

# Cours de mathématiques

Thomas Rey

Classe de première STMG  
5 janvier 2015

*« Ce qui est affirmé sans preuve peut être  
nié sans preuve. »*

EUCLIDE D'ALEXANDRIE

# Table des matières

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Proportions</b>                                       | <b>5</b>  |
| 1.1      | Calcul d'une proportion . . . . .                        | 5         |
| 1.1.1    | Définitions et calculs . . . . .                         | 5         |
| 1.1.2    | Exemples de calculs . . . . .                            | 6         |
| 1.2      | Comparaisons, additions, multiplications . . . . .       | 6         |
| 1.2.1    | Comparaisons . . . . .                                   | 6         |
| 1.2.2    | Proportion et réunion . . . . .                          | 7         |
| 1.2.3    | Proportions échelonnées . . . . .                        | 8         |
| <b>2</b> | <b>Droites. Systèmes</b>                                 | <b>9</b>  |
| 2.1      | Coefficient directeur . . . . .                          | 9         |
| 2.1.1    | Définition . . . . .                                     | 9         |
| 2.1.2    | Droites parallèles . . . . .                             | 10        |
| 2.2      | Équations de droites . . . . .                           | 10        |
| 2.2.1    | Droites non parallèles à l'axe des ordonnées . . . . .   | 10        |
| 2.2.2    | Droite parallèle à l'axe des ordonnées . . . . .         | 11        |
| 2.3      | Systèmes d'équations linéaires . . . . .                 | 11        |
| 2.3.1    | Système de deux équations à deux inconnues . . . . .     | 11        |
| 2.3.2    | Interprétation graphique d'un système linéaire . . . . . | 11        |
| <b>3</b> | <b>Évolutions</b>  | <b>13</b> |
| 3.1      | Variation absolue. Taux d'évolution . . . . .            | 13        |
| 3.2      | Coefficient multiplicateur . . . . .                     | 14        |
| 3.3      | Évolutions successives. Évolutions réciproques . . . . . | 15        |
| 3.3.1    | Évolutions successives . . . . .                         | 15        |
| 3.3.2    | Évolutions réciproques . . . . .                         | 16        |
| <b>4</b> | <b>Fonctions polynômes de degré 2</b>                    | <b>19</b> |
| 4.1      | Fonction polynôme de degré 2 . . . . .                   | 19        |
| 4.2      | Résolution d'une équation du second degré . . . . .      | 20        |
| 4.3      | Factorisation et signe . . . . .                         | 21        |
| 4.3.1    | Factorisation d'un trinôme . . . . .                     | 21        |
| 4.3.2    | Étude du signe d'un trinôme . . . . .                    | 21        |
| 4.4      | Récapitulatif . . . . .                                  | 22        |
| <b>5</b> | <b>Suites numériques</b>                                 | <b>25</b> |
| 5.1      | Suite de nombres réels . . . . .                         | 25        |
| 5.1.1    | Définition . . . . .                                     | 25        |
| 5.1.2    | Représentation graphique . . . . .                       | 25        |
| 5.1.3    | Mode de génération . . . . .                             | 26        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 5.1.4    | Variations d'une suite . . . . .                          | 26        |
| 5.2      | Suites arithmétiques . . . . .                            | 27        |
| 5.2.1    | Définition . . . . .                                      | 27        |
| 5.2.2    | Variations . . . . .                                      | 27        |
| 5.2.3    | Au tableur . . . . .                                      | 27        |
| 5.3      | Suites géométriques . . . . .                             | 28        |
| 5.3.1    | Définition . . . . .                                      | 28        |
| 5.3.2    | Variations . . . . .                                      | 28        |
| 5.3.3    | Au tableur . . . . .                                      | 29        |
| <b>6</b> | <b>Statistiques</b>                                       | <b>31</b> |
| 6.1      | Tableaux et graphiques . . . . .                          | 31        |
| 6.1.1    | Vocabulaire . . . . .                                     | 31        |
| 6.1.2    | Tableaux . . . . .  | 31        |
| 6.1.3    | Histogramme . . . . .                                     | 32        |
| 6.1.4    | Diagramme en bâtons . . . . .                             | 33        |
| 6.2      | Paramètres de position . . . . .                          | 34        |
| 6.2.1    | Le mode . . . . .   | 34        |
| 6.2.2    | La médiane . . . . .                                      | 34        |
| 6.2.3    | La moyenne . . . . .                                      | 34        |
| 6.3      | Paramètres de dispersion . . . . .                        | 35        |
| 6.3.1    | L'étendue . . . . .                                       | 35        |
| 6.3.2    | Les quartiles . . . . .                                   | 36        |
| 6.3.3    | Application : les diagrammes en boîtes . . . . .          | 36        |
| 6.3.4    | Variance et écart type . . . . .                          | 37        |
| <b>7</b> | <b>Dérivation</b>   | <b>39</b> |
| 7.1      | Dérivée d'une fonction polynôme du second degré . . . . . | 39        |
| 7.1.1    | Définition . . . . .                                      | 39        |
| 7.1.2    | Dérivée et variations . . . . .                           | 39        |
| 7.1.3    | Tangente . . . . .  | 40        |
| 7.1.4    | Exemples . . . . .  | 40        |
| 7.2      | Fonctions polynômes du troisième degré . . . . .          | 41        |
| 7.2.1    | Dérivée . . . . .   | 41        |
| 7.2.2    | Étude des variations . . . . .                            | 41        |
| 7.3      | Application à l'économie . . . . .                        | 42        |
| <b>8</b> | <b>Probabilités</b>                                       | <b>43</b> |
| 8.1      | Épreuve de Bernoulli . . . . .                            | 43        |
| 8.2      | Loi binomiale . . . . .                                   | 43        |
| 8.3      | À la calculatrice . . . . .                               | 45        |
| <b>A</b> | <b>Calculatrices et statistiques</b>                      | <b>47</b> |
| <b>B</b> | <b>Dérivées des fonctions usuelles</b>                    | <b>49</b> |

# Chapitre 1

## Proportions

Dans la vie courante, notamment dans la presse, à la radio, . . . on entend souvent parler de pourcentages : *en juin 2013, 86,8 % des candidats ont réussi le bac, dernièrement, le prix du paquet de cigarettes <sup>1</sup> a augmenté de 10 %, . . .*

L'objet des deux premiers chapitres que nous verrons cette année est d'essayer de comprendre la signification de ces pourcentages (sont-ils de même nature ?), nous allons aussi apprendre à les utiliser, les calculer et les interpréter.

### 1.1 Calcul d'une proportion

#### 1.1.1 Définitions et calculs

##### Définition 1.1 (Vocabulaire)

Une *population* est un ensemble d'*individus* qui peuvent être des personnes, des animaux, des objets, . . .

L'*effectif* d'une population est le nombre d'individus de la population.

Une *sous-population* est un ensemble d'individus appartenant tous à une même population plus grande.

##### Définition 1.2

Dans une population  $E$  d'effectif  $n_E$  on définit une sous-population  $A$  d'effectif  $n_A$ . La *proportion* (ou *fréquence*) de la sous-population  $A$  dans la population  $E$  est le quotient des effectifs :

$$p = \frac{n_A}{n_E} = \frac{\text{nombre d'individus de la sous-population}}{\text{nombre total d'individus}}$$

##### Exemple 1.1

En juillet 2013, le nombre de demandeurs d'emploi en France était d'environ 3 280 000, et la population active était d'environ 31 500 000. La proportion de demandeurs d'emploi dans la population active (ou taux de chômage) était donc de :

$$p = \frac{\text{nombre de demandeurs d'emploi}}{\text{population active}} = \frac{3\,280\,000}{31\,500\,000} \approx 0,104$$

---

1. Fumer nuit gravement à la santé.

**Remarque 1.1**

Avec les notations de la définition 1.2,  $A$  étant une sous-population de  $E$ , on a :  $n_A \leq n_E$ , donc nécessairement, on a :  $0 \leq p \leq 1$ .

**Remarque 1.2**

Une proportion  $p$  est souvent exprimée en pourcentage.

**Remarque 1.3 (Pourcentages)**

Attention aux écritures en pourcentages ! Dans une classe de 25 élèves 18 sont des filles.

On peut écrire : « La proportion de filles est  $\frac{18}{25} = 0,72 = \frac{72}{100} = 72\%$  »

Ou encore : « La pourcentage de filles est  $\frac{18}{25} \times 100 = 0,72 \times 100 = 72$  »

Mais :  $\frac{18}{25} \times 100 \neq 72\%$

## 1.1.2 Exemples de calculs

**Exemple 1.2**

En 2010, on dénombrait 237 434 entreprises dont l'activité principale est le tourisme. Parmi elles, 18 884 sont des hôtels ou hébergements similaires.

Quelle était la proportion d'hôtels dans les entreprises de tourisme en 2010 ? Donner la réponse arrondie au millième puis le pourcentage au dixième.

**Exemple 1.3**

Toujours en 2010, les entreprises du tourisme employaient 633 307 personnes dont 18,79 % travaillaient dans des hôtels.

Combien d'employés travaillaient en hôtels en 2010 ?

**Exemple 1.4**

Le chiffre d'affaires réalisés par les hôtels en 2010 s'élève à 15 821 millions d'euros et représente 18,77 % du chiffre d'affaires de toutes les entreprises de tourisme.

Quel était le chiffre d'affaires des entreprises de tourisme en 2010 ?

## 1.2 Comparaisons, additions, multiplications

### 1.2.1 Comparaisons

**Propriété 1.1**

On ne peut comparer deux proportions à partir des effectifs des sous-populations que si les deux sous-populations sont issues d'une *même* population (ou de deux populations de même effectif).

**En effet**, une proportion est un quotient (donc une fraction) et vous avez appris en cinquième que pour comparer deux fractions, on doit les écrire avec le même dénominateur. Ici, les deux dénominateurs égaux signifient que les deux populations totales sont identiques.

**Exemple 1.5**

Hier, entre 20 h et 20 h 30, 7 400 000 français étaient devant leur télévision (population  $E$ ). Parmi eux, 2 300 000 regardaient France 2 (population  $A$ ), et 1 300 000 regardaient France 3

(population  $B$ ). Les populations  $A$  et  $B$  sont deux sous-populations de  $E$ , donc sans faire de calculs, on peut affirmer que  $p_B \leq p_A$ . ( $p_B \approx 0,176$ , et  $p_A \approx 0,311$ ).

Entre 23 h et 23 h 30, seuls 2 100 000 regardaient encore la télé (population  $F$ ). Parmi eux, 420 000 regardaient Arte (population  $C$ ). On a  $p_C = \frac{420\,000}{2\,100\,000} = 0,2$ . Donc  $p_B < p_C$  pourtant  $n_B > n_C$ . (la proportion des téléspectateurs d'Arte à 23 h était plus importante que celle de France 3 à 20 h, néanmoins, France 3 avait plus de téléspectateurs.)

### 1.2.2 Proportion et réunion

**Définition 1.3** (Déjà vue en seconde en probabilités)

Soit  $A$  et  $B$  deux sous-populations d'une population  $E$ . Alors :

- l'ensemble des individus qui appartiennent à  $A$  et à  $B$  est noté  $A \cap B$  (on lit  $A$  *inter*  $B$ ) ;
- l'ensemble des individus qui appartiennent à  $A$  ou à  $B$  ou aux deux est noté  $A \cup B$  (on lit  $A$  *union*  $B$ ).

#### Exemple 1.6

Dans une classe de 33 élèves, on a regroupé les effectifs dans un tableau :

|                        | externes<br>pop $B$ | demi-pensionnaires<br>pop $\bar{B}$ | Total |
|------------------------|---------------------|-------------------------------------|-------|
| garçons : pop $A$      | 6                   | 8                                   | 14    |
| filles : pop $\bar{A}$ | 4                   | 15                                  | 19    |
| total                  | 10                  | 23                                  | 33    |

Dans cet exemple, la population  $E$  est l'ensemble de la classe,  $A$  représente les garçons,  $B$  les externes. On a alors :

- l'ensemble  $A \cap B$  représente la population des garçons externes ;
- l'ensemble  $A \cap \bar{B}$  représente la population des garçons demi-pensionnaires ;
- l'ensemble  $A \cup B$  représente la population des élèves qui sont soit des garçons soit des externes, c'est-à-dire tous les garçons plus les filles externes ;
- ...

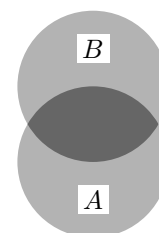
#### Propriété 1.2

Si  $A$  et  $B$  sont deux sous-populations d'une même population  $E$ , alors la proportion de la sous-population  $A \cup B$  est la somme des proportions de  $A$  et de  $B$  diminuée de la proportion de  $A \cap B$ . On écrit :

$$p_{A \cup B} = p_A + p_B - p_{A \cap B}$$

#### Idée de la démonstration :

En ajoutant les populations de  $A$  et de  $B$  on compte deux fois les individus qui sont à la fois dans  $A$  et dans  $B$  ; il faut donc les retirer une fois.



**Exemple 1.7**

En reprenant les données de l'exemple 1.6, on a :

$$- p_A = \frac{14}{33}, p_B = \frac{10}{33};$$

$$- p_{A \cap B} = \frac{6}{33} \text{ et } p_{A \cup B} = \frac{8+6+4}{33} = \frac{18}{33}.$$

On a bien  $p_{A \cup B} = p_A + p_B + p_{A \cap B}$ .

**Exemple 1.8**

Dans une classe de 35 élèves (population  $E$ ), on a fait un contrôle en maths et un en français. Voici les résultats :

- 23 ont eu la moyenne en maths (population  $A$ ),
- 13 ont eu la moyenne en français (population  $B$ ), et parmi eux,
- 8 ont eu la moyenne aux deux contrôles (population  $A \cap B$ ).

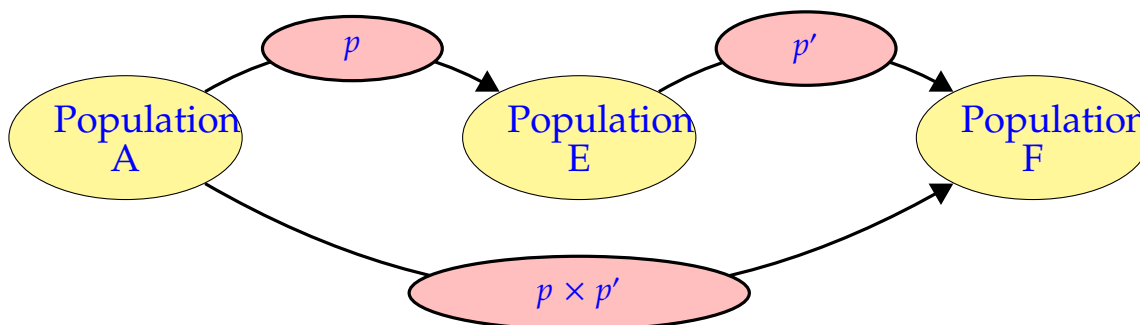
La population des élèves ayant eu la moyenne à l'une au moins des deux épreuves est  $A \cup B$ .

On a donc :

$$p_{A \cup B} = p_A + p_B - p_{A \cap B} = \frac{23}{35} + \frac{13}{35} - \frac{8}{35} = \frac{28}{35} = 0,8$$

**1.2.3 Proportions échelonnées****Propriété 1.3**

Si  $p$  est la proportion d'une population  $A$  dans une population  $E$ , et  $p'$  est la proportion de cette population  $E$  dans une population  $F$ , alors, la proportion de  $A$  dans  $F$  est  $p \times p'$ .

**Exemple 1.9**

La proportion des anglistes (population  $A$ ) dans l'ensemble des classes de seconde d'un lycée (population  $E$ ) est  $p_1 = 0,6$ . La proportion des élèves de seconde dans l'ensemble des élèves du lycée (population  $F$ ) est  $p_2 = 0,4$ . On peut en déduire que la proportion des élèves de seconde anglistes dans la population du lycée est :  $p = p_1 \times p_2 = 0,24$ .

**Remarque 1.4**

Dans un exercice, pour utiliser la formule «  $P = p \times p'$  » de la propriété 1.3, il faut commencer par écrire ce que sont  $P$ ,  $p$ , et  $p'$  avec :

- $P$  la proportion de plus petit ensemble considéré dans le plus grand ;
- $p$  et  $p'$  étant les deux autres proportions.



# Chapitre 2

## Droites. Systèmes

Dire que le point  $M$  du plan a pour coordonnées  $(x; y)$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  signifie que :  $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$ . On note  $M(x; y)$ .  $x$  est appelée l'abscisse de  $M$  et  $y$  son ordonnée. Si les axes du repère sont perpendiculaires, on dit que le repère est orthogonal, et si en plus l'unité est la même sur les deux axes, on dit que le repère est orthonormé.

Dans la suite du chapitre, le plan sera muni d'un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

### 2.1 Coefficient directeur

#### 2.1.1 Définition

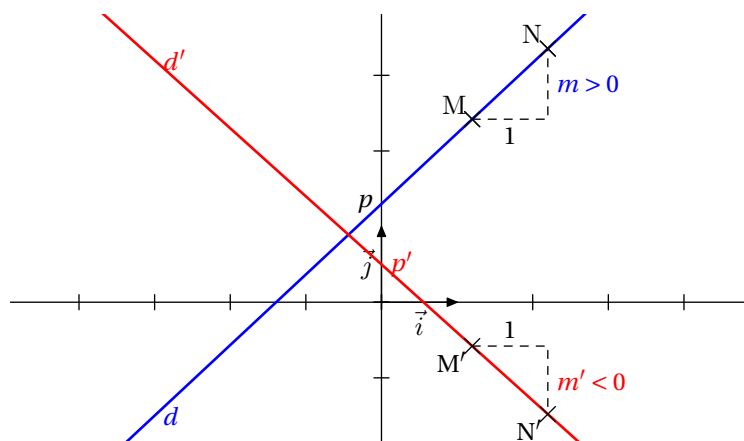
##### Propriété 2.1

Soit  $(D)$  une droite du plan, non parallèle à l'axe des ordonnées. Pour tous les points  $M$  et  $N$  (distincts l'un de l'autre) de la droite  $D$ , le quotient :  $m = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M}$  est constant.

Ce nombre  $m$  est appelé *coefficient directeur* de la droite  $D$ .

##### Remarque 2.1

Si on choisit deux points  $M$  et  $N$  de la droite  $D$  tels que  $x_N - x_M = 1$ , on a alors :  $m = y_N - y_M$  ou encore  $y_N = y_M + m$  :



##### Exemple 2.1

On donne  $A(4; 3)$  et  $B(5; 1,5)$ . Déterminer le coefficient directeur  $m$  de la droite  $(AB)$ .

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1,5 - 3}{5 - 4} = -1,5$$

Cela signifie qu'un point de la droite  $(AB)$  qui parcourt 1 unité horizontalement, va « descendre » de 1,5 unités verticalement<sup>1</sup>.

### 2.1.2 Droites parallèles

#### Propriété 2.2

Soit deux droites  $d_1$  et  $d_2$ , non parallèles à l'axe des ordonnées du repère :

- si  $d_1$  et  $d_2$  sont parallèles, alors elles ont le même coefficient directeur ;
- réciproquement, si  $d_1$  et  $d_2$  ont le même coefficient directeur, alors elles sont parallèles.

#### Remarque 2.2

On peut aussi dire : les droites  $d_1$  et  $d_2$  sont parallèles *si et seulement si* elles ont le même coefficient directeur.

## 2.2 Équations de droites

### 2.2.1 Droites non parallèles à l'axe des ordonnées

#### Propriété 2.3

Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme  $y = mx + p$ . Cela signifie que :

- si un point a des coordonnées qui vérifient l'équation, alors il est sur la droite ;
- réciproquement, si un point est sur la droite, alors ses coordonnées vérifient l'équation.

L'équation  $y = mx + p$  est appelée *équation réduite* de la droite  $d$ .

Le réel  $p$  est appelé *ordonnée à l'origine* de la droite  $d$  : c'est l'ordonnée du point d'intersection de  $d$  et de l'axe des ordonnées.

#### Exemple 2.2

La droite d'équation  $y = 2x - 3$  a pour coefficient directeur 2 et pour ordonnée à l'origine  $-3$ . Elle passe donc par le point  $P(0; -3)$ , et si on se déplace sur la droite de 1 unité horizontalement, on se déplacera verticalement de 2 unités. Donc le point  $A(0 + 1; -3 + 2)$  appartient aussi à la droite. Finalement  $d$  est la droite  $(AP)$  avec  $A(1; -1)$  et  $P(0; -3)$ .

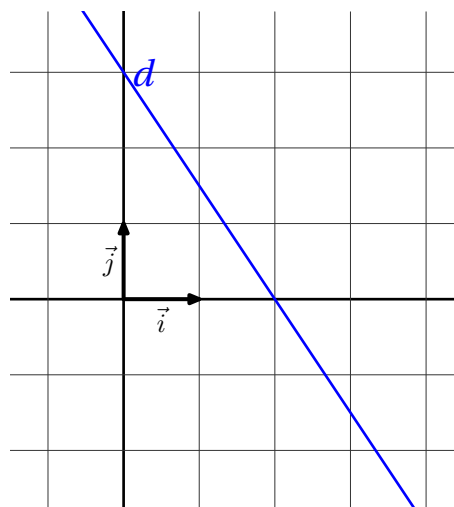
#### Exemple 2.3

Déterminer l'équation réduite de la droite  $d$  tracée ci-contre :

L'équation réduite de la droite  $d$  est de la forme  $y = mx + p$ . La droite  $d$  coupe l'axe des ordonnées au point  $P$  de coordonnées  $(0; 3)$  donc l'ordonnée à l'origine vaut 3 :  $p = 3$ .

La droite  $d$  passe aussi par le point  $A(2; 0)$ . On a donc  $m = \frac{y_A - y_P}{x_A - x_P} = \frac{0 - 3}{2 - 0} = -1,5$ .

Ainsi la droite  $d$  a pour équation réduite :  $y = -1,5x + 3$ .



1. En supposant le repère orthogonal.

### 2.2.2 Droite parallèle à l'axe des ordonnées

#### Propriété 2.4

Soit  $d$  une droite parallèle à l'axe des ordonnées. Tous les points de la droite  $d$  ont la même abscisse. Si on note  $k$  cette abscisse, on dit que la droite  $d$  a pour équation réduite  $x = k$ .

#### Remarque 2.3 (Attention !)

La droite  $d$  d'équation  $x = k$  pas de coefficient directeur, ni d'ordonnée à l'origine.

## 2.3 Systèmes d'équations linéaires

### 2.3.1 Système de deux équations à deux inconnues

Un système de deux équations linéaires à deux inconnues  $x$  et  $y$  est un couple d'égalités comportants deux nombres inconnus que l'on note  $x$  et  $y$ .

#### Exemple 2.4

$$\text{Soit } (S) : \begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ -2x + y = 5 \end{cases}$$

$(S)$  est un système de deux équations à deux inconnues. Le couple  $(-1; 3)$  est solution de ce système car en remplaçant  $x$  par  $-1$  et  $y$  par  $3$  dans chacune des deux équations du système, on obtient une égalité vraie :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 3 \times (-1) + 2 \times 3 = 3 \\ -2x + y = -2 \times (-1) + 3 = 5 \end{cases}$$

### 2.3.2 Interprétation graphique d'un système linéaire

#### Exemple 2.5

Résoudre graphiquement le système suivant :  $\begin{cases} 3x + 2y = -8 \\ x + 2y = -4 \end{cases}$

On transforme les équations pour les obtenir sous la forme  $y = mx + p$ . On obtient le

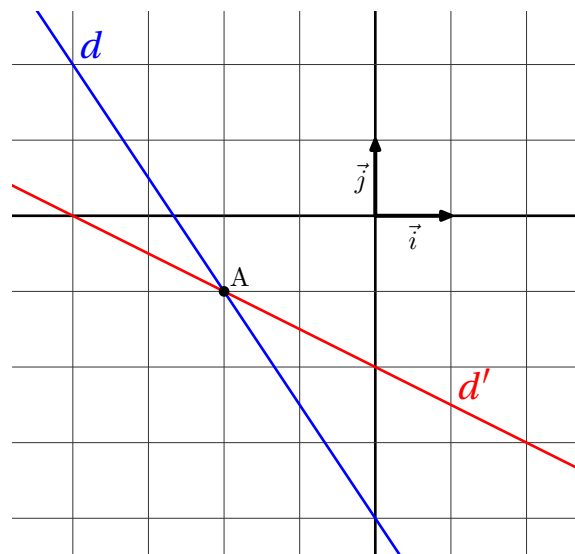
système suivant :  $\begin{cases} 2y = -3x - 8 \\ 2y = -x - 4 \end{cases}$

$$\text{Soit : } \begin{cases} y = -1,5x - 4 \\ y = -0,5x - 2 \end{cases}$$

On trace les droites  $d$  et  $d'$  d'équations respectives  $y = -1,5x - 4$  et  $y = -0,5x - 2$  dans un même repère.

Ces deux droites se coupent au point  $A$  de coordonnées  $(-2; -1)$ .

Donc  $\mathcal{S} = \{(-2; -1)\}$ .



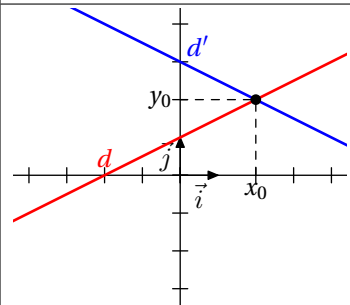
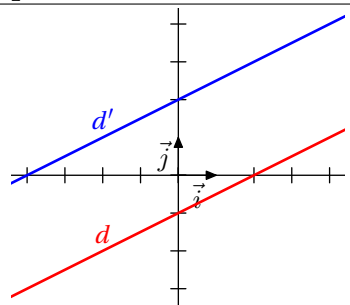
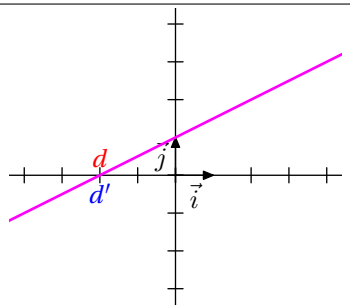
### Récapitulons...

Un système de deux équations linéaires peut être représenté par deux droites dans un repère (chaque équation est représentée par une droite). Les solutions du système sont alors les coordonnées des points qui vérifient les deux équations donc qui appartiennent aux deux droites.

On considère un système (S) de deux équations linéaires à deux inconnues :

$$(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

On note  $d$  et  $d'$  les droites associées aux deux équations du système. On a alors trois possibilités :

| Les droites sont sécantes  | Les droites sont strictement parallèles  | Les droites sont confondues  |
|--|--|--|
|  |  |  |
| Une unique solution $(x_0; y_0)$   | Pas de solution  | Tous les couples de coordonnées des points des droites sont solution.                |

# Chapitre 3

## Évolutions

Dans le premier chapitre, nous avons parlé de pourcentages lorsqu'on calculait des *proportions*. Dans ce chapitre, nous allons encore parler de pourcentages mais cette fois pour quantifier des *variations*.

### 3.1 Variation absolue. Taux d'évolution

#### Définition 3.1

On considère deux nombres réels strictement positifs  $y_1$  et  $y_2$ .

On appelle *variation absolue* entre  $y_1$  et  $y_2$  le nombre  $y_2 - y_1$ .

On appelle *taux d'évolution* (ou variation relative) entre  $y_1$  et  $y_2$  le nombre  $t = \frac{y_2 - y_1}{y_1}$ .

En pourcentage la variation est de  $p$  % avec  $p = 100 \times t$ .

#### Exemple 3.1

Le PIB de la France en 2011 était de 30 324 € par habitant. En 2012, il était de 30 792 € par habitant.

La variation absolue du PIB par habitant entre 2011 et 2012 est :  $30\,792 - 30\,324 = 468$  €.

Le taux d'évolution du PIB par habitant entre 2011 et 2012 est :

$$t = \frac{30\,792 - 30\,324}{30\,324} \approx 0,015 \text{ soit environ } 1,5\%.$$

#### Remarque 3.1

Si le taux d'évolution est positif, il s'agit d'une augmentation, s'il est négatif, il s'agit d'une diminution.

#### Exemple 3.2

À Saint-Jean de Maurienne, la population était de 8 685 habitants en 2006. En 2010 elle était de 8 242 habitants. Le taux de variation de la population de Saint-Jean de Maurienne entre 2006 et 2010 est égal à :

$$\frac{8\,242 - 8\,685}{8\,685} \approx -0,051.$$

La population a donc *diminué* d'environ 5,1 %.

**Remarque 3.2**

On écrit aussi :

$$t = \frac{\text{Valeur d'arrivée} - \text{Valeur de départ}}{\text{Valeur de départ}} = \frac{V_A - V_D}{V_D}$$

**Remarque 3.3** (Vocabulaire)

En mai 2005, 35 % des Belges étaient satisfaits de leur premier ministre ; en juin 2005 ils étaient 42 %. On dit que la côte de popularité du premier ministre belge a augmenté de 7 *points* et non pas de 7 % : le % n'est pas une unité de mesure.

## 3.2 Coefficient multiplicateur

**Propriété 3.1**

Si le taux d'évolution entre  $V_D$  et  $V_A$  est de  $x\%$  alors :

$$V_A = \left(1 + \frac{x}{100}\right) \times V_D$$

Le nombre  $\left(1 + \frac{x}{100}\right)$  est appelé *coefficient multiplicateur* de l'évolution, on le note souvent *CM*. De plus :

- si  $\left(1 + \frac{x}{100}\right) < 1$ , il traduit une baisse ;
- si  $\left(1 + \frac{x}{100}\right) > 1$ , il traduit une hausse.

**Remarque 3.4**

En notant  $t = \frac{x}{100}$ , on a  $CM = 1 + t$ .

**Exemple 3.3**

Pendant les soldes, un commerçant baisse les prix de 25 %. Puisque c'est une baisse, le taux d'évolution est négatif ; on a donc :  $t = -\frac{25}{100} = -0,25$ . Le coefficient multiplicateur vaut donc  $CM = 1 + (-0,25) = 0,75$ .

Si un article coûtait 154 €, son prix soldé est  $154 \times 0,75 = 115,50$  €.

Plus généralement, si un article coûtait  $x$  euros, le nouveau prix  $y$  est :

$$y = 0,75 \times x$$

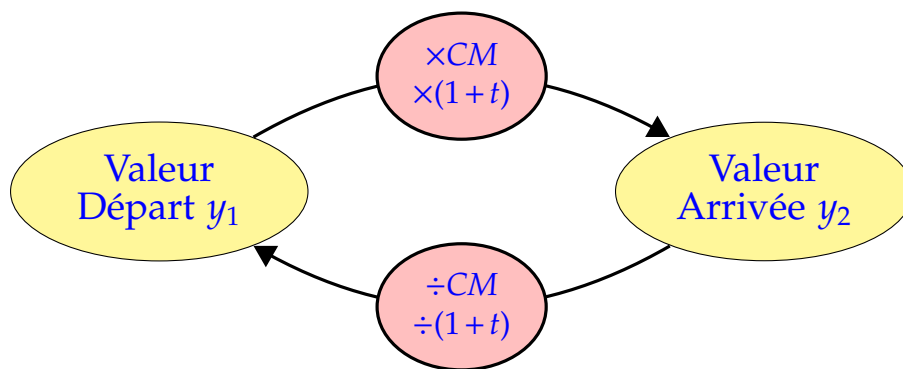
**Exemple 3.4**

En trois ans, le prix des composants électroniques a été divisé par 4. Quel est le pourcentage de baisse des composants électroniques ?

Le coefficient multiplicateur est  $\frac{1}{4} = 0,25$  ; on appelle  $t$  le taux d'évolution du prix des composants électroniques. On a :  $1 + t = 0,25$ , donc  $t = 0,25 - 1 = -0,75$ . Donc le prix des composants électroniques a baissé de 75 % en trois ans.

**Remarque 3.5**

Ceci peut se résumer par le schéma suivant :

**Remarque 3.6**

Toutes les questions sur les taux d'évolution peuvent être résolues en complétant le tableau suivant :

| Valeur de départ<br>$V_D$<br>$= \frac{V_A}{CM}$ | Valeur d'arrivée<br>$V_A$<br>$= V_D \times CM$ | Variation relative<br>$t = \frac{V_A - V_D}{V_D}$<br>$t = \frac{x}{100}$ | Évolution de $x\%$<br>$x = 100 \times t$<br>$x = 100(CM - 1)$ | Coefficient multiplicateur<br>$CM = 1 + \frac{x}{100}$<br>$CM = 1 + t$ | augmentation ou réduction<br>$\uparrow$ si $CM > 1$<br>$\downarrow$ si $CM < 1$ |
|---|--|--|---|--|---|
| 12  | 13,56  |  |   |  |   |
| 14,5  | 11,6   |  |   |  |   |
| 54  |  |  | -45   |  |   |
|   | 158,40   | 0,32   |   |  |   |
|   | 54,60  |  |   | 0,65   |   |
| 87  |  | -0,12  |   |  |   |
| 125   |  |  |   | 1,24   |   |

## 3.3 Évolutions successives. Évolutions réciproques

### 3.3.1 Évolutions successives

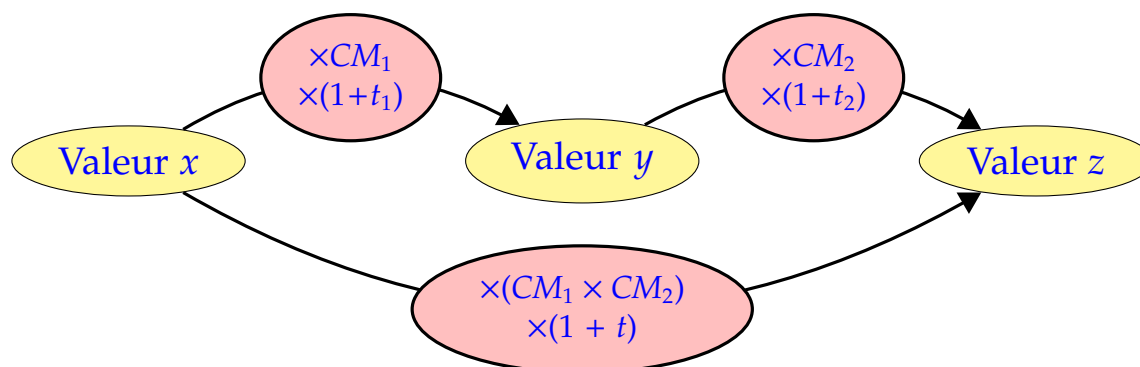
**Propriété 3.2**

Lorsqu'un nombre subit plusieurs évolutions successives, le coefficient multiplicateur de l'évolution totale est le produit des coefficients multiplicateurs de chaque évolution.

Autrement dit, si on a trois nombres  $x$ ,  $y$ , et  $z$ , on note  $t_1$  le taux d'évolution de  $x$  à  $y$ ,  $t_2$  le

taux d'évolution de  $y$  à  $z$  et  $t$  le taux d'évolution de  $x$  à  $z$ . On a alors :

$$1 + t = (1 + t_1) \times (1 + t_2)$$



### Exemple 3.5

Après avoir augmenté ses prix de 10 %, un commerçant décide de solder ses articles à -25 %. L'augmentation a un coefficient multiplicateur de  $(1 + \frac{10}{100}) = 1,10$  ; le coefficient multiplicateur de la baisse vaut :  $(1 - \frac{25}{100}) = 0,75$ . Au total, le coefficient multiplicateur de l'évolution totale est donc égal à :  $1,10 \times 0,75 = 0,825$ .

En notant  $t$  le taux d'évolution correspondant on a  $1 + t = 0,825$ . Donc  $t = -0,175$  ; soit une baisse de 17,5 %.

### Exemple 3.6

Entre 2002 et 2004, la population d'un village a baissé de 44 %. Entre 2002 et 2003, elle avait baissé de 30 %. De combien a-t-elle baissé entre 2003 et 2004 ?

Soit  $CM$  le coefficient directeur de la baisse entre 2003 et 2004.

$$\text{On a : } \left(1 - \frac{30}{100}\right) \times CM = \left(1 - \frac{44}{100}\right)$$

$$\text{donc : } 0,7 \times CM = 0,56$$

$$\text{donc : } CM = \frac{0,56}{0,7} = 0,8$$

Ainsi, entre 2003 et 2004 la population a baissé de 20 % (car  $0,8 - 1 = -0,2$ ).

## 3.3.2 Évolutions réciproques

### Remarque 3.7

Si le prix d'un produit augmente de  $p$  %, puis qu'il baisse de  $p$  %, il ne reviendra pas au prix d'origine :

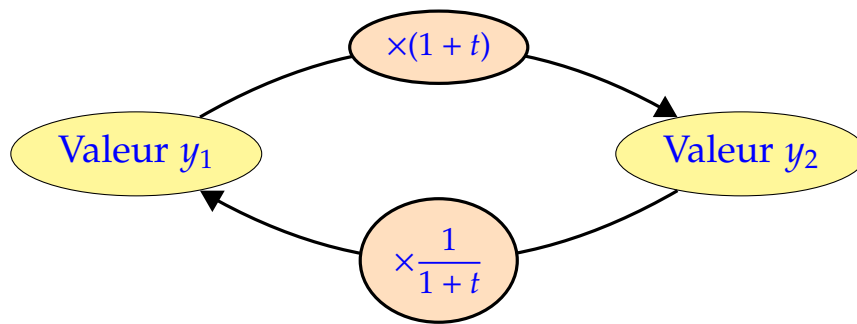
un article coûte 50 €. Il augmente de 10 %, puis baisse de 10 %. Son prix définitif est :  $50 \times (1 + 0,10) \times (1 - 0,10) = 50 \times 1,1 \times 0,9 = 49,50$  €.

### Propriété 3.3

Soit  $y_1$  et  $y_2$  deux réels positifs. On note  $t$  le taux d'évolution de  $y_1$  à  $y_2$  ( $t = \frac{y_2 - y_1}{y_1}$ ). Le taux d'évolution *reciproque*  $t'$  est le taux d'évolution de  $y_2$  à  $y_1$ . On a alors :

$$1 + t' = \frac{1}{1 + t}$$



**Exemple 3.7**

Le prix d'un article augmente de 25 %. Quel doit être le taux  $r$  de baisse pour revenir au prix initial ?

On a :  $1+t = \frac{1}{1+0,25}$  donc  $t = \frac{1}{1,25} - 1 = -0,20$ . Il faut donc appliquer une baisse de 20 % pour que l'article revienne au prix initial.

*« Ce qui est affirmé sans preuve peut être  
nié sans preuve. »*

EUCLIDE D'ALEXANDRIE

# Chapitre 4

## Fonctions polynômes de degré 2

En seconde, on a étudié la fonction carré ( $x \mapsto x^2$ ) et les fonctions définies à l'aide de la fonction carré par  $f : x \mapsto a(x - \alpha)^2 + \beta$ . L'an dernier, nous avons appris à étudier les variations de ces fonctions, mais nous n'avons pas donné de méthode « simple » pour déterminer les solutions de  $f(x) = 0$ . C'est l'objet de ce chapitre. . .

### 4.1 Fonction polynôme de degré 2

#### Définition 4.1

On appelle *fonction polynôme de degré 2* toute fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ où } a, b \text{ et } c \text{ sont des réels avec } a \neq 0$$

#### Exemple 4.1

La fonction  $f : x \mapsto 2x^2 - 5x + 1$  est une fonction polynôme de degré 2 (on dit aussi du second degré).

#### Propriété 4.1 (vue en seconde)

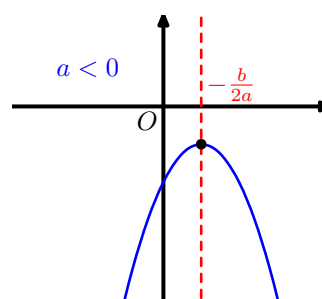
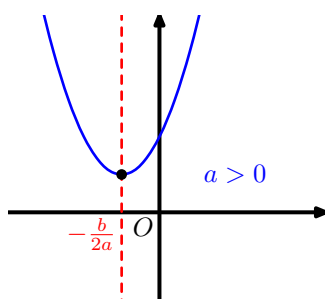
La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré dans un repère orthogonal du plan est une *parabole*. De plus en notant  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , on a :

- si  $a > 0$ , la parabole est tournée « vers le haut » ;
- si  $a < 0$ , la parabole est tournée « vers le bas » ;

Dans tous les cas, on a :

- le point  $S$  d'abscisse  $-\frac{b}{2a}$  est le *sommet* de la parabole ;
- c'est à l'abscisse  $-\frac{b}{2a}$  que la fonction change de sens de variation ;
- la droite verticale d'équation  $x = -\frac{b}{2a}$  est un axe de symétrie de la parabole.

On a donc deux types de tracé possibles :



**Propriété 4.2** (Conséquence)

Les variations d'une fonction polynôme du second degré  $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$  sont résumées dans les tableaux ci-dessous :

Si  $a > 0$

|     |           |                               |           |
|-----|-----------|-------------------------------|-----------|
| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{b}{2a}$               | $+\infty$ |
| $f$ |           | $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ |           |

Si  $a < 0$

|     |           |                               |           |
|-----|-----------|-------------------------------|-----------|
| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{b}{2a}$               | $+\infty$ |
| $f$ |           | $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ |           |

## 4.2 Résolution d'une équation du second degré

Dans cette partie, on considère une fonction polynôme du second degré  $f$  définie par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ avec } a \neq 0$$

**Définition 4.2**

On appelle *discriminant* de l'équation du second degré  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$  le nombre noté  $\Delta$  défini par :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

**Exemple 4.2**

Le discriminant de l'équation  $-2x^2 - 5x + 3 = 0$  est  $\Delta = (-5)^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 25 + 24 = 49$ .

L'existence de solutions à l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  dépend du signe de  $\Delta$  :

**Théorème 4.1** (admis)

Soit  $ax^2 + bx + c = 0$  une équation du second degré et  $\Delta$  son discriminant.

si  $\Delta < 0$ , l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  n'a pas de solution.

si  $\Delta > 0$ , l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  a deux solutions distinctes :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

si  $\Delta = 0$ , l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  a une unique solution :  $x_0 = \frac{-b}{2a}$ .

**Remarque 4.1**

Lorsque  $a$  et  $c$  sont de signes contraires (et non nuls), le produit  $-ac$  est strictement positif donc  $b^2 - 4ac > 0$ , et donc l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  a deux solutions distinctes.

**Exemple 4.3**

Résoudre l'équation  $x^2 - 3x + 4 = 0$ .

On calcule  $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9 - 16 = -7 < 0$ . Donc cette équation n'a pas de solution :  $\mathcal{S} = \emptyset$ .

**Exemple 4.4**

Résoudre l'équation  $9x^2 - 30x + 25 = 0$

On calcule  $\Delta = (-30)^2 - 4 \times 9 \times 25 = 900 - 900 = 0$ .

L'équation a donc une unique solution  $x_0 = -\frac{-30}{2 \times 9} = \frac{5}{3}$ .

#### Exemple 4.5

Résoudre l'équation  $4x^2 + 11x - 3 = 0$ .

On calcule  $\Delta = 11^2 - 4 \times 4 \times (-3) = 121 + 48 = 169 > 0$ . Donc l'équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-11 - \sqrt{169}}{2 \times 4} = \frac{-24}{8} = -3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-11 + \sqrt{169}}{2 \times 4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ -3; \frac{1}{4} \right\}$$

## 4.3 Factorisation et signe

### 4.3.1 Factorisation d'un trinôme

#### Propriété 4.3

Soit  $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$  un polynôme du second degré ( $a \neq 0$ ). On note  $\Delta$  son discriminant ( $\Delta = b^2 - 4ac$ ). On a :

- si  $\Delta < 0$ , alors on ne peut pas factoriser  $f(x)$ ;
- si  $\Delta = 0$ , alors, en notant  $x_0 = -\frac{b}{2a}$  on a :  $f(x) = a(x - x_0)^2$ ;
- si  $\Delta > 0$ , alors, en notant  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ , on a :  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

#### Démonstration :

on peut démontrer cette propriété (les deux derniers points) en développant les expressions proposées.

#### Exemple 4.6

En reprenant les polynômes des exemples 4.4 et 4.5, on obtient :

$$9x^2 - 30x + 25 = 9\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 \quad \text{et} \quad 4x^2 + 11x - 3 = 4(x + 3)\left(x - \frac{1}{4}\right)$$

### 4.3.2 Étude du signe d'un trinôme

#### Exemple 4.7

Reprenons le polynôme de l'exemple 4.5 :

$$f(x) = 4x^2 + 11x - 3 = 4(x + 3)\left(x - \frac{1}{4}\right)$$

Étudier le signe de  $f(x)$  c'est trouver les valeurs de  $x$  pour lesquelles  $f(x)$  est positif et celles pour lesquelles  $f(x)$  est négatif. Pour résoudre ce problème, on utilise un tableau de signes :

|                 |           |      |               |           |   |
|-----------------|-----------|------|---------------|-----------|---|
| $x$             | $-\infty$ | $-3$ | $\frac{1}{4}$ | $+\infty$ |   |
| 4               | +         |      | +             | +         |   |
| $x+3$           | -         | 0    | +             | +         |   |
| $x-\frac{1}{4}$ | -         |      | -             | 0         | + |
| $f(x)$          | +         | 0    | -             | 0         | + |

Ce tableau signifie que si  $x < -3$  ou si  $x > \frac{1}{4}$  alors  $f(x) > 0$  et si  $-3 < x < \frac{1}{4}$  alors  $f(x) < 0$ .

#### Propriété 4.4 (généralisation)

Soit  $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$  une fonction polynôme du second degré ( $a \neq 0$ ). On note  $\Delta$  son discriminant ( $\Delta = b^2 - 4ac$ ). On a :

- si  $\Delta < 0$ , alors, pour toutes les valeurs de  $x$ ,  $f(x)$  est du signe de  $a$  ;
- si  $\Delta = 0$ , alors pour toutes les valeurs de  $x$  autres que  $-\frac{b}{2a}$ ,  $f(x)$  est du signe de  $a$  ;
- si  $\Delta > 0$ , alors, en notant  $x_1$  et  $x_2$  les deux solutions de  $f(x) = 0$  telles que  $x_1 < x_2$ , on a :
  - $f(x)$  est du signe de  $a$  « à l'extérieur des racines » (c'est-à-dire si  $x < x_1$  ou  $x > x_2$ ) ;
  - $f(x)$  est du signe de  $-a$  « à l'intérieur des racines » (c'est-à-dire si  $x_1 < x < x_2$ ).

#### Exemple 4.8

Soit  $f(x) = x^2 - x - 2$  et  $g(x) = -2x^2 + 2x + 12$ . Étudier le signe de  $f(x)$  et de  $g(x)$ .

#### Remarque 4.2

La propriété 4.4 peut se résumer par les trois tableaux suivants :

- si  $\Delta < 0$ , on a :

|        |              |           |
|--------|--------------|-----------|
| $x$    | $-\infty$    | $+\infty$ |
| $f(x)$ | signe de $a$ |           |

- si  $\Delta = 0$ , on a :

|        |              |                 |              |
|--------|--------------|-----------------|--------------|
| $x$    | $-\infty$    | $-\frac{b}{2a}$ | $+\infty$    |
| $f(x)$ | signe de $a$ | 0               | signe de $a$ |

- si  $\Delta > 0$ , on a :

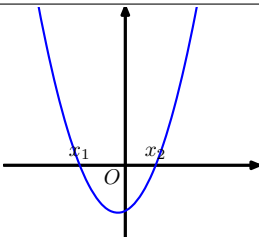
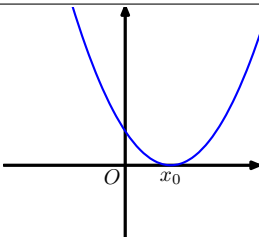
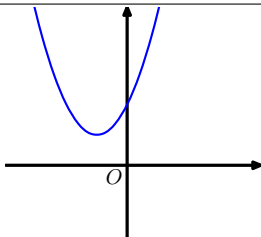
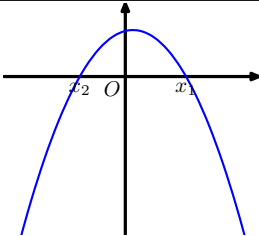
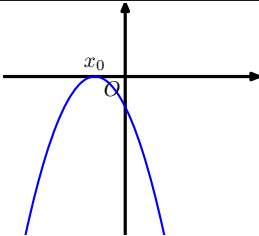
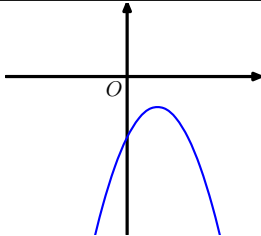
|        |              |       |               |           |              |
|--------|--------------|-------|---------------|-----------|--------------|
| $x$    | $-\infty$    | $x_1$ | $x_2$         | $+\infty$ |              |
| $f(x)$ | signe de $a$ | 0     | signe de $-a$ | 0         | signe de $a$ |

## 4.4 Récapitulatif

On peut regrouper les résultats du chapitre dans le tableau suivant en notant :

- $\mathcal{P}$  la parabole d'équation  $y = ax^2 + bx + c$  où  $a \neq 0$ .
- $\Delta = b^2 - 4ac$  avec :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} \text{ si } \Delta = 0 \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ si } \Delta > 0$$

|         | $\Delta > 0$   | $\Delta = 0$                  | $\Delta < 0$ |                 |           |     |  |                               |  |     |           |       |       |           |        |  |     |     |     |     |     |   |     |           |                 |           |     |  |     |  |     |           |       |           |        |  |     |     |     |  |     |           |                 |           |     |  |                               |  |     |           |           |        |  |     |
|---------|--|-------------------------------|--------------|-----------------|-----------|-----|--|-------------------------------|--|-----|-----------|-------|-------|-----------|--------|--|-----|-----|-----|-----|-----|---|-----|-----------|-----------------|-----------|-----|--|-----|--|-----|-----------|-------|-----------|--------|--|-----|-----|-----|--|-----|-----------|-----------------|-----------|-----|--|-------------------------------|--|-----|-----------|-----------|--------|--|-----|
| $a > 0$ | <div></div> <div><table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>-\frac{b}{2a}</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>f</math></td><td></td><td><math>f\left(-\frac{b}{2a}\right)</math></td><td></td></tr></table><table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>x_1</math></td><td><math>x_2</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>f(x)</math></td><td></td><td><math>+</math></td><td><math>0</math></td><td><math>-</math></td><td><math>0</math></td><td><math>+</math></td></tr></table></div>  | $x$                           | $-\infty$    | $-\frac{b}{2a}$ | $+\infty$ | $f$ |  | $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ |  | $x$ | $-\infty$ | $x_1$ | $x_2$ | $+\infty$ | $f(x)$ |  | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | <div></div> <div><table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>-\frac{b}{2a}</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>f</math></td><td></td><td><math>0</math></td><td></td></tr></table><table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>x_0</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>f(x)</math></td><td></td><td><math>+</math></td><td><math>0</math></td><td><math>+</math></td></tr></table></div>  | $x$ | $-\infty$ | $-\frac{b}{2a}$ | $+\infty$ | $f$ |  | $0$ |  | $x$ | $-\infty$ | $x_0$ | $+\infty$ | $f(x)$ |  | $+$ | $0$ | $+$ | <div></div> <div><table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>-\frac{b}{2a}</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>f</math></td><td></td><td><math>f\left(-\frac{b}{2a}\right)</math></td><td></td></tr></table><table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>f(x)</math></td><td></td><td><math>+</math></td></tr></table></div>  | $x$ | $-\infty$ | $-\frac{b}{2a}$ | $+\infty$ | $f$ |  | $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ |  | $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $f(x)$ |  | $+$ |
| $x$     | $-\infty$  | $-\frac{b}{2a}$               | $+\infty$    |                 |           |     |  |                               |  |     |           |       |       |           |        |  |     |     |     |     |     |   |     |           |                 |           |     |  |     |  |     |           |       |           |        |  |     |     |     |  |     |           |                 |           |     |  |                               |  |     |           |           |        |  |     |
| $f$     |  | $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ |              |                 |           |     |  |                               |  |     |           |       |       |           |        |  |     |     |     |     |     |   |     |           |                 |           |     |  |     |  |     |           |       |           |        |  |     |     |     |  |     |           |                 |           |     |  |                               |  |     |           |           |        |  |     |
| $x$     | $-\infty$  | $x_1$                         | $x_2$        | $+\infty$       |           |     |  |                               |  |     |           |       |       |           |        |  |     |     |     |     |     |   |     |           |                 |           |     |  |     |  |     |           |       |           |        |  |     |     |     |  |     |           |                 |           |     |  |                               |  |     |           |           |        |  |     |
| $f(x)$  |  | $+$                           | $0$          | $-$             | $0$       | $+$ |  |                               |  |     |           |       |       |           |        |  |     |     |     |     |     |   |     |           |                 |           |     |  |     |  |     |           |       |           |        |  |     |     |     |  |     |           |                 |           |     |  |                               |  |     |           |           |        |  |     |
| $x$     | $-\infty$  | $-\frac{b}{2a}$               | $+\infty$    |                 |           |     |  |                               |  |     |           |       |       |           |        |  |     |     |     |     |     |   |     |           |                 |           |     |  |     |  |     |           |       |           |        |  |     |     |     |  |     |           |                 |           |     |  |                               |  |     |           |           |        |  |     |
| $f$     |  | $0$                           |              |                 |           |     |  |                               |  |     |           |       |       |           |        |  |     |     |     |     |     |   |     |           |                 |           |     |  |     |  |     |           |       |           |        |  |     |     |     |  |     |           |                 |           |     |  |                               |  |     |           |           |        |  |     |
| $x$     | $-\infty$  | $x_0$                         | $+\infty$    |                 |           |     |  |                               |  |     |           |       |       |           |        |  |     |     |     |     |     |   |     |           |                 |           |     |  |     |  |     |           |       |           |        |  |     |     |     |  |     |           |                 |           |     |  |                               |  |     |           |           |        |  |     |
| $f(x)$  |  | $+$                           | $0$          | $+$             |           |     |  |                               |  |     |           |       |       |           |        |  |     |     |     |     |     |   |     |           |                 |           |     |  |     |  |     |           |       |           |        |  |     |     |     |  |     |           |                 |           |     |  |                               |  |     |           |           |        |  |     |
| $x$     | $-\infty$  | $-\frac{b}{2a}$               | $+\infty$    |                 |           |     |  |                               |  |     |           |       |       |           |        |  |     |     |     |     |     |   |     |           |                 |           |     |  |     |  |     |           |       |           |        |  |     |     |     |  |     |           |                 |           |     |  |                               |  |     |           |           |        |  |     |
| $f$     |  | $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ |              |                 |           |     |  |                               |  |     |           |       |       |           |        |  |     |     |     |     |     |   |     |           |                 |           |     |  |     |  |     |           |       |           |        |  |     |     |     |  |     |           |                 |           |     |  |                               |  |     |           |           |        |  |     |
| $x$     | $-\infty$  | $+\infty$                     |              |                 |           |     |  |                               |  |     |           |       |       |           |        |  |     |     |     |     |     |   |     |           |                 |           |     |  |     |  |     |           |       |           |        |  |     |     |     |  |     |           |                 |           |     |  |                               |  |     |           |           |        |  |     |
| $f(x)$  |  | $+$                           |              |                 |           |     |  |                               |  |     |           |       |       |           |        |  |     |     |     |     |     |   |     |           |                 |           |     |  |     |  |     |           |       |           |        |  |     |     |     |  |     |           |                 |           |     |  |                               |  |     |           |           |        |  |     |
| $a < 0$ | <div></div> <div><table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>-\frac{b}{2a}</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>f</math></td><td></td><td><math>f\left(-\frac{b}{2a}\right)</math></td><td></td></tr></table><table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>x_2</math></td><td><math>x_1</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>f(x)</math></td><td></td><td><math>-</math></td><td><math>0</math></td><td><math>+</math></td><td><math>0</math></td><td><math>-</math></td></tr></table></div> | $x$                           | $-\infty$    | $-\frac{b}{2a}$ | $+\infty$ | $f$ |  | $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ |  | $x$ | $-\infty$ | $x_2$ | $x_1$ | $+\infty$ | $f(x)$ |  | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | <div></div> <div><table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>-\frac{b}{2a}</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>f</math></td><td></td><td><math>0</math></td><td></td></tr></table><table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>x_0</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>f(x)</math></td><td></td><td><math>-</math></td><td><math>0</math></td><td><math>-</math></td></tr></table></div> | $x$ | $-\infty$ | $-\frac{b}{2a}$ | $+\infty$ | $f$ |  | $0$ |  | $x$ | $-\infty$ | $x_0$ | $+\infty$ | $f(x)$ |  | $-$ | $0$ | $-$ | <div></div> <div><table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>-\frac{b}{2a}</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>f</math></td><td></td><td><math>f\left(-\frac{b}{2a}\right)</math></td><td></td></tr></table><table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>f(x)</math></td><td></td><td><math>-</math></td></tr></table></div> | $x$ | $-\infty$ | $-\frac{b}{2a}$ | $+\infty$ | $f$ |  | $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ |  | $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $f(x)$ |  | $-$ |
| $x$     | $-\infty$  | $-\frac{b}{2a}$               | $+\infty$    |                 |           |     |  |                               |  |     |           |       |       |           |        |  |     |     |     |     |     |   |     |           |                 |           |     |  |     |  |     |           |       |           |        |  |     |     |     |  |     |           |                 |           |     |  |                               |  |     |           |           |        |  |     |
| $f$     |  | $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ |              |                 |           |     |  |                               |  |     |           |       |       |           |        |  |     |     |     |     |     |   |     |           |                 |           |     |  |     |  |     |           |       |           |        |  |     |     |     |  |     |           |                 |           |     |  |                               |  |     |           |           |        |  |     |
| $x$     | $-\infty$  | $x_2$                         | $x_1$        | $+\infty$       |           |     |  |                               |  |     |           |       |       |           |        |  |     |     |     |     |     |   |     |           |                 |           |     |  |     |  |     |           |       |           |        |  |     |     |     |  |     |           |                 |           |     |  |                               |  |     |           |           |        |  |     |
| $f(x)$  |  | $-$                           | $0$          | $+$             | $0$       | $-$ |  |                               |  |     |           |       |       |           |        |  |     |     |     |     |     |   |     |           |                 |           |     |  |     |  |     |           |       |           |        |  |     |     |     |  |     |           |                 |           |     |  |                               |  |     |           |           |        |  |     |
| $x$     | $-\infty$  | $-\frac{b}{2a}$               | $+\infty$    |                 |           |     |  |                               |  |     |           |       |       |           |        |  |     |     |     |     |     |   |     |           |                 |           |     |  |     |  |     |           |       |           |        |  |     |     |     |  |     |           |                 |           |     |  |                               |  |     |           |           |        |  |     |
| $f$     |  | $0$                           |              |                 |           |     |  |                               |  |     |           |       |       |           |        |  |     |     |     |     |     |   |     |           |                 |           |     |  |     |  |     |           |       |           |        |  |     |     |     |  |     |           |                 |           |     |  |                               |  |     |           |           |        |  |     |
| $x$     | $-\infty$  | $x_0$                         | $+\infty$    |                 |           |     |  |                               |  |     |           |       |       |           |        |  |     |     |     |     |     |   |     |           |                 |           |     |  |     |  |     |           |       |           |        |  |     |     |     |  |     |           |                 |           |     |  |                               |  |     |           |           |        |  |     |
| $f(x)$  |  | $-$                           | $0$          | $-$             |           |     |  |                               |  |     |           |       |       |           |        |  |     |     |     |     |     |   |     |           |                 |           |     |  |     |  |     |           |       |           |        |  |     |     |     |  |     |           |                 |           |     |  |                               |  |     |           |           |        |  |     |
| $x$     | $-\infty$  | $-\frac{b}{2a}$               | $+\infty$    |                 |           |     |  |                               |  |     |           |       |       |           |        |  |     |     |     |     |     |   |     |           |                 |           |     |  |     |  |     |           |       |           |        |  |     |     |     |  |     |           |                 |           |     |  |                               |  |     |           |           |        |  |     |
| $f$     |  | $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ |              |                 |           |     |  |                               |  |     |           |       |       |           |        |  |     |     |     |     |     |   |     |           |                 |           |     |  |     |  |     |           |       |           |        |  |     |     |     |  |     |           |                 |           |     |  |                               |  |     |           |           |        |  |     |
| $x$     | $-\infty$  | $+\infty$                     |              |                 |           |     |  |                               |  |     |           |       |       |           |        |  |     |     |     |     |     |   |     |           |                 |           |     |  |     |  |     |           |       |           |        |  |     |     |     |  |     |           |                 |           |     |  |                               |  |     |           |           |        |  |     |
| $f(x)$  |  | $-$                           |              |                 |           |     |  |                               |  |     |           |       |       |           |        |  |     |     |     |     |     |   |     |           |                 |           |     |  |     |  |     |           |       |           |        |  |     |     |     |  |     |           |                 |           |     |  |                               |  |     |           |           |        |  |     |

*« Ce qui est affirmé sans preuve peut être  
nié sans preuve. »*

EUCLIDE D'ALEXANDRIE



# Chapitre 5

## Suites numériques

### 5.1 Suite de nombres réels

#### 5.1.1 Définition

##### Définition 5.1

On appelle *suite de terme général*  $u_n$ , la liste *ordonnée* des nombres  $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$

On note  $u$  ou  $(u_n)$  la suite de terme général  $u_n$ .

Les nombres  $u_i$  sont appelés les *termes* de la suite.

##### Remarque 5.1

Parfois le premier terme d'une suite peut être  $u_1$  ou  $u_2, \dots$  et non pas  $u_0$ .

##### Exemple 5.1

On définit  $u$  comme la suite des nombres pairs.

Dans ce cas, on a :  $u_0 = 0, u_1 = 2, u_2 = 4, \dots$  On peut écrire aussi  $u_n = 2 \times n$ .

Attention au comptage : ici  $u_3$  est le *terme de rang* 3 mais c'est le *quatrième terme* de la suite.

##### Exemple 5.2

En reprenant la suite des entiers pairs définie dans l'exemple 5.1 par  $u_n = 2 \times n$ , on a :  $u_6 = 2 \times 6 = 12, u_n = 2 \times n$ , mais aussi  $u_p = 2 \times p$  ou encore  $u_t = 2 \times t$ .

Si on choisit comme indice l'entier  $n + 1$  on a  $u_{n+1} = 2 \times (n + 1) = 2n + 2$ .

À ne pas confondre avec  $u_n + 1 = (2 \times n) + 1 = 2n + 1$ .

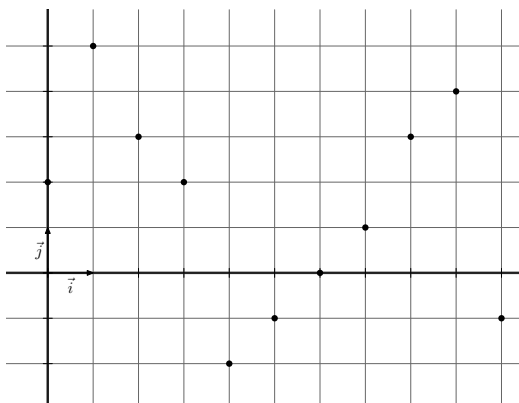
Il est donc très important d'écrire les indices au bon endroit et à la bonne taille !

#### 5.1.2 Représentation graphique

Soit  $u$  une suite numérique. On peut représenter cette suite dans un repère du plan par les points de coordonnées  $(n; u_n)$  dans ce repère.

##### Exemple 5.3

On a représenté ci-dessous une suite  $u$  :



On a par exemple :  $u_0 = 2, u_1 = 5, \dots, u_4 = -2, \dots$

### 5.1.3 Mode de génération

Définir une suite  $u$  c'est être capable de calculer  $u_n$  pour n'importe quelle valeur de  $n$ . Il existe deux façons usuelles pour définir une suite :

- soit on donne l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  :  $u_n = \dots$  et alors on peut remplacer  $n$  par une valeur quelconque pour déterminer  $u_n$  ;
- soit on donne une relation entre un terme et son suivant qui permet, à partir de  $u_0$  de calculer  $u_1$ , puis  $u_2$ , puis  $\dots$

Dans le premier cas on dit que la suite est définie *explicitement*, dans le deuxième cas on dit qu'elle est définie *par récurrence*.

#### Exemple 5.4

On considère la suite  $u$  définie par  $u_n = \frac{1}{2}n + 2$ . On a alors :

$$u_0 = \frac{1}{2} \times 0 + 2 = 2; \quad u_1 = \frac{1}{2} \times 1 + 2 = \frac{5}{2}; \quad u_2 = \frac{1}{2} \times 2 + 2 = 3; \quad \dots$$

Dans cette situation, on est bien en mesure de calculer  $u_n$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .

#### Exemple 5.5

Je possède 1 000 € sur mon livret d'épargne. Chaque année on me reverse dessus 5 % en intérêts et je rajoute 100 €. J'appelle  $u_n$  la somme dont je dispose sur mon livret après  $n$  ans. On a donc :

- pour  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+1} = (1 + \frac{5}{100}) \times u_n + 100 = 1,05u_n + 100$  ;
- la somme disponible sur le livret aujourd'hui est 1 000€. Donc :  $u_0 = 1\,000$  .

On a :  $u_1 = 1,05 \times 1\,000 + 100 = 1\,150$ , puis  $u_2 = 1,05 \times 1\,150 + 100 = 1\,307,50 \dots$  De proche en proche, on peut donc calculer  $u_n$  pour n'importe quelle valeur de  $n$ .

#### Remarque 5.2

Lorsqu'une suite est définie par récurrence, pour calculer  $u_n$ , on est obligé d'avoir calculé avant tous les termes précédents.

### 5.1.4 Variations d'une suite

#### Définition 5.2

On dit qu'une suite est *croissante* si chacun de ses termes est supérieur au terme précédent : si pour tout  $n \in \mathbf{N}$  on a  $u_{n+1} \geq u_n$ .