Cours de mathématiques

Thomas Rey

Classe de terminale STMG
10 mai 2017

« *Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve.* »
EUCLIDE D'ALEXANDRIE

Table des matières

Chapitre 1

Indices en base 100

En première, vous avez appris à calculer des proportions (en pourcentage le plus souvent). Nous allons revoir cette notion ici. Vous avez aussi appris à calculer des variations en pourcentage : si le prix d'un objet qui vaut 30 € augmente de 3 €, l'augmentation relative est de 10 %. Pour comparer les évolutions de deux quantités, il est parfois plus facile d'utiliser des valeurs numériques sans unité (l'euro dans l'exemple précédent) ; on parle alors d'*indice*. Par exemple le CAC 40 qui mesure (en partie) l'évolution de la bourse de Paris est un indice. On parle aussi d'indice du coût de la vie, d'indice des loyers, ...

1.1 Proportions. Évolutions. Indices

1.1.1 Calcul d'une proportion

Les calculs de proportions permettent par exemple de comparer facilement des compositions de populations de tailles différentes.

Définition 1.1
Dans une population E d'effectif n_E on définit une sous-population A d'effectif n_A. La *proportion* (ou *fréquence*) de la sous-population A dans la population E est le quotient des effectifs :

$$p = \frac{n_A}{n_E} = \frac{\text{nombre d'individus de la sous-population}}{\text{nombre total d'individus}}$$

Exemple 1.1
On donne le nombre de candidats présents et reçus au bac STMG lors des sessions de juin 2013 à 2014 dans le tableau suivant :

année	2 013	2 014	2 015	2 016
présents	72 354	69 542	67 100	66 819
reçus	61 010	62 549	60 036	59 591

Source : education.gouv.fr.

Calculer le taux de réussite de chaque année entre 2013 et 2016.

1.1.2 Évolution relative

Définition 1.2
On considère deux nombres réels strictement positifs y_1 et y_2.
On appelle *variation absolue* entre y_1 et y_2 le nombre $y_2 - y_1$.
On appelle *taux d'évolution* (ou variation relative) entre y_1 et y_2 le nombre $t = \dfrac{y_2 - y_1}{y_1}$.
En pourcentage la variation est de x % avec $x = 100 \times t$.

Remarque 1.1
Si le taux d'évolution est positif, il s'agit d'une augmentation, s'il est négatif, il s'agit d'une diminution.

Exemple 1.2
En reprenant les données de l'exemple 1.1, répondre aux questions suivantes :

1. Calculer l'évolution relative du nombre de présents entre 2013 et 2014.
2. Même question pour le nombre de reçus.

Propriété 1.1 (vue en Première)
Si le taux d'évolution entre V_D et V_A est de x % alors :

$$V_A = \left(1 + \frac{x}{100}\right) \times V_D$$

Le nombre $\left(1 + \frac{x}{100}\right)$ est appelé *coefficient multiplicateur* de l'évolution, on le note souvent CM. De plus :

— si $\left(1 + \frac{x}{100}\right) < 1$, il traduit une baisse ;
— si $\left(1 + \frac{x}{100}\right) > 1$, il traduit une hausse.

Remarque 1.2
En notant $t = \frac{x}{100}$, on a $CM = 1 + t$.

Exemple 1.3
En reprenant les données de l'exemple 1.1, calculer les coefficients multiplicateurs des évolutions de présents puis de reçus entre 2013 et 2014, puis entre 2013 et 2014, . . . et compléter le tableau :

année	2 013	2 014	2 015	2 016
CM des présents depuis 2013	1			
CM des reçus depuis 2013	1			

1.1.3 Notion d'indice

En matière de statistiques, l'institut qui fait référence en France est l'INSEE. Sur son site internet (http://www.insee.fr), on trouve les définitions de beaucoup de notions de statistiques ainsi que des données concernant énormément de domaines.

Définition 1.3 (de l'insee)
L'indice d'une grandeur est le rapport entre la valeur de cette grandeur au cours d'une période courante et sa valeur au cours d'une période de base. Il mesure la variation relative de la valeur entre la période de base et la période courante. Souvent, on multiplie le rapport par 100 ; on dit : indice base 100 à telle période.
Les indices permettent de calculer et de comparer facilement les évolutions de plusieurs grandeurs entre deux périodes données.
Source : www.insee.fr

De façon un peu plus « calculatoire », on utilisera la définition suivante :

Définition 1.4 (plus concrète)
Lorsqu'une quantité varie au cours d'une période, on fixe une année de référence et pour cette année, on définit un *indice* base 100. Les valeurs de l'indice des années suivantes sont calculées proportionnellement :

Année	0	1	...	n
Valeur	V_0	V_1	...	V_n
Indice	100	I_1	...	I_n

Les deux dernières lignes sont proportionnelles. On a donc : $\boxed{I_n = \dfrac{100 \times V_n}{V_0}}$.

Exemple 1.4
Compléter le tableau d'indices suivant en prenant pour le nombre de candidats reçus un indice base 100 en 2013 :

année	2 013	2 014	2 015	2 016
reçus	61 010	62 549	60 036	59 591
indice				

1.2 Taux d'évolution moyen

Si on connait le taux d'évolution d'une quantité entre 2010 et 2016, on peut se poser la question du taux à appliquer chaque année pour obtenir cette évolution globale.

Exemple 1.5
Entre 2010 et 2016 le prix d'un appareil a augmenté du même taux chaque année pour atteindre une augmentation totale de 60 %.
Quel est le taux d'augmentation annuel ?

1.2.1 Racine n^e^

Dans l'exemple 1.5, on a vu qu'il faut chercher x tel que $x^6 = 1{,}6$. On ne calculera pas de solution *exacte* de cette équation, mais on en déterminera une solution approchée grâce à la calculatrice.

Propriété 1.2 (admise)
Soit a un réel positif et n un entier supérieur à 2. L'équation $x^n = a$ admet une unique solution positive qu'on appelle *racine* n^e de a.

Définition 1.5
La racine n^e de a se note $a^{1/n}$ ou $\sqrt[n]{a}$.

Exemple 1.6
La solution positive de $x^4 = 8$ est $8^{1/4}$. Pour déterminer $8^{1/4}$ on écrit à la calculatrice :
`8^(1/4)` et on obtient : 1,682
Ainsi, le coefficient multiplicateur annuel cherché dans l'exemple 1.5 est $1{,}6^{1/6} \approx 1{,}081$.
Le taux d'augmentation annuel est donc d'environ 8,1 %.

1.2.2 Application

Définition 1.6
On considère une quantité qui évolue de t % au total pendant n périodes.
On appelle *taux d'évolution moyen* le taux d'évolution qu'il faudrait appliquer sur chaque période pour que le taux global soit de t %.

Exemple 1.7
Si on augmente un prix de 10 % chaque année pendant trois ans, le CM global est :

$$CM = \left(1 + \frac{10}{100}\right)^3 = 1{,}331$$

Cela signifie qu'une évolution de 33,1 % sur 3 ans correspond à un taux d'évolution moyen annuel de 10 %.

Propriété 1.3
Si une quantité subit n évolutions successives d'un même taux t et que le taux d'évolution global est T, alors on a :

$$1 + T = (1+t)^n \text{ ou encore } 1 + t = (1+T)^{1/n}$$

Exemple 1.8
Un prix augmente de 5 % la première année, puis de 15 % la deuxième année. Quelle est l'augmentation moyenne ?

« Il n'y a pas de problème. Il n'y a que des professeurs. »
Jacques Prévert

Chapitre 2

Statistiques

L'objet du chapitre est de donner des outils permettant d'exploiter de façon pertinente une série de données recueillies préalablement. L'utilisation des statistiques est présente dans beaucoup de domaines [1] ; elles servent notamment à constater, comparer ou prévoir certaines situations.
Une *série statistique* est la donnée (souvent sous forme de tableaux) des différentes classes de la population et de leurs effectifs correspondants.
Pour étudier une série statistiques on peut la représenter grâce à différents types de graphiques (vous avez vu ça en seconde et première) mais on peut aussi la « résumer » par certaines valeurs numériques qu'on appelle *paramètres* de la série. Nous distinguerons deux types de paramètres : les paramètres de *tendance centrale* et les paramètres de *dispersion*.

2.1 Statistiques à une variable

Lorsqu'on étudie une série statistique à une variable, on la « résume » souvent par un couple de paramètres qui donnent :
— une tendance centrale (médiane ou moyenne par exemple) ;
— une idée de la dispersion (écart inter-quartile ou écart-type par exemple).

2.1.1 Médiane et quartiles

Définition 2.1
Dans une série statistique de type quantitatif, la *médiane* est une valeur du caractère qui sépare la population en deux groupes de même effectif : ceux dont la valeur du caractère est inférieure à la médiane et ceux dont la valeur du caractère est supérieure à la médiane.

Remarque 2.1
Pour déterminer la médiane d'une série statistique, on range les données par ordre croissant et :

avec un nombre impair de données : la médiane est la valeur « du milieu » ;

avec un nombre pair de données : la médiane est la moyenne entre les deux valeurs « du milieu ».

1. Même et surtout non-mathématiques

Définition 2.2

Les premier et troisième *quartiles* (Q_1 et Q_3) d'une série statistique sont définis par les règles ci-dessous :

— Q_1 est la plus petite valeur de la série telle que au moins 25 % des valeurs de la série soient inférieures ou égales à Q_1 ;

— Q_3 est la plus petite valeur de la série telle que au moins 75 % des valeurs de la série soient inférieures ou égales à Q_3 ;

Remarque 2.2 (Méthode de détermination de Q_1 et Q_3)

Soit x une série statistique avec $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$. Pour déterminer Q_1 et Q_3 on procède ainsi :

— on calcule $n/4$ et on note i le premier entier supérieur ou égal à $n/4$;

— on a alors $Q_1 = x_i$ (la i^{e} valeur de la série ordonnée) ;

— on calcule $3 \times n/4$ et on note j le premier entier supérieur ou égal à $3 \times n/4$;

— on a alors $Q_3 = x_j$ (la j^{e} valeur de la série ordonnée) ;

Exemple 2.1

On donne le poids des participants à un tournoi de judo dans le tableau suivant :

21	21	23	23	23	24	26	26
26	27	27	28	29	30	31	31
31	34	35	35	36	36	37	

L'organisateur du tournoi souhaite constituer quatre groupes de judokas sans avoir trop d'écart de poids entre les concurents d'un même groupe. Pour cela, on peut lui conseiller de déterminer la médiane et les quartiles ainsi :

— on a 23 judokas (impair) la médiane est donc la valeur du milieu c'est-à-dire la douzième valeur (on en laisse 11 de chaque « côté ») : $Med = 28$;

— $n = 23$ donc $\frac{n}{4} = 5{,}75$ et donc Q_1 est la sixième valeur : $Q_1 = 24$;

— de même, $\frac{3n}{4} = 17{,}25$ donc Q_3 est la dix-huitième valeur : $Q_3 = 34$.

Dans le premier groupe on mettra par exemple les six dont le poids est inférieur ou égal à $Q_1 = 24$, dans le deuxième groupe ceux qui sont entre Q_1 et Med, . . .

Définition 2.3

L'*écart interquartile* est la différence entre le 3e et le 1er quartile. Au moins 50% des observations ont une valeur du caractère comprise entre Q_1 et Q_3. L'*intervalle interquartile* est l'intervalle $[Q_1\,;\,Q_3]$.

Exemple 2.2

Dans l'exemple 2.1, l'écart interquartile vaut $Q_3 - Q_1 = 34 - 24 = 10$.

2.1.2 Boîte à moustaches

Il existe un diagramme qui permet de visualiser la médiane et les quartiles d'une série, on l'appelle *boîte à moustaches* ou *diagramme en boîte*. On le trace comme ceci :

— on construit en face d'un axe gradué, permettant de repérer les valeurs extrêmes de la série étudiée, un rectangle dont la longueur est égale à l'écart interquartile et dans lequel on représente la médiane par un trait ;

— deux traits repèrent les valeurs extrêmes.

Exemple 2.3

On donne les résultats de deux groupes d'élèves à un même contrôle :

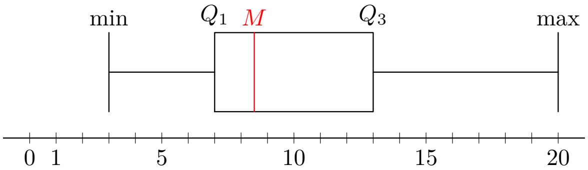
Groupe 1 :

note x	3	5	6	7	8	9	10	13	14	18	20
effectif	1	1	2	2	4	2	1	2	3	1	1

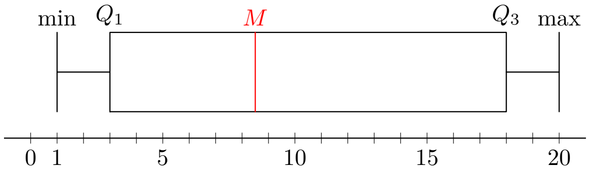
Groupe 2 :

note y	1	2	3	4	13	14	18	19	20
effectif	3	2	2	4	1	2	4	2	2

Série x :



Série y :



2.1.3 Moyenne et écart-type

Définition 2.4

On considère une série statistique à caractère quantitatif prenant p valeurs notées x_1, x_2, ..., x_p ; chaque valeur x_i apparaissant n_i fois dans la série. Ainsi la population totale a un effectif noté $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$. La moyenne de cette série est le nombre $\overline{x}$ défini par :

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_px_p}{n_1 + n_2 + \cdots + n_p} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_ix_i}{N}$$

Cette moyenne est appelée *moyenne pondérée* par les effectifs.

Exemple 2.4

En reprenant les données de l'exemple 2.3, la moyenne du groupe 2 est :

$$\overline{y} = \frac{1\times3+2\times2+3\times2+4\times4+13\times1+14\times2+18\times4+19\times2+20\times2}{22} = 10$$

Chaque note est comptée autant de fois qu'elle apparaît dans les copies des élèves. L'effectif de la note est aussi appelé poids ou coefficient.

Définition 2.5
L'*écart-type* d'une série statistique est un nombre positif qui indique si les valeurs de la série sont plutôt regroupées ou dispersées. Plus il est important, plus la série est dispersée. On l'obtient grâce à la calculatrice (il est noté σx sur la calculatrice).

Exemple 2.5
En reprenant les données de l'exemple 2.3, le premier groupe a un écart-type $\sigma \approx 4{,}31$ et le deuxième groupe a un écart-type $\sigma' \approx 7{,}60$. Le premier groupe est plus *homogène*.

2.2 Statistiques à deux variables

2.2.1 Exemple

Exemple 2.6
On donne dans le tableau suivant la moyenne des températures dans un village canadien de la baie d'Hudson au cours des périodes d'été et la hauteur maximale de neige mesurée au cours des deux premières semaines d'avril.

Année	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976
Temp. (°C)	11.8	12.5	13.7	14.0	12.5	14.1	12.1	14.1	14.4
Neige (cm)	30	64	58	81	112	28	91	53	76

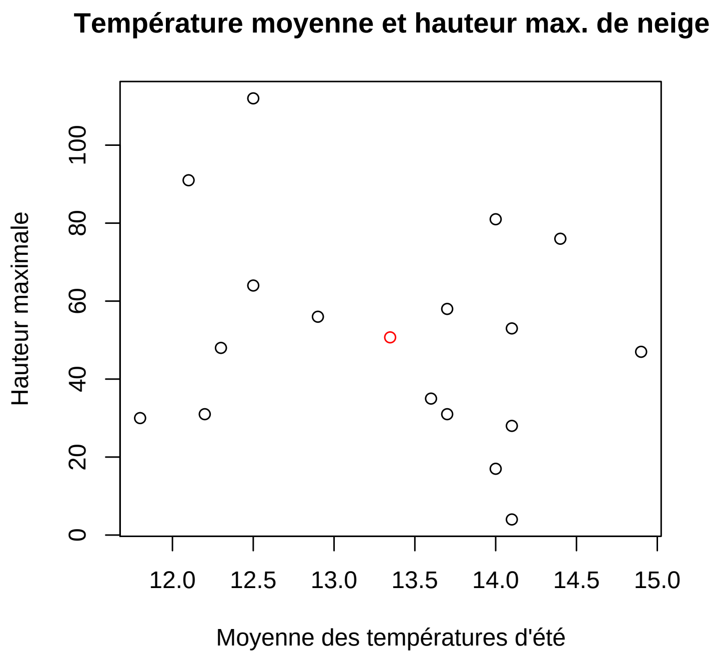
Année	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984
Temp. (°C)	12.2	12.3	13.6	14.0	14.9	12.9	13.7	14.1
Neige (cm)	31	48	35	17	47	56	31	4

Il s'agit d'une série à *deux* variables car on étudie deux informations :
— la température l'été ;
— la hauteur de neige en avril.

2.2.2 Nuage de points

Lorsqu'une série statistique comporte deux *variables* quantitatives on peut la représenter par un *nuage de points*. Pour chaque donnée (ou individu) de la série la première variable est l'abscisse et la deuxième l'ordonnée.

Exemple 2.7
En reprenant les données de l'exemple 2.6, on construit[a] le nuage de points sur le graphique ci-après :



a. Le graphique ci-après est obtenu avec le logiciel de statistiques « R » disponible gratuitement à l'adresse http ://www.R-project.org. Un court manuel de prise en main est disponible à l'adresse http ://rey-marlioz.free.fr dans la rubrique « pour tous ».

Définition 2.6
La donnée d'une série statistique à deux variables x et y permet de construire un diagramme appelé *nuage de points* constitué des points de coordonnées $(x_i ; y_i)$ où x_i et y_i sont les valeurs de la série correspondant à la même donnée (même moment, même individu, ...).

Définition 2.7
Dans un nuage de points lié à une série statistique à deux variables, le point $M(\overline{x} ; \overline{y})$ est appelé *point moyen* du nuage.

Exemple 2.8
Dans l'exemple 2.7, le point moyen est affiché en rouge.

2.3 Ajustement affine

2.3.1 Introduction

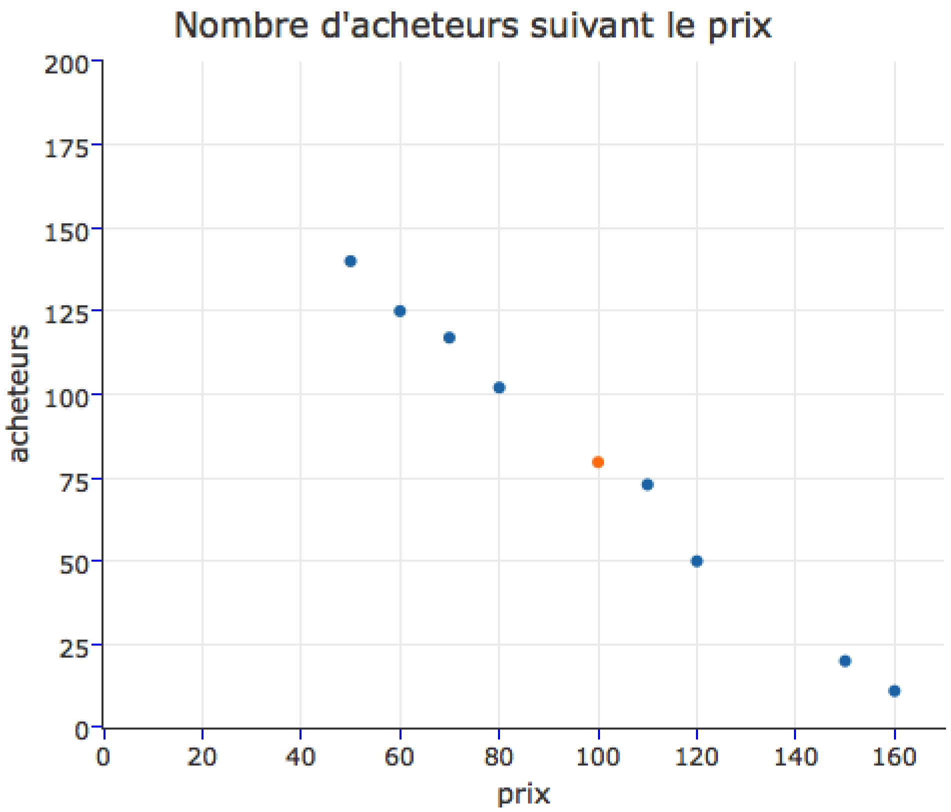
Parfois, le nuage de points d'une série statistique à deux variables a une forme qui fait penser à la représentation graphique d'une fonction « connue » (fonction affine, fonction carré, ...). Dans ce cas, on essaye de déterminer une fonction de ce type dont la courbe passe « au mieux » parmi les points du nuage. C'est ce qu'on appelle *l'ajustement*.

Exemple 2.9

On donne dans le tableau suivant le résultat d'une étude réalisée auprès de clients potentiels d'un nouveau produit. Lors de cette enquête on a posé la question suivante : « êtes vous prêt à acheter ce produit s'il coûte x euros ? »

Prix x	50	60	70	80	110	120	150	160
Nombre d'acheteurs	140	125	117	102	73	50	20	11

Construisons le nuage de points correspondant et plaçons le point moyen $G(100; 80)$:



Le nuage de points a ici une forme « allongée » et les points semblent presque alignés sur une droite.

Définition 2.8

Lorsque le nuage de points associé à une série statistique à deux variables a une forme allongée, on cherche à déterminer l'équation réduite d'une droite qui passe « au mieux » parmi les points. On dit qu'on réalise un *ajustement affine* en trouvant l'équation réduite $y = ax + b$ de cette droite.

Propriété 2.1 (admise)

Pour qu'une droite passe « au mieux » parmi les points d'un nuage, il faut qu'elle passe par le point moyen. Attention : ce n'est pas suffisant !

Dans l'exemple 2.9, on peut placer la règle sur le point moyen G et la faire pivoter jusqu'à ce qu'elle passe « au mieux » parmi les points : il s'agit ici d'une première méthode expérimentale et peu fiable. Elle permet une première approche dans la recherche des coefficients m et p.

Exemple 2.10

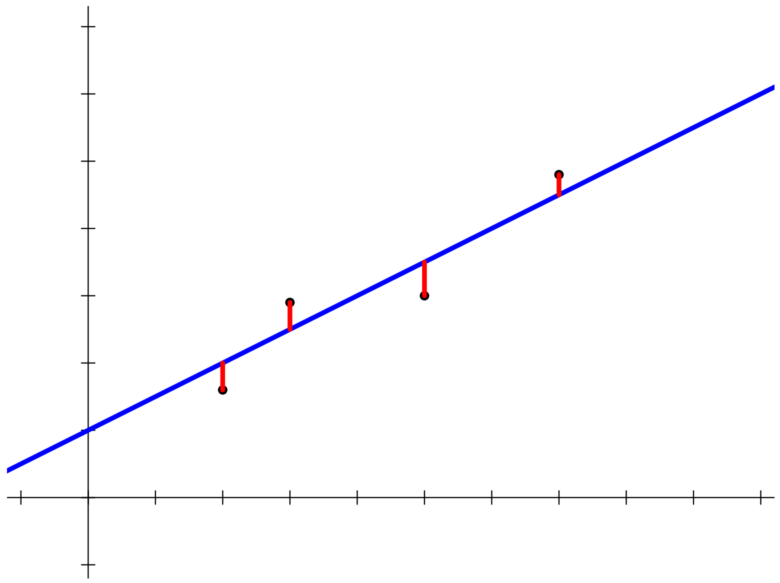
En reprenant le graphique de l'exemple 2.9, tracer « au feeling » une droite d'ajustement passant par G. Noter p son ordonnée à l'origine. On a alors $A(0;p)$ et $G(100;80)$ deux points de la droite et donc :

$$m = \frac{y_G - y_A}{x_G - x_A} = \frac{80 - \ldots\ldots}{100} = \ldots\ldots$$

Finalement notre droite d'ajustement a pour équation : $y =$

2.3.2 Méthode des moindres carrés

Il existe une méthode plus précise pour déterminer une droite d'ajustement : la méthode des *moindres carrés*. Elle consiste à chercher la droite pour laquelle la somme des carrés des écarts verticaux entre les points du nuage et les points de la droite est la plus petite possible.
Sur la figure ci-dessous, on additionne les carrés des longueurs des segments rouges et on cherche la droite pour laquelle cette somme des carrés est la plus petite possible :



Propriété 2.2 (admise)
Il existe une droite appelée *droite des moindres carrés* qui minimise la somme des carrés des distances verticales entre les points du nuage et les points correspondants de la droite. Des formules (hors-programme) existent pour calculer les coefficients m et p de cette droite. Nous utiliserons la calculatrice ou le tableur pour les déterminer.

Exemple 2.11 (Calculatrice)

Dans le mode statistiques de la calculatrice, saisir dans la liste 1 les prix x de l'exemple 2.9 et dans la liste 2 les nombres d'acheteurs potentiels.
Dans l'onglet `CALC`, sélectionner `RégLin(ax+b)` avec `L1` pour `XList` et `L2` pour `YList` et valider.
On obtient :

$$a = -1{,}18; \quad b = 197{,}75$$

Donc la droite d'ajustement affine par la méthode des moindres carrés a pour équation $\boxed{y = -1{,}18x + 197{,}75}$. Comparer aux résultats obtenus à l'exemple 2.10.

Exemple 2.12

On donne dans le tableau suivant le taux d'alphabétisation des femmes (noté x en %) et le taux de mortalité infantile (noté y en ‰) dans plusieurs pays. Tracer le nuage de points. Un ajustement affine est-il justifié ? Expliquer et effectuer cet ajustement si c'est le cas.

Pays	Inde	Koweït	Mauritanie	France	Ghana	Congo	Venezuela	Japon
x	25,7	69,6	17	98,7	42,8	55,4	87,8	100
y	95	34	127	7,7	90	73	25,1	5

Remarque 2.3

Parfois, lorsqu'on a une série *chronologique* à une seule variable statistique, on crée une deuxième variable appelée *rang* de l'année ou du mois ou .... Ceci permet de créer un nuage de points avec en abscisse le temps et en ordonnée la variable étudiée.

Exemple 2.13

Dans le tableau suivant on donne la ville (et l'année correspondante) où ont eu lieu les JO d'été et le montant (en millions de $) des droits de retransmission TV générés :

Ville - année	Rang x	Montant y
Munich - 1972	1	17,8
Montréal - 1976		34,8
Moscou - 1980		87,9
Los Angeles - 1984		286
Séoul - 1988		402
Barcelone - 1992		636
Atlanta - 1996		898

Compléter la colonne des rangs et construire le nuage de points associé à cette série chronologique. Un ajustement affine parait-il judicieux ? Justifier.

2.3.3 Applications

Une des applications les plus courantes de la résolution d'un problème d'ajustement est de permettre d'estimer des résultats non donnés par l'étude statistique.

Exemple 2.14

En reprenant les données de l'exemple 2.9 nous allons estimer le nombre d'acheteurs si on fixe le prix à 100 € grâce à l'équation de la droite d'ajustement trouvée dans l'exemple 2.11.

La droite d'ajustement a pour équation $y = -1{,}18x + 197{,}75$. Cela signifie que pour tout point de la droite, cette égalisté entre les coordonnées est vérifiée. Pour trouver une estimation du nombre d'acheteurs potentiels si le produit coûte 100 €, il suffit de remplacer x par 100 dans l'équation et on obtient :

$$y = -1{,}18 \times 100 + 197{,}75 \approx 80$$

En fixant le prix à 100 €, le commerçant peut espérer avoir 80 clients.

Question : le commerçant estime que son magasin est dimensionné pour recevoir 110 clients. À quel prix doit-il vendre son produit pour atteindre cet objectif ?

« *Il n'y a pas de problème. Il n'y a ques des professeurs.* »
Jacques Prévert

Chapitre 3

Suites arithmétiques. Suites géométriques

Dans ce chapitre nous allons revenir sur les deux types de suites numériques que vous avez étudié l'an dernier en approfondissant certains points et en découvrant comment calculer la somme des premiers termes de ces suites.

3.1 Suite numérique

Définition 3.1

Une suite numérique est une liste *ordonnée de nombres*. Chacun de ces nombres est appelé un *terme* de la suite. Les termes d'une suite u sont notés u_n ; l'entier n est appelé l'*indice* du terme u_n (c'est son « numéro d'ordre » dans la liste).

Exemple 3.1

Soit u la suite définie pour n entier naturel par $u_n = 2n + 5$. On a :
$u_0 = 2 \times 0 + 5 = 5$, $u_1 = 2 \times 1 + 5 = 7$, ..., $u_{12} = 2 \times 12 + 5 = 29$...

3.1.1 Exemple fondamental

C'est bientôt le début de l'année et vous allez peut-être « re-négocier » votre argent de poche avec vos parents... Voici une aide précieuse...

Exemple 3.2

Deux élèves discutent de leur argent de poche (pour faciliter les calculs du début, nous partiront d'une valeur de départ arbitraire de 100 € – vous pouvez être beaucoup moins (plus ?) exigeants avec vos parents...). Le premier décide de demander chaque mois à ses parents une augmentation de 5 € ; le second préfère demander une augmentation mensuelle de 4 %.

	A	B	C	D
2				
3	Cas 1 : augmentation fixe :		5,00 €	
4	Cas 2 : augmentation en % :		4,00%	
5				
6	Mois	Cas 1	Cas 2	
7	janvier 2017	100,00 €	100,00 €	
8	février 2017	105,00 €	104,00 €	
9	mars 2017	110,00 €	108,16 €	
10	avril 2017	115,00 €	112,49 €	
11	mai 2017	120,00 €	116,99 €	
12	juin 2017	125,00 €	121,67 €	
13	juillet 2017	130,00 €	126,53 €	
14	août 2017	135,00 €	131,59 €	

Ils ont simulé cette situation dans une feuille de calcul de tableur (que vous réaliserez en TP bientôt).
En notant n le numéro du mois qui suit le mois de décembre 2016, on note u_n le montant de l'argent de poche dans le premier cas pour le mois n. On note v_n le montant de l'argent de poche du deuxième cas pour ce même mois.

1. Que peut-on dire de l'augmentation mensuelle du premier cas ? Comment l'écrire avec u_n et u_{n+1} ?
2. Que peut-on dire de l'augmentation mensuelle du deuxième cas ? Comment l'écrire avec v_n et v_{n+1} ?

3.1.2 Suite arithmétique

Définition 3.2
Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite *arithmétique* si la différence entre deux termes consécutifs est constante. C'est à dire qu'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$. Le réel r est appelé *raison* de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exemple 3.3
Si u est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 3, on a :

$$\begin{aligned} u_0 &= 5 \\ u_1 &= u_0 + 3 = 5 + 3 = 8 \\ u_2 &= u_1 + 3 = 8 + 3 = 11 \end{aligned}$$

Remarque 3.1
On rencontre les suites arithmétiques lorsqu'une quantité varie régulièrement de façon constante.

Propriété 3.1
Si u est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r alors pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a :

$$u_n = u_0 + n \times r$$

Exemple 3.4
En reprenant l'exemple 3.3, $u_{18} = 5 + 18 \times 3 = 59$

3.1.3 Suite géométrique

Définition 3.3
Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite *géométrique* si chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par un même nombre q. C'est à dire qu'il existe un réel q tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le réel q est appelé *raison* de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exemple 3.5
Si u est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$, et de raison $q = 2$, on a :

$$u_0 = 5, \quad u_1 = q\times u_0 = 2\times 5 = 10, \quad u_2 = q\times u_1 = 2\times 10 = 20, \quad u_3 = q\times u_2 = 2\times 20 = 40, \ldots$$

Remarque 3.2
On rencontre des suites géométriques lorsque le taux de variation d'une quantité est constant au cours du temps.

Propriété 3.2
Si u est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q alors pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Exemple 3.6
En reprenant l'exemple 3.5, on a $u_6 = 5 \times 2^6 = 5 \times 64 = 320$.

3.2 Sommes de termes

Exemple 3.7
En reprenant l'exemple 3.2, l'élève peut se poser la question suivante : « à partir de quel mois j'aurai touché plus d'argent avec le cas 2 qu'avec le cas 1 ? ».
Dans la feuille de calcul on peut compléter ainsi :

	A	B	C	D	E	F
2						
3	Cas 1 : augmentation fixe :		5,00 €			
4	Cas 2 : augmentation en % :		4,00%			
5						
6	Mois	Cas 1	Cas 2		Total 1	Total 2
7	janvier 2017	100,00 €	100,00 €		100,00 €	100,00 €
8	février 2017	105,00 €	104,00 €		205,00 €	204,00 €
9	mars 2017	110,00 €	108,16 €		315,00 €	312,16 €
10	avril 2017	115,00 €	112,49 €		430,00 €	424,65 €
11	mai 2017	120,00 €	116,99 €		550,00 €	541,63 €
12	juin 2017	125,00 €	121,67 €		675,00 €	663,30 €
13	juillet 2017	130,00 €	126,53 €		805,00 €	789,83 €
14	août 2017	135,00 €	131,59 €		940,00 €	921,42 €
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]

Quelles formules écrire dans la cellule C7 puis dans la cellule C8 (à recopier vers le bas) pour calculer les sommes ?

Exemple 3.8

On peut aussi calculer la somme des premiers termes grâce à la calculatrice : voir à la page 46 de votre livre (pour les deux modèles).

Chapitre 4

Probabilités conditionnelles

4.1 Probabilité conditionnelle

4.1.1 Un exemple de problème

Exemple 4.1 (Cet exemple est inspiré du sujet du bac STMG de juin 2016)
Une agence de publicité lance une campagne sur une durée de 15 semaines dans le but de promouvoir une nouvelle marque de boissons gazeuses dans une ville moyenne.
On admet qu'après x semaines, le pourcentage de personnes ayant pris connaissance de la marque est donné par $f(x) = \frac{75x}{x+2}$.
On admet également que 20 % des consommateurs ayant pris connaissance de la marque vont acheter la boisson et que 96 % des personnes n'ayant pas pris connaissance de la marque ne l'achèteront pas.

1. Quel est le pourcentage d'habitants ayant pris connaissance de la marque après 3 semaines ?
2. On prend un échantillon de 100 personnes et on considère qu'il est représentatif de la population de cette ville à propos de cette campagne de publicité. Compléter le tableau suivant :

	connait la marque	ne connait pas la marque	total
va acheter			
ne va pas acheter			
total			100

3. On rencontre une personne au hasard dans la ville. On note C et A les événements :
   — C : « l'habitant connait la marque de boisson » ;
   — A : « l'habitant achète cette boisson » ;

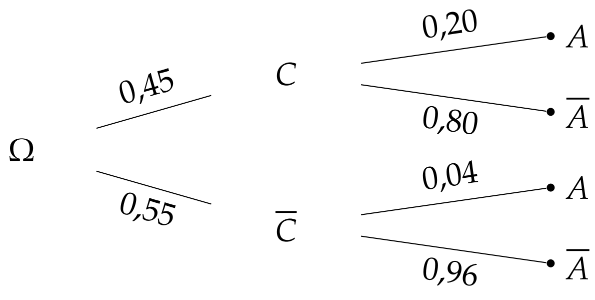
   a. Déterminer les probabilités suivantes : $p(C)$, $p(A)$ et $p(A \cap C)$.
   b. On rencontre une personne qui achète la boisson. Quelle est la probabilité qu'elle ait eu connaissance de la marque par la publicité ?
   c. Calculer $p = \frac{p(A\cap C)}{p(A)}$.

On dit que p est une *probabilité conditionnelle*. On note $p_C(A) = \frac{p(A\cap C)}{p(C)}$. On lit : probabilité de A sachant C.

4.1.2 Avec un arbre pondéré

Exemple 4.2

On peut représenter la situation de l'exemple 4.1 par un arbre pondéré :



4.1.3 Conditionnement

Définition 4.1

Soit A et B deux événements d'un univers Ω.
Si $p(B) \neq 0$, on appelle « probabilité de A sachant B » ou « probabilité de A si B » et on note $p_B(A)$ le nombre :

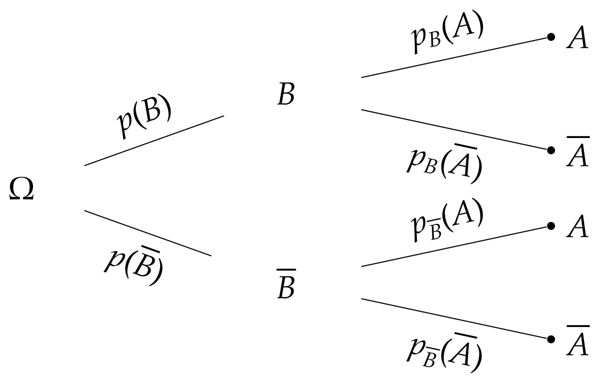
$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Remarque 4.1

- On a $0 \leq p(A \cap B) \leq p(B)$ donc $p_B(A)$ est bien un réel compris de l'intervalle $[0\,;\,1]$.
- Si $p(B)$ et $p(A)$ sont non nuls, on a alors :

$$p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B) = p_A(B) \times p(A)$$

4.1.4 Règles de l'arbre pondéré :



Propriété 4.1
— la somme des probabilités des branches issues d'un même noeud vaut 1 :

$$p_B(A) + p_B(\overline{A}) = 1;$$

— la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des différentes branches qui constituent ce chemin :

$$p_B(A) \times p(B) = p(A \cap B)$$

4.2 Calculs avec un arbre

4.2.1 Partition

Définition 4.2
Des événements forment une partition de l'univers Ω si les deux conditions suivantes sont réalisées :
— ils sont deux à deux disjoints (pas d'éventualité commune) ;
— leur réunion forme Ω.
Cela signifie que chaque éventualité de Ω appartient à un et un seul de ces événements.

Exemple 4.3
Dans un jeu de cartes, on tire une carte au hasard. On note respectivement P, T, Ca et Co les événements « obtenir un pique, un trèfle, un carreau et un coeur ».
Les événements P, T, Ca et Co forment une partition de l'univers.

4.2.2 Formule des probabilités totales

Propriété 4.2 (Formule des probabilités totales)
On considère une expérience aléatoire d'univers Ω. Si B_1, B_2, ..., B_n forment une partition de Ω, alors pour tout événement A de Ω, on a :

$$p(A) = p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + \cdots + p(A \cap B_n)$$

Avec l'arbre vu dans les règles de l'arbre pondéré ci-dessus, l'événement A est la réunion de deux chemins : $p(A)$ est la somme des probabilités de ces chemins :

$$p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})$$

Exemple 4.4

On reprend les données de l'exemple 4.1. Calculer la probabilité que la personne choisie au hasard achète la boisson.

4.2.3 Indépendance

Intuitivement, deux événements sont indépendants si la réalisation de l'un n'influe pas sur les chance que l'autre se réalise. Mathématiquement, on traduit celà ainsi :

Définition 4.3

Deux événements A et B sont dits *indépendants* si :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Remarque 4.2

Cela se traduit aussi par : $p(A) = p_B(A)$ (la probabilité de A ne change pas si B est réalisé). En effet, si A et B sont indépendants avec $p(B) \neq 0$, on a :

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A) \times p(B)}{p(B)} = p(A)$$

Exemple 4.5

Voir la question 3b, du problème de la partie 4.4.

4.3 Petit retour sur la loi binomiale

4.3.1 Épreuve de Bernoulli

Définition 4.4

On appelle *épreuve de Bernoulli* de paramètre p toute épreuve aléatoire admettant exactement deux issues :

- l'une appelée *succès* dont la probabilité d'apparaître est p ;
- l'autre appelée *échec* dont la probabilité d'apparaître est $1 - p$.

La loi de Bernoulli est donc résumée dans le tableau suivant (on note 0 l'échec et 1 le succès) :

x_i	0	1
$p(X = x_i)$	$1 - p$	p

On dit que la variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p et on note $X \sim \mathscr{B}(p)$.

4.3.2 Loi binomiale

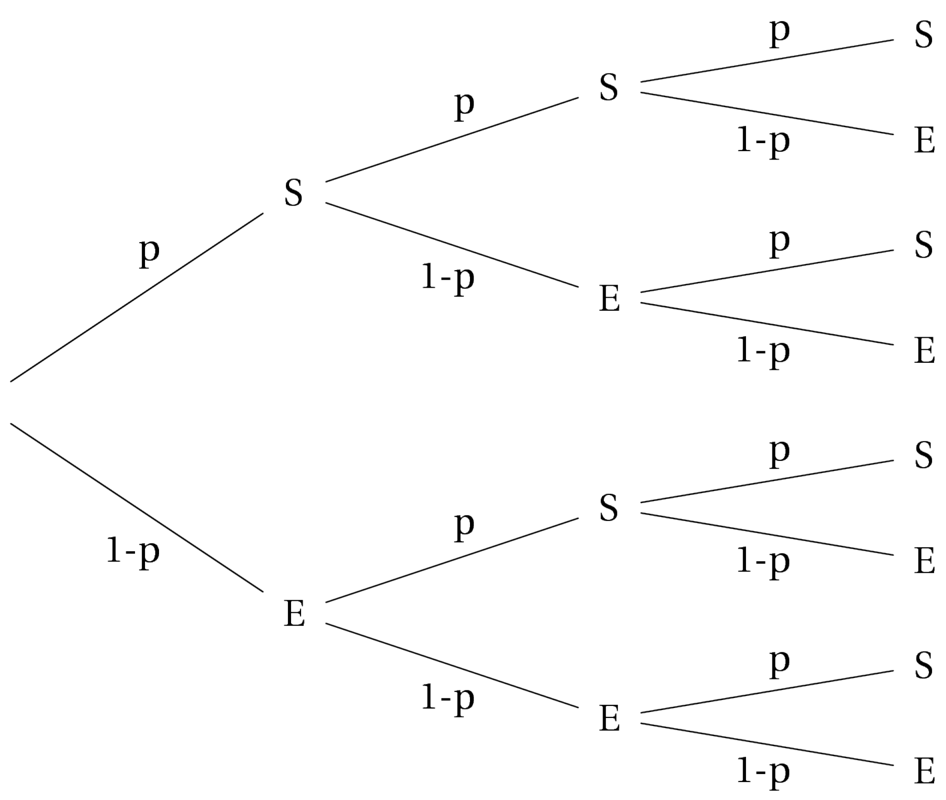
Définition 4.5

On appelle *schéma de n épreuves de Bernoulli* de paramètre p toute expérience aléatoire consistant à répéter n fois de façon indépendante la même épreuve de Bernoulli de paramètre p.

Un résultat d'une telle expérience est une liste de n issues (SE…SSE). La variable aléatoire associant à chaque issue le nombre k de succès est appelée *loi binomiale* de paramètres n et p.

Remarque 4.3

La représentation privilégiée d'un schéma de n épreuves de Bernoulli est un arbre pondéré :



En observant cet arbre, on remarque que pour $0 \leq k \leq 3$, chaque chemin menant à k succès et $3-k$ échec(s) a la même probabilité d'apparaître c'est-à-dire $p^k \times (1-p)^{n-k}$. En notant $\binom{n}{k}$ le nombre de chemins aboutissant à k succès exactement (dans le cas d'une répétition de n épreuve de Bernoulli identiques et indépendantes) on obtient la propriété suivante :

Propriété 4.3
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre n et p. Alors on a :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \in \{0; 1; 2; \dots; n\}$$

Exemple 4.6
On lance trois fois de suite un dé équilibré à six faces. On s'intéresse au nombre de « 6 » obtenus à l'issue des trois lancers. Le dé est équilibré et n'a pas de mémoire donc il s'agit bien de la répétition de trois épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Le nombre de 6 est donc une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{6}$.
En utilisant l'arbre précédent, on constate qu'il y a trois chemins qui mènent à 2 succès et un échec donc la probabilité d'obtenir exactement deux 6 est :

$$p(X = 2) = 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{5}{72}$$

Exemple 4.7
Est-il plus facile d'obtenir un multiple de 3 en un lancer de dé équilibré ou deux multiples de 3 (exactement) en quatre lancers ?

4.3.3 À la calculatrice

La calculatrice permet de déterminer $p(X = k)$ et $p(X \leq k)$ directement. Dans le tableau ci-dessous on s'intéresse à une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbf{N}^*$, $p \in [0; 1]$ et avec k entier tel que $0 \leq k \leq n$.

	Casio	TI
Syntaxe	Touche `OPTN`, puis `STAT`, puis `BINM`, puis `Bpd` ou `Bcp`	Menu `Distrib` (`2de` puis `var`), puis `binomFdp` ou `binomFrép`
$p(X = k)$	`BinominalPD(k,n,p)`	`binomFdp(n,p,k)`
$p(X \leq k)$	`BinominalCD(k,n,p)`	`binomFRép(n,p,k)`

Attention : la saisie des paramètres n, p et k ne se fait pas dans le même ordre sur les deux calculatrices.
Au tableur (Open Office), la fonction `=LOI.BINOMIALE(k;n;p;0)` donne $p(X = k)$ et la fonction `=LOI.BINOMIALE(k;n;p;1)` donne $p(X \leq k)$.

4.4 Un autre problème « type bac »

Extrait du sujet du bac STMG - Antilles-Guyane - juin 2016. 5 points.
Une entreprise familiale fabrique de la confiture de fraises biologiques. Elle achète ses fruits auprès de deux fournisseurs locaux A et B.

25 % des fruits proviennent du fournisseur A et les autres du fournisseur B.

95 % des fruits provenant du fournisseur A sont retenus pour la fabrication de la confiture.

80 % des fruits provenant du fournisseur B sont retenus pour la fabrication de la confiture.

Dans la suite, on notera $p(E)$ la probabilité d'un évènement E, et pour tout évènement F de probabilité non nulle, $p_F(E)$ la probabilité de l'évènement E sachant que F est réalisé.

On choisit un pot de confiture au hasard dans la production.
On note A, B, C les évènements :

A : « les fruits utilisés proviennent du fournisseur A »

B : « les fruits utilisés proviennent du fournisseur B »

C : « les fruits sont retenus pour la fabrication de la confiture »

Dans cette partie, les résultats seront arrondis au centième.

1. Construire un arbre de probabilité décrivant la situation.
2. a. Définir par une phrase l'évènement $A \cap C$.
   b. Calculer $p(A \cap C)$.
   c. Les évènements A et C sont-ils incompatibles ? Interpréter la réponse dans le contexte de l'exercice.
3. a. Montrer que la probabilité $p(C)$, arrondie au centième, est égale à $0,84$.
   b. Les évènements A et C sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.
4. Calculer $p_C(A)$. Interpréter la réponse dans le contexte de l'exercice.

La partie B de cet exercice ne peut pas encore être traitée (on verra les notions nécessaires dans le chapitre 6).

« Il n'y a pas de problème. Il n'y a ques des professeurs. »
JACQUES PRÉVERT

Chapitre 5

Dérivation

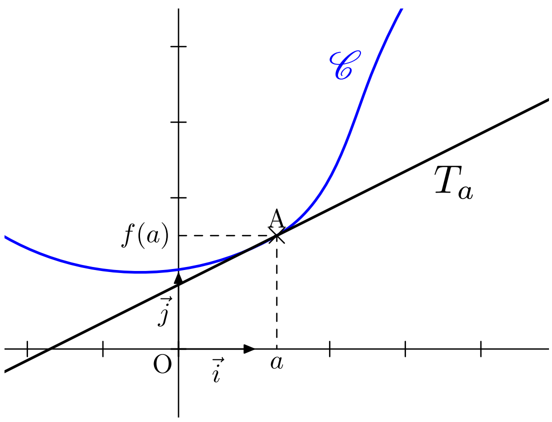
L'objectif de ce chapitre est de vous donner des outils permettant d'étudier plus facilement les variations de certaines fonctions et de déterminer l'équation réduite des tangentes à la courbe représentative de certaines fonctions.

5.1 Dérivée d'une fonction

5.1.1 Introduction : tangente à une courbe

Définition 5.1

Soit f une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère. On appelle *tangente* à $\mathscr{C}_f$ en $a \in \mathbf{R}$ la droite qui passe par le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a en étant « au plus près » de la courbe $\mathscr{C}_f$.



Définition 5.2

En reprenant les notations de la définition précédente, on note $f'(a)$ le coefficient directeur de cette tangente. On l'appelle *nombre dérivé* de f en a.
La fonction qui est définie par $x \longmapsto f'(x)$ est appelée *fonction dérivée* de f. On la note f'.
Lorsqu'une fonction a une fonction dérivée, on dit qu'elle est *dérivable*.

5.1.2 Dérivées usuelles

Il existe des formules permettant de déterminer les fonctions dérivées de certaines fonctions usuelles. Nous ne pouvons pas les démontrer ici mais elles sont à apprendre !

Propriété 5.1
Soit n un entier naturel non nul et f la fonction définie par $f(x) = x^n$.
Alors, f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour $x \in \mathbf{R}$ on a $f'(x) = n \times x^{n-1}$.

Exemple 5.1
Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = 1; \qquad g(x) = x; \qquad h(x) = x^2; \qquad m(x) = x^3$$

Propriété 5.2
Soit f la fonction inverse définie pour $x \neq 0$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.
Alors f est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ et pour $x \neq 0$ on a $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Exemple 5.2
Soit f la fonction inverse. Soit A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 2.

1. Déterminer les coordonnées du point A.
2. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A.

5.1.3 Formules complémentaires

Les propriétés qui suivent permettent de calculer la fonction dérivée des fonctions qui sont définies à partir de la fonction inverse et des fonctions $x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbf{N}^*$. Ces formules sont, bien entendu, à *apprendre* !

Propriété 5.3
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I dont la dérivée est notée u'.
Soit k un réel quelconque et f la fonction définie par $f(x) = k \times u(x)$. Alors f est dérivable sur I et :
pour $x \in I$, on a $f'(x) = k \times u'(x)$.

Exemple 5.3
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 3x^2$ et g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = -\frac{2}{x}$.
Déterminer les fonctions dérivées de f et de g.

Propriété 5.4
Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = u(x) + v(x)$. Alors f est dérivable sur I et :
pour $x \in I$ on a $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.

Exemple 5.4
Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x$. Déterminer $f'(x)$ pour $x \in \mathbf{R}$.

Propriété 5.5
Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = u(x) \times v(x)$. Alors f est dérivable sur I et :
pour $x \in I$ on a $f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$.

Exemple 5.5
Déterminer de deux façons différentes la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = (2x+3)(5x-2)$$

Propriété 5.6
Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I avec $v(x) \neq 0$ sur I.
Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Alors f est dérivable sur I et :
pour $x \in I$ on a $f'(x) = \dfrac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v(x)^2}$.

Exemple 5.6
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+1}$. Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbf{R}$:
On peut écrire $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x - 1$ et $v(x) = x^2 + 1$.
On a donc $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 2x$.
Donc, pour $x \in \mathbf{R}$ on a :

$$f'(x) = \frac{2 \times (x^2+1) - (2x-1) \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2 + 2x + 2}{(x^2+1)^2}$$

Remarque 5.1 (Synthèse)
Les dérivées des fonctions usuelles et les quatre propriétés précédentes sont résumées ci-dessous :

Fonction f	Dérivée f'	Ensemble de dérivabilité de f
$x \longmapsto k$	$x \longmapsto 0$	$\mathbf{R}$
$x \longmapsto x$	$x \longmapsto 1$	$\mathbf{R}$
$x \longmapsto x^2$	$x \longmapsto 2x$	$\mathbf{R}$
$x \longmapsto x^n$	$x \longmapsto nx^{n-1}$	$\mathbf{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$x \longmapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbf{R}^*$

Par ailleurs, si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel quelconque alors :

$$(ku)' = ku' \qquad (u+v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \text{pour } v \neq 0 \text{ sur } I$$

5.2 Applications

5.2.1 Variations

Théorème 5.1
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors :
— si pour $x \in I$ on a $f'(x) < 0$ alors f est décroissante sur I ;
— si pour $x \in I$ on a $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I ;
— si pour $x \in I$ on a $f'(x) > 0$ alors f est croissante sur I.

Exemple 5.7
Soit f la fonction définie sur $[-3;5]$ par $f(x) = x^2 - 3x - 1$.

1. Déterminer la fonction dérivée de f et étudier son signe.
2. En déduire les variations de f.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $[-3;5]$.

Solution :

1. Pour $x \in [-3;5]$, on a $f'(x) = 2x - 3$. Cette fonction dérivée est une fonction affine. On obtient facilement son signe :
   — si $x < \frac{3}{2}$ alors $f'(x) < 0$;
   — si $x > \frac{3}{2}$ alors $f'(x) > 0$.
2. D'après la question précédente et le théorème 5.1, on obtient :
   — la fonction f est décroissante sur $\left[-3; \frac{3}{2}\right]$;
   — la fonction f est croissante sur $\left[\frac{3}{2}; 5\right]$;

3. On regroupe les résultats dans un tableau :

x	-3		$\frac{3}{2}$		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	17	$\searrow$	$-3{,}25$	$\nearrow$	9

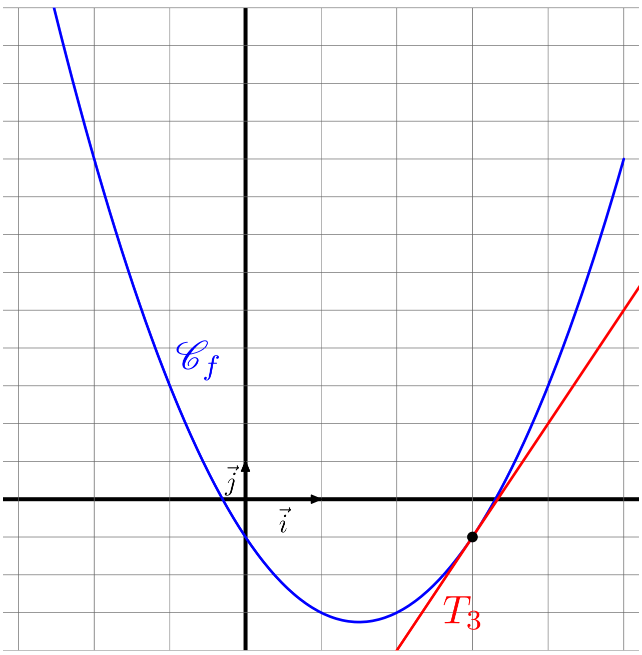
5.2.2 Équation de la tangente en a

Propriété 5.7
Soit f une fonction dérivable en a. L'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Exemple 5.8
Reprenons la fonction de l'exemple 5.7. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3.
On a $f(3) = -1$ et $f'(3) = 3$. En remplaçant dans la formule générale de la propriété 5.7 on obtient :

$$y = 3 \times (x-3) + (-1) \text{ d'où } y = 3x - 10$$



« Il n'y a pas de problème. Il n'y a que des professeurs. »
Jacques Prévert

Chapitre 6

Loi normale

Jusqu'à présent, lorsque nous avons parlé de probabilités, il s'agissait de probabilités *discrètes* ; c'est-à-dire que les éventualités de l'expérience aléatoire pouvaient être dénombrées, ou encore énumérées successivement (en lançant un dé on obtient 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 – en lançant une pièce on obtient le 1^er^ « pile » après 1 lancer, ou 2 lancers, ou 3 lancers, ...).
Il existe d'autres expériences aléatoires pour lesquelles les résultats possibles peuvent prendre toutes les valeurs d'un intervalle : on ne peut pas toutes les énumérer. Dans ce cas on va calculer la probabilité que le résultat soit compris entre deux valeurs par exemple : on parlera de la probabilité d'un intervalle.
Nous allons étudier dans ce chapitre un cas particulier de loi qu'on obtient dans ce cas : la *loi normale*et en voir une application.

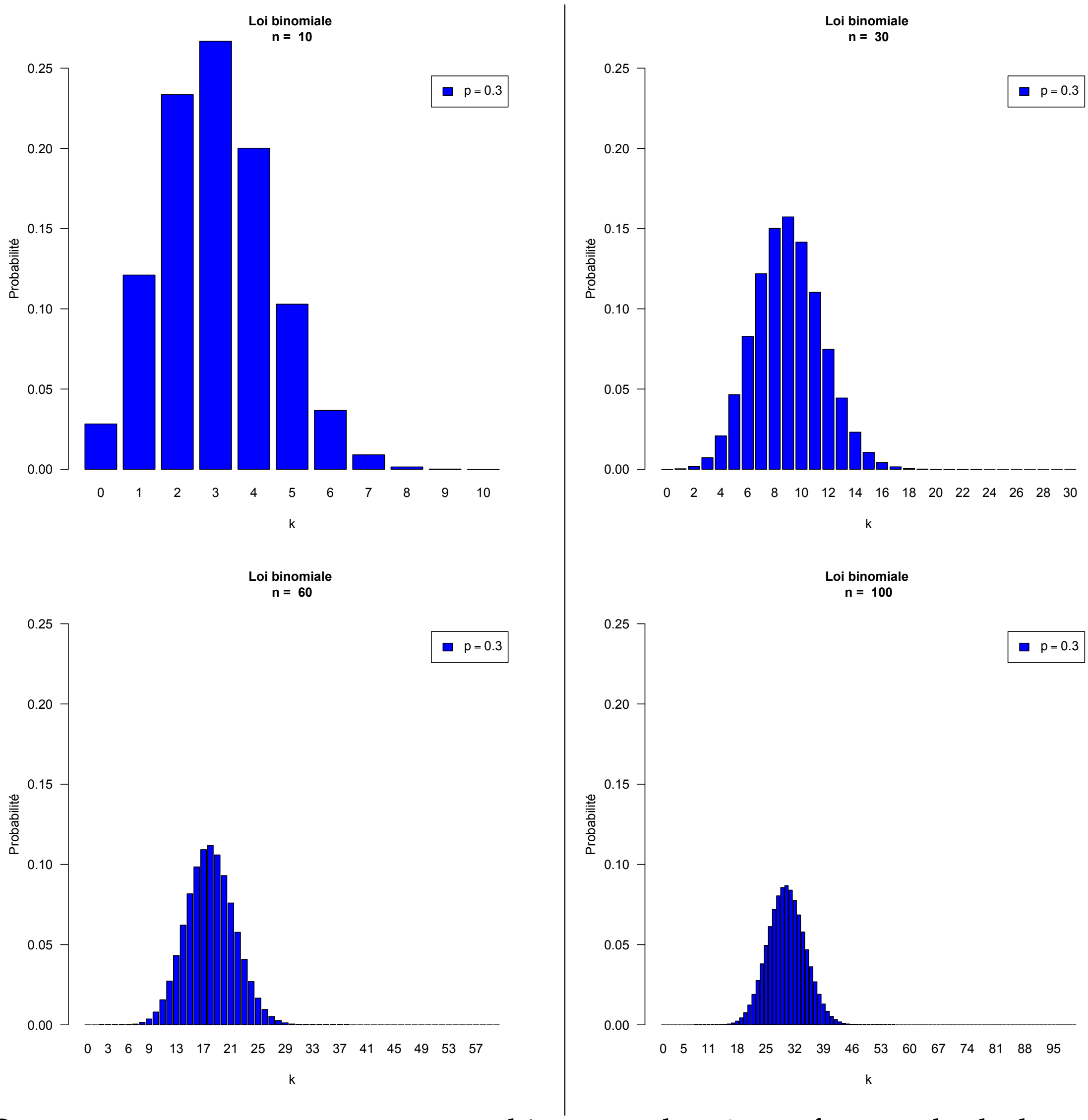
6.1 Loi normale de paramètres μ et σ

6.1.1 Binomiale

On a revu dans le chapitre 4 la loi binomiale (voir page 29 de ce cours). Nous allons dans cette partie faire quelques observations sur les représentations graphiques sous forme d'histogramme de cette loi pour plusieurs paramètres.

Exemple 6.1

On place dans une urne des boules dont la proportion de rouges est p.
On tire au hasard dans cette urne, avec remise (on replace la boule tirée dans l'urne après chaque tirage), n boules et on note le nombre de boules rouges obtenues à la fin des n tirages.
La probabilité d'obtenir k boules rouges ($0 \leq k \leq n$) suit une loi *binomiale* de parammètres n et p. En effet, on répète n fois de façon indépendante la même épreuve de Bernoulli de paramètre p.
Ces probabilités sont récapitulées dans les graphiques suivants (où on a fait varier n) dans le cas où $p = 0{,}3$.



On peut remarquer que tous ces graphiques ont la même « forme » de cloche et lorsque n devient de plus en plus grand les probabilités qu'une valeur particulière soit atteinte diminuent :

— dans le cas où $n = 10$, on a $p(3\text{rouges}) \approx 0{,}267$;

— dans le cas où $n = 100$, on a $p(30\text{rouges}) \approx 0{,}087$;

Finalement, lorsque n devient de plus en plus grand on calculera plutôt la probabilité que le nombre de boules rouges soit compris entre deux valeurs par exemple entre 25 et 35.

6.1.2 Loi normale

Définition 6.1

Lorsqu'on trace une courbe qui passe « au mieux » parmi les sommets des bâtons des diagrammes représentant une distribution suivant une loi binomiale on obtient une courbe appelée *densité de probabilité* d'une loi normale.

Remarque 6.1

Une courbe de loi normale peut être
- plus ou moins « décalée » horizontalement ;
- plus ou moins « étalée »

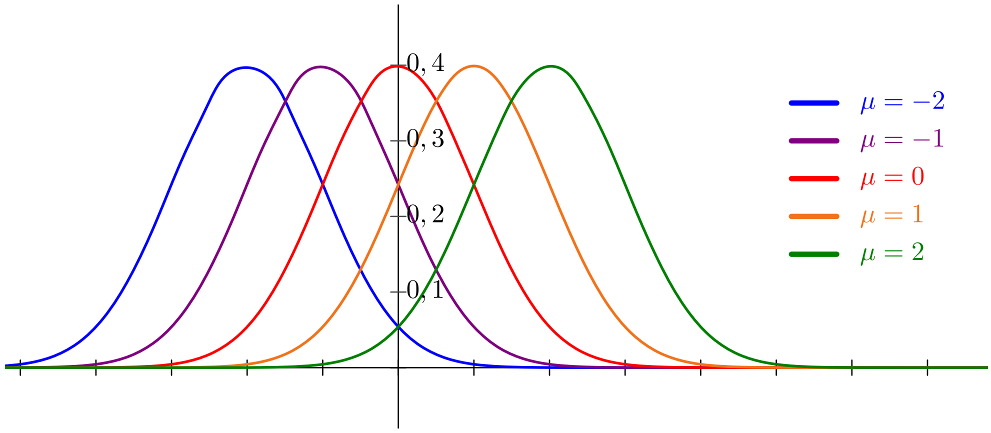
Propriété 6.1 (admise)

Deux paramètres permettent de caractériser une loi normale :
- son espérance, notée μ (on lit « mu »), qui est égale à celle de la loi binomiale qu'elle approche : $\mu = n \times p$;
- son écart-type, noté σ (on lit « sigma »), qui est égal à $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

Remarque 6.2

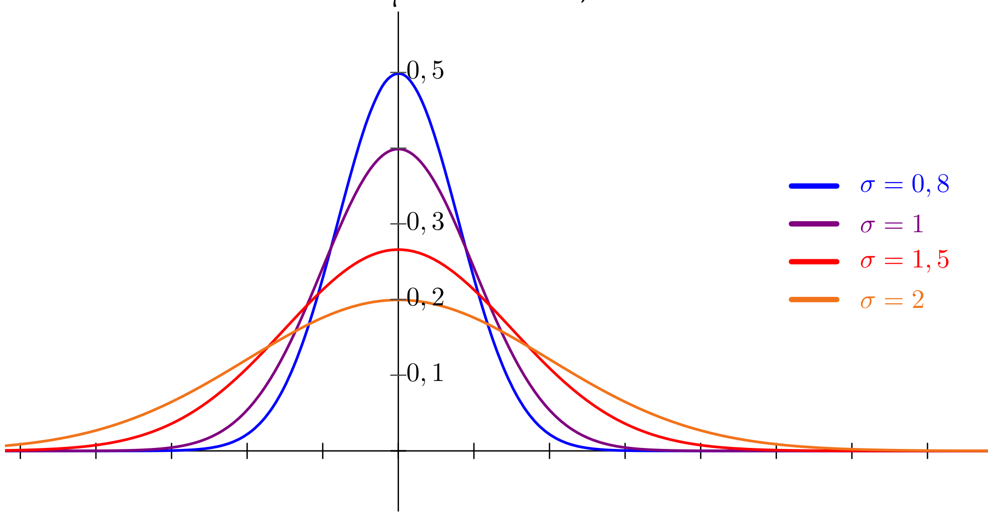
On a tracé ci-après quelques exemples de représentations graphiques de densités de lois normales.

Pour $\sigma = 1$ et $\mu = -2, -1, 0, 1, 2$:



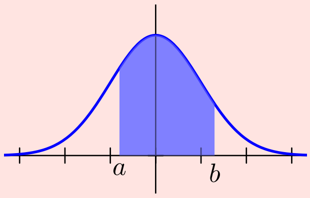
Ces courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x = \mu$.

Pour $\mu = 0$ et $\sigma = 0{,}5 \ldots 2$:



6.1.3 Calculs avec la loi normale

Propriété 6.2 (admise)
Si X suit une loi normale de paramètres μ et σ, alors, pour tous réels a et b ($a < b$), la probabilité $p(a \leq X \leq b)$ est égale à l'aire sous la courbe représentant la densité de la loi normale entre les abscisses a et b :



Remarque 6.3
Utilisation de la calculatrice : On considère une variable aléatoire X qui suit une loi normale de paramètres μ et σ.

Sur une TI : pour calculer $p(a \leq X \leq b)$ on appuie successivement sur `2nde` et `var` (pour obtenir `distrib`) et on utilise la fonction `normalFRép` qu'on complète ainsi :
`normalFRép(`a, b, μ, σ`)` (remplacer a, b, μ et σ par les valeurs données dans l'énoncé bien sûr !)

Sur une Casio : pour calculer $p(a \leq X \leq b)$ on appuie successivement sur `OPTN`, puis `STAT` et `DIST` ; Ensuite `NORM` et `Ncd` et compléter ainsi :
`NormCD(`a, b, σ, μ`)` (remplacer a, b, μ et σ par les valeurs données dans l'énoncé bien sûr !)

6.2 Intervalle de fluctuation asymptotique

Propriété 6.3 (à retenir)
Lorsque X suit une loi normale de paramètres μ et σ, on peut dire que 95 % des valeurs sont comprises entre $\mu - 2\sigma$ et $\mu + 2\sigma$. On écrit :

$$p\left(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma\right) \approx 0{,}95$$

Remarque 6.4
On a aussi :

$$p\left(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma\right) \approx 0{,}683 \text{ et } p\left(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma\right) \approx 0{,}997$$