 = f(x)$$

   Donc f est bien $\boxed{\pi\text{-périodique}}$: sa représentation graphique se reproduit identique à elle-même par translations de vecteur $\pi\vec{i}$.

3. D'après la question 2, il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur π : par exemple $\boxed{\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]}$.
   D'après la question 1, la moitié de l'intervalle précédent suffit, puisque la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. L'intervalle $\boxed{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]}$ suffit.

4. On a :

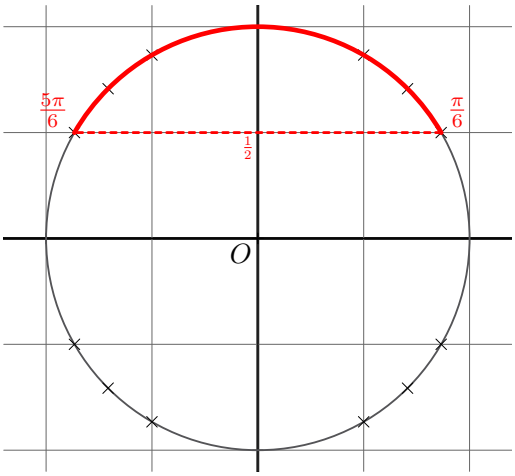
$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff 2\cos(2x) = -1 \\ &\iff \cos(2x) = -\frac{1}{2} \\ &\iff 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z} \\ &\iff x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z} \end{aligned}$$

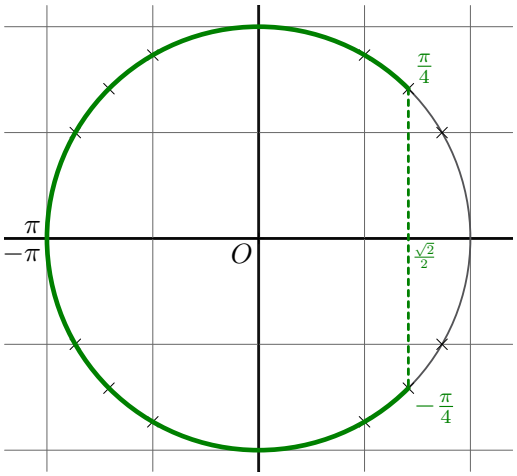
   Or on cherche les solutions dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc la seule solution est $\boxed{\frac{\pi}{3}}$.

Corrigé de l'exercice 6.3.

1. a. En ajoutant 1 puis en divisant par 2 les deux membres de l'inéquation, on obtient le résultat demandé.
   b. Voir en rouge sur la figure ci-dessous.
   c. $\mathscr{S} = \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$.
2. En représentant en vert (voir figure ci-dessous), on obtient :
   $\mathscr{S} = \left]-\pi; -\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}; \pi\right]$.

 CC BY NC SA





Corrigé de l'exercice 7.1.

1. $f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$
2. On calcule $\Delta = 64 > 0$ donc deux racines : $x_1 = -\frac{2}{3}$ et $x_2 = 2$.
   — $f'(x) > 0$ sur $]-\infty; -\frac{2}{3}[$ et sur $]2; +\infty[$ donc f est croissante sur ces intervalles ;
   — $f'(x) < 0$ sur $]-\frac{2}{3}; 2[$ donc f est décroissante sur cet intervalle.
3.

x	-2		$-\frac{2}{3}$		2		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	-7	$\nearrow$	$\frac{67}{27}$	$\searrow$	-7	$\nearrow$	56

4. Le minimum de f est -7 atteint en $x = 2$ et $x = -2$. Son maximum est 56 atteint en $x = 5$.

Corrigé de l'exercice 7.2.

1. $f(x)$ existe SSI $x + 1 \neq 0$ donc $\mathscr{D}_f = \mathbf{R}\backslash\{-1\}$.
2. $M(x; y) \in \mathscr{C} \cap (Oy)$ SSI $x = 0$ et $y = f(x)$ donc un seul point : $A(0; 1)$.
   $M(x; y) \in \mathscr{C} \cap (Ox)$ SSI $y = f(x)$ et $y = 0$. On résout donc $f(x) = 0$ soit pour $x \neq -1$, $2x^2 - 3x + 1 = 0$.
   $\Delta = 1 > 0$ donc $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = 1$.
   Finalement, $\mathscr{C}$ coupe (Ox) en $B(\frac{1}{2}; 0)$ et $C(1; 0)$.
3. f est une fonction rationnelle (quotient de deux polynômes) donc elle est dérivable sur son ensemble de définition.
   Pour $x \neq -1$ on a $f'(x) = \frac{(4x-3)(x+1)-(2x^2-3x+1)\times 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+5x-4}{(x+1)^2}$.
4. Le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $2x^2 + 5x - 4$ car $(x + 1)^2 > 0$ (pour $x \neq -1$).

 CC BY NC SA

Ce trinôme a pour $\Delta = 57 > 0$ donc deux racines : $x_1 = \frac{-5-\sqrt{57}}{4} \approx -3{,}14$ et $x_2 = \frac{-5+\sqrt{57}}{4} \approx 0{,}64$. On a donc :

x	$-\infty$		x_1		-1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f		↗		↘	‖	↘		↗	

5. $T_1 : y = f'(1)(x-1) + f(1)$ et on a $f'(1) = \frac{3}{4}$ et $f(1) = 0$ donc $T_1 : y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$.

Corrigé de l'exercice 7.3.
On obtient facilement à l'aide du théorème de Thalès que $PC = \frac{x-x^2}{1+x}$ pour $x \in [0;1]$.
Il reste à étudier les variations de $f : x \mapsto \frac{x-x^2}{1+x}$.
$f'(x) = \frac{-x^2-2x+1}{(1+x)^2}$.
Le maximum est atteint pour $x = \sqrt{2} - 1$.

Corrigé de l'exercice 8.1.

1. En décomposant avec Chasles et en distribuant :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} &= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}\right) \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{DF} \\
&= 0 + 6 \times 3 + 3 \times 6 + 0 \\
&= \boxed{36}
\end{aligned}$$

2. Grâce au théorème de Pythagore, on obtient facilement $AF = AE = \sqrt{45}$, et avec la définition de SPC du produit scalaire, $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = AE \times AF \times \cos\left(\widehat{EAF}\right)$.

   Ainsi, $\cos\left(\widehat{EAF}\right) = \frac{36}{45}$ et donc $\boxed{\widehat{EAF} \approx 36{,}9°}$

Corrigé de l'exercice 8.2.
On a $\overrightarrow{AB}(-5;2)$ et $\overrightarrow{AC}(-6;-4)$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-5) \times (-6) + 2 \times (-4) = 22$.
Par ailleurs $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$ donc :
$\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{22}{\sqrt{29} \times \sqrt{52}}$ et donc $\widehat{BAC} \approx 55{,}5°$

Corrigé de l'exercice 8.3.
On peut remarquer que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ (règle du parallélogramme)
Par ailleurs, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(42°) = 15\cos(42°)$.
Enfin, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(AC^2 - AB^2 - AD^2\right)$.
Ainsi, $AC = \sqrt{2 \times 15\cos(42°) + AB^2 + AD^2} \approx 7{,}5$.

 CC BY NC SA

Corrigé de l'exercice 8.4.
Dans ABC, I est le milieu de $[AC]$. On a donc : $BA^2 + BC^2 = 2BI^2 + \frac{1}{2}AC^2$. Or $BI = \frac{1}{2}BD$; en remplaçant, on obtient :
$AC^2 = 2\left(BA^2 + BC^2 - 2\left(\frac{1}{2}BD\right)^2\right) = 2(7^2 + 5^2 - 2 \times 4^2) = 84$
Donc $AC = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$.

Corrigé de l'exercice 8.6.
$\mathscr{E}$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Corrigé de l'exercice 8.7.
$\mathscr{E}$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par B.

Corrigé de l'exercice 9.1.

$$A = \frac{e^{-3} \times e^{7}}{e^{-2}} = \frac{e^{4}}{e^{-2}} = \boxed{e^{6}}\,; \qquad B = \left(e^{4}\right)^{-3} = \boxed{e^{-12}}\,; \qquad C = \frac{e^{5-2} \times e}{e^{4}} = \frac{e^{3+1}}{e^{4}} = \boxed{e^{0} = 1}$$

Corrigé de l'exercice 9.2.
Il s'agit de résoudre l'inéquation suivante...

$$\begin{aligned} e^{2x} - e^{x+\frac{1}{2}} \geq 0 &\iff e^{2x} \geq e^{x+\frac{1}{2}} \\ &\iff 2x \geq x + \tfrac{1}{2} \\ &\iff x \geq \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

On pourrait alors compléter un tableau de signes en remarquant que l'expression s'annule pour $x = \frac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 9.3.

1. x désigne le nombre centaines de litres et on nous dit que la production est comprise entre 200 et 2 000 litres soit entre 2 et 20 centaines de litres.
2. On cherche $R(7) \approx 0{,}868\,87$ dizaines de milliers d'euros, soit 8 689 €.
3. On cherche $R(4) \approx -3{,}67$ soit un déficit d'environ 36 700 €.
4. On sait que $e^{-0{,}25x} > 0$ pour tout x donc le signe de $R(x)$ est le même que celui de $(5x - 30)$.
   Or $5x - 30 > 0 \iff x > 6$. Donc $R(x)$ est négatif si $x < 6$ et $R(x) > 0$ si $x > 6$ et enfin, $R(6) = 0$.
   Cela signifie que l'entreprise réalisera un bénéfice si elle produit et vend plus de 600 litres de produit.
5. a. $R = u \times v$ avec $u(x) = 5x - 30$ et $v(x) = e^{-0{,}25x}$.
   On a donc $u'(x) = 5$ et $v'(x) = -0{,}25e^{-0{,}25x}$. De plus $(uv)' = u'v + uv'$ donc :

$$R'(x) = 5\times e^{-0{,}25x} + (5x-30)\times(-0{,}25e^{-0{,}25x}) = (5 - 1{,}25x + 7{,}5)\,e^{-0{,}25x} = \boxed{(-1{,}25x + 12{,}5)e^{-0{,}25x}}$$

 CC BY NC SA

b. On sait que $e^{-0,25x} > 0$ donc le signe de $R'(x)$ est le même que celui de $(-1,25x + 12,5)$. Cette expression est une fonction affine décroissante (car $-1,25 < 0$) donc elle est positive puis négative et elle s'annule pour $x = \frac{-12,5}{-1,25} = 10$.
On obtient :

x	2		10		20
$R'(x)$		+	0	−	
R	$R(2)$	↗	$R(10)$	↘	$R(20)$

La quantité à produire pour obtenir un résultat maximal est 10 centaines de litres soit 1 000 litres.

Corrigé de l'exercice 10.1.

1.

Issue	1	2	3	4	5	6
Valeur de X	-1	0	-1	0	-1	2

2. La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée dans le tableau suivant :

Valeur x_i de X	-1	0	2
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

3.

$$E(X) = (-1) \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}; \quad V(X) = \frac{41}{36}; \quad \sigma(X) = \frac{\sqrt{41}}{6}$$

Corrigé de l'exercice 10.2.

1. La somme des probabilités est égale à 1 donc $p(1) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{48}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$.

2. Les valeurs possibles pour X sont : -5, 5, 15 et 45. En regroupant dans un tableau, on obtient :

Valeur x_i	-5	5	15	45
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{48}$

Par exemple $P(X = 15) = P(\text{dé} = 4) + P(\text{dé} = 5) = \frac{1}{24} + \frac{1}{48} = \frac{3}{48} = \frac{1}{16}$.

3. $E(X) = -5 \times \frac{5}{6} + 5 \times \frac{1}{12} + 15 \times \frac{1}{16} + 45 \times \frac{1}{48} = -\frac{90}{48} = \boxed{-\frac{15}{8} = -1,875}$.

Ce jeu n'est pas équitable car l'espérance n'est pas égale à 0. Il est défavorable au joueur qui perdra en moyenne 1,875 € à chaque partie.

 CC BY NC SA

Corrigé de l'exercice 10.3.

1. a. $E(X) = 0{,}4 \times 2 + 0{,}3 \times 5 + 0{,}2 \times 10 + 0{,}1 \times 10 = \boxed{14{,}3}$.

Valeur x_i	2	5	10	100
$P(X = x_i)$	0,4	0,3	0,2	0,1
$x_i - E(X)$	−12,3	−9,3	−4,3	85,7

   b. Par définition :
   $V(X) = 0{,}4 \times (-12{,}3)^2 + 0{,}3 \times (-9{,}3)^2 + 0{,}2 \times (-4{,}3)^2 + 0{,}1 \times 85{,}7^2 \approx \boxed{824{,}6}$

2. Les deux variables ont la même espérance mais X a une variance beaucoup plus élevée que Y ce qui signifie que les valeurs prises par Y ont moins de chances de s'éloigner de la valeur de l'espérance.

Corrigé de l'exercice 11.1.

1. La médiatrice δ de $[AB]$ est la droite qui coupe ce segment permendiculairement en son milieu I.
   On a $x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = 3$ et $y_I = \frac{2+6}{2} = 4$. Ainsi :
$$\begin{aligned} M(x;y) \in \delta &\iff (IM) \perp (AB) \\ &\iff \overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{AB} \\ &\iff \overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-4 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \boxed{-2x + 4y - 10 = 0} \end{aligned}$$

2. $y = x^2 + x + 3$ est l'équation d'une parabole d'axe vertical et de sommet S d'abscisse $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2\times 1} = -\frac{1}{2}$.
   L'équation réduite de l'axe de symétrie de la parabole est donc $\boxed{x = -\frac{1}{2}}$.

3. Un vecteur directeur de d_1 est $\vec{u}(-b;a)$ soit $\vec{u}(4;3)$.
   Ainsi, d_2 est la droite passant par C de vecteur normal $\vec{u}$. Elle admet donc une équation du type $4x + 3y + c = 0$. Et puisque $C(1;1) \in d_2$, on a $4 \times 1 + 3 \times 1 + c = 0$ soit $c = -7$.
   Finalement, $\boxed{d_2 : 4x + 3y - 7 = 0}$.

4. Un vecteur normal à d_3 est $\vec{n_3}(2;-1)$. Un vecteur normal à d_4 est $\vec{n_4}(-4;2)$.
   On a $\vec{n_4} = -2\vec{n_3}$ donc ils sont colinéaires et donc d_3 et d_4 sont parallèles.
   Par ailleurs, $+5 \times (-2) \neq +7$, donc les droites sont $\boxed{\text{strictement parallèles}}$ (équations non proportionnelles).

Corrigé de l'exercice 11.2.

1. Soit $M(x;y)$ un point du plan. On a $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x+2 \\ y+1 \end{pmatrix}$.
$$\begin{aligned} M(x;y) \in (BC) &\iff \overrightarrow{BM} \text{ et } \overrightarrow{BC} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff (x+2) \times 8 - (y+1) \times 6 = 0 \\ &\iff 8x - 6y + 10 = 0 \\ &\iff \boxed{4x - 3y + 5 = 0} \end{aligned}$$

 CC BY NC SA

2.
$$\begin{aligned}
M(x;y) \in \mathscr{C} &\iff \overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{CM} \\
&\iff \overrightarrow{BM}(x+2;y+1) \cdot \overrightarrow{CM}(x-4;y-7) = 0 \\
&\iff (x+2)(x-4) + (y+1)(y-7) = 0 \\
&\iff x^2 - 2x - 8 + y^2 - 6y - 7 = 0 \\
&\iff \boxed{x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0}
\end{aligned}$$

3. Intersection du cercle avec l'axe des abscisses : on cherche les couples $(x;y)$ qui vérifient l'équation du cercle et $y = 0$. On résout donc : $x^2 - 2y - 15 = 0$ qui donne $x_1 = -3$ et $x_2 = 5$. On obtient donc les points $\boxed{D(5;0) \text{ et } E(-3;0)}$.
   Intersection avec l'axe des ordonnées : on cherche les couples $(x;y)$ qui vérifient l'équation du cercle et $x = 0$. On résout donc : $y^2 - 6y - 15 = 0$ qui donne $y_1 = 3 - 2\sqrt{6}$ et $y_2 = 3 + 2\sqrt{6}$. On obtient donc les points $\boxed{F(0;3-2\sqrt{6}) \text{ et } G(0;3+2\sqrt{6})}$.
4. La tangente à $\mathscr{C}$ en D est perpendiculaire au rayon issu de D.
   Soit Ω le centre du cercle. Il est le milieu de $[BC]$ donc $\Omega(1;3)$ et donc $\overrightarrow{\Omega D}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$.
   Ainsi :
$$\begin{aligned}
M(x;y) \in T &\iff \overrightarrow{DM} \perp \overrightarrow{\Omega D} \\
&\iff \overrightarrow{DM}(x-5;y) \cdot \overrightarrow{\Omega D}(4;-3) = 0 \\
&\iff 4(x-5) - 3y = 0 \\
&\iff \boxed{4x - 3y - 20 = 0}
\end{aligned}$$
5. On a :
$$\begin{aligned}
M(x;y) \in \mathscr{E} &\iff x^2 + y^2 + 4x + 3y = 20 \\
&\iff (x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2) - 4 + (y^2 + 2 \times y \times 1 + 1^2) - 1 = 20 \\
&\iff (x+2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 = 20 \\
&\iff (x+2)^2 + (y+1)^2 = 25
\end{aligned}$$
   Donc $\mathscr{E}$ est le cercle de centre $B(-2;-1)$ et de rayon $R = \sqrt{25} = 5$.

Corrigé de l'exercice 11.3.

1. $\mathscr{C} : (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ donc $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $\Omega(-1;2)$ et de rayon 2.
2. On obtient : $A(-1+\sqrt{3};1)$ et $B(-1-\sqrt{3};1)$.
3. Un vecteur normal de T est le vecteur $\overrightarrow{\Omega A}(\sqrt{3};-1)$.
   Une équation de T est $\sqrt{3}x - y + c = 0$ et $A \in T$ donc $c = y_A - \sqrt{3}x_A = -2 + \sqrt{3}$.

 CC BY NC SA

Corrigé de l'exercice 11.4.

1. $x^2 + x - 2y - 4 = 0 \iff y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 2$.
   Donc $\mathscr{P}$ est une parabole de sommet S d'abscisse $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$ et d'axe parallèle à (Oy). On peut calculer $y_S = -\frac{17}{8}$.
2. On résout $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 2 \\ y = 4 \end{cases}$
   On obtient $B(-4;4)$ et $A(3;4)$.
3. Soit $f : x \longmapsto \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 2$. La représentation graphique de f est la parabole $\mathscr{P}$.
   Sa tangente en A a pour équation $y = f'(3)(x-3) + f(4)$, avec $f'(x) = x + \frac{1}{2}$.
   Donc $T_A : y = \frac{7}{2}x - \frac{13}{2}$.

 CC BY NC SA