Cours de mathématiques

Thomas Rey

Classe de première STMG
15 mai 2014

« *Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve.* »
Euclide d'Alexandrie

Table des matières

« *Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve.* »
Euclide d'Alexandrie

Chapitre 1

Proportions

Dans la vie courante, notamment dans la presse, à la radio, ... on entend souvent parler de pourcentages : *en juin 2013, 86,8 % des candidats ont réussi le bac, dernièrement, le prix du paquet de cigarettes*[1] *a augmenté de 10 %*, ...
L'objet des deux premiers chapitres que nous verrons cette année est d'essayer de comprendre la signification de ces pourcentages (sont-ils de même nature ?), nous allons aussi apprendre à les utiliser, les calculer et les interpréter.

1.1 Calcul d'une proportion

1.1.1 Définitions et calculs

Définition 1.1 (Vocabulaire)
Une *population* est un ensemble d'*individus* qui peuvent être des personnes, des animaux, des objets, ...
L'*effectif* d'une population est le nombre d'individus de la population.
Une *sous-population* est un ensemble d'individus appartenant tous à une même population plus grande.

Définition 1.2
Dans une population E d'effectif n_E on définit une sous-population A d'effectif n_A. La *proportion* (ou *fréquence*) de la sous-population A dans la population E est le quotient des effectifs :

$$p = \frac{n_A}{n_E} = \frac{\text{nombre d'individus de la sous-population}}{\text{nombre total d'individus}}$$

Exemple 1.1
En juillet 2013, le nombre de demandeurs d'emploi en France était d'environ 3 280 000, et la population active était d'environ 31 500 000. La proportion de demandeurs d'emploi dans la population active (ou taux de chômage) était donc de :

$$p = \frac{\text{nombre de demandeurs d'emploi}}{\text{population active}} = \frac{3\,280\,000}{31\,500\,000} \approx 0{,}104$$

Remarque 1.1
Avec les notations de la définition 1.2, A étant une sous-population de E, on a : $n_A \leq n_E$, donc nécessairement, on a : $0 \leq p \leq 1$.

1. Fumer nuit gravement à la santé.

Remarque 1.2
Une proportion p est souvent exprimée en pourcentage.

Remarque 1.3 (Pourcentages)
Attention aux écritures en pourcentages ! Dans une classe de 25 élèves 18 sont des filles.
On peut écrire : « La proportion de filles est $\frac{18}{25} = 0{,}72 = \frac{72}{100} = 72\%$ »
Ou encore : « La pourcentage de filles est $\frac{18}{25} \times 100 = 0{,}72 \times 100 = 72$ »
Mais : $\frac{18}{25} \times 100 \neq 72\%$

1.1.2 Exemples de calculs

Exemple 1.2
En 2010, on dénombrait 237 434 entreprises dont l'activité principale est le tourisme. Parmi elles, 18 884 sont des hôtels ou hébergements similaires.
Quelle était la proportion d'hôtels dans les entreprises de tourisme en 2010 ? Donner la réponse arrondie au millième puis le pourcentage au dixième.

Exemple 1.3
Toujours en 2010, les entreprises du tourisme employaient 633 307 personnes dont 18,79 % travaillaient dans des hôtels.
Combien d'employés travaillaient en hôtels en 2010 ?

Exemple 1.4
Le chiffre d'affaires réalisés par les hôtels en 2010 s'élève à 15 821 millions d'euros et représente 18,77 % du chiffre d'affaires de toutes les entreprises de tourisme.
Quel était le chiffre d'affaires des entreprises de tourisme en 2010 ?

1.2 Comparaisons, additions, multiplications

1.2.1 Comparaisons

Propriété 1.1
On ne peut comparer deux proportions à partir des effectifs des sous-populations que si les deux sous-populations sont issues d'une *même* population (ou de deux populations de même effectif).

En effet, une proportion est un quotient (donc une fraction) et vous avez appris en cinquième que pour comparer deux fractions, on doit les écrire avec le même dénominateur. Ici, les deux dénominateurs égaux signifient que les deux populations totales sont identiques.

Exemple 1.5
Hier, entre 20 h et 20 h 30, 7 400 000 français étaient devant leur télévision (population E). Parmi eux, 2 300 000 regardaient France 2 (population A), et 1 300 000 regardaient France 3 (population B). Les populations A et B sont deux sous-populations de E, donc sans faire de calculs, on peut affirmer que $p_B \leq p_A$. ($p_B \approx 0{,}176$, et $p_A \approx 0{,}311$).
Entre 23 h et 23 h 30, seuls 2 100 000 regardaient encore la télé (population F). Parmi eux, 420 000 regardaient Arte (population C). On a $p_C = \frac{420\ 000}{2\ 100\ 000} = 0{,}2$. Donc $p_B < p_C$ pourtant

$n_B > n_C$. (la proportion des téléspectateurs d'Arte à 23 h était plus importante que celle de France 3 à 20 h, néanmoins, France 3 avait plus de téléspectateurs.)

1.2.2 Proportion et réunion

Définition 1.3 (Déjà vue en seconde en probabilités)
Soit A et B deux sous-populations d'une population E. Alors :
– l'ensemble des individus qui appartiennent à A *et* à B est noté $A \cap B$ (on lit A *inter* B) ;
– l'ensemble des individus qui appartiennent à A *ou* à B ou aux deux est noté $A \cup B$ (on lit A *union* B).

Exemple 1.6
Dans une classe de 33 élèves, on a regroupé les effectifs dans un tableau :

	externes pop B	demi-pensionnaires pop $\overline{B}$	Total
garçons : pop A	6	8	14
filles : pop $\overline{A}$	4	15	19
total	10	23	33

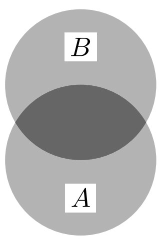
Dans cet exemple, la population E est l'ensemble de la classe, A représente les garçons, B les externes. On a alors :
– l'ensemble $A \cap B$ représente la population des garçons externes ;
– l'ensemble $A \cap \overline{B}$ représente la population des garçons demi-pensionnaires ;
– l'ensemble $A \cup B$ représente la population des élèves qui sont soit des garçons soit des externes, c'est-à-dire tous les garçons plus les filles externes ;
– ...

Propriété 1.2
Si A et B sont deux sous-populations d'une même population E, alors la proportion de la sous-population $A \cup B$ est la somme des proportions de A et de B diminuée de la proportion de $A \cap B$. On écrit :

$$p_{A\cup B} = p_A + p_B - p_{A\cap B}$$

Idée de la démonstration :

En ajoutant les populations de A et de B on compte deux fois les individus qui sont à la fois dans A et dans B ; il faut donc les retirer une fois.



Exemple 1.7
En reprenant les données de l'exemple 1.6, on a :

- $p_A = \frac{14}{33}$, $p_B = \frac{10}{33}$;
- $p_{A\cap B} = \frac{6}{33}$ et $p_{A\cup B} = \frac{8+6+4}{33} = \frac{18}{33}$.

On a bien $p_{A\cup B} = p_A + p_B + p_{A\cap B}$.

Exemple 1.8
Dans une classe de 35 élèves (population E), on a fait un contrôle en maths et un en français. Voici les résultats :
- 23 ont eu la moyenne en maths (population A),
- 13 ont eu la moyenne en français (population B), et parmi eux,
- 8 ont eu la moyenne aux deux contrôles (population $A \cap B$).

La population des élèves ayant eu la moyenne à l'une au moins des deux épreuves est $A \cup B$. On a donc :

$$p_{A\cup B} = p_A + p_B - p_{A\cap B} = \frac{23}{35} + \frac{13}{35} - \frac{8}{35} = \frac{28}{35} = 0{,}8$$

1.2.3 Proportions échelonnées

Propriété 1.3
Si p est la proportion d'une population A dans une population E, et p' est la proportion de cette population E dans une population F, alors, la proportion de A dans F est $p \times p'$.

Exemple 1.9
La proportion des angliscistes (population A) dans l'ensemble des classes de seconde d'un lycée (population E) est $p_1 = 0{,}6$. La proportion des élèves de seconde dans l'ensemble des élèves du lycée (population F) est $p_2 = 0{,}4$. On peut en déduire que la proportion des élèves de seconde angliscistes dans la population du lycée est : $p = p_1 \times p_2 = 0{,}24$.

Remarque 1.4
Dans un exercice, pour utiliser la formule « $P = p \times p'$ » de la propriété 1.3, il faut commencer par écrire ce que sont P, p, et p' avec :
- P la proportion de plus petit ensemble considéré dans le plus grand ;
- p et p' étant les deux autres proportions.

Chapitre 2

Droites. Systèmes

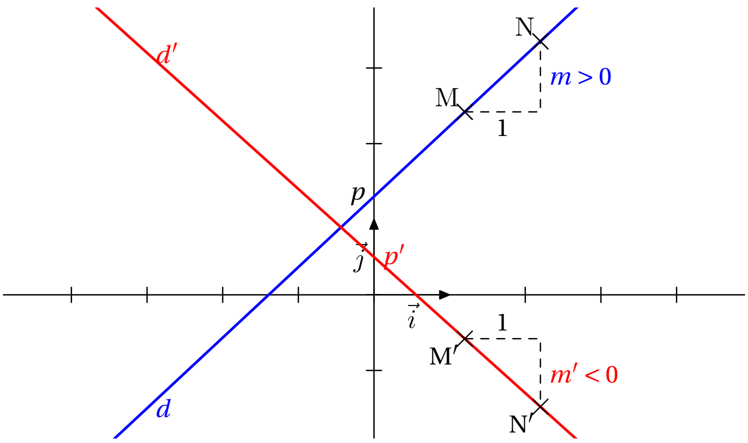
Dire que le point M du plan a pour coordonnées $(x; y)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ signifie que : $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$. On note $M(x; y)$. x est appelée l'abscisse de M et y son ordonnée. Si les axes du repère sont perpendiculaires, on dit que le repère est orthogonal, et si en plus l'unité est la même sur les deux axes, on dit que le repère est orthonormé.
Dans la suite du chapitre, le plan sera muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

2.1 Coefficient directeur

2.1.1 Définition

Propriété 2.1
Soit (D) une droite du plan, non parallèle à l'axe des ordonnées. Pour tous les points M et N (distincts l'un de l'autre) de la droite D, le quotient : $m = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M}$ est constant.
Ce nombre m est appelé *coefficient directeur* de la droite D.

Remarque 2.1
Si on choisit deux points M et N de la droite D tels que $x_N - x_M = 1$, on a alors : $m = y_N - y_M$ ou encore $y_N = y_M + m$:



Exemple 2.1
On donne $A(4; 3)$ et $B(5; 1,5)$. Déterminer le coefficient directeur m de la droite (AB).

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1{,}5 - 3}{5 - 4} = -1{,}5$$

Cela signifie qu'un point de la droite (AB) qui parcourt 1 unité horizontalement, va « descendre » de 1,5 unités verticalement [1].

2.1.2 Droites parallèles

Propriété 2.2
Soit deux droites d_1 et d_2, non parallèles à l'axe des ordonnées du repère :
– si d_1 et d_2 sont parallèles, alors elles ont le même coefficient directeur ;
– réciproquement, si d_1 et d_2 ont le même coefficient directeur, alors elles sont parallèles.

Remarque 2.2
On peut aussi dire : les droites d_1 et d_2 sont parallèles *si et seulement si* elles ont le même coefficient directeur.

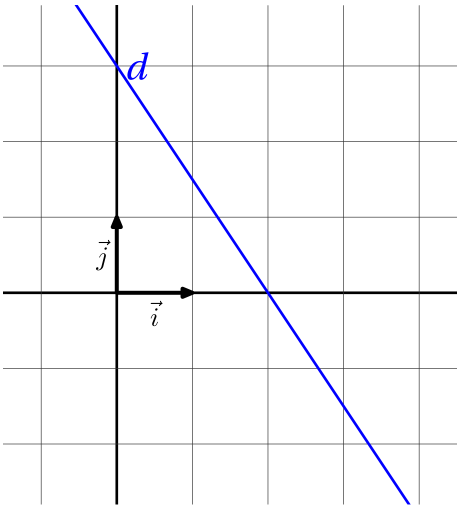
2.2 Équations de droites

2.2.1 Droites non parallèles à l'axe des ordonnées

Propriété 2.3
Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme $y = mx + p$. Cela signifie que :
– si un point a des coordonnées qui vérifient l'équation, alors il est sur la droite ;
– réciproquement, si un point est sur la droite, alors ses coordonnées vérifient l'équation.
L'équation $y = mx + p$ est appelée *équation réduite* de la droite d.
Le réel p est appelé *ordonnée à l'origine* de la droite d : c'est l'ordonnée du point d'intersection de d et de l'axe des ordonnées.

Exemple 2.2
La droite d'équation $y = 2x - 3$ a pour coefficient directeur 2 et pour ordonnée à l'origine -3. Elle passe donc par le point $P(0; -3)$, et si on se déplace sur la droite de 1 unité horizontalement, on se déplacera verticalement de 2 unités. Donc le point $A(0 + 1; -3 + 2)$ appartient aussi à la droite. Finalement d est la droite (AP) avec $A(1; -1)$ et $P(0; -3)$.

Exemple 2.3
Déterminer l'équation réduite de la droite d tracée ci-contre :



L'équation réduite de la droite d est de la forme $y = mx + p$. La droite d coupe l'axe des ordonnées au point P de coordonnées $(0; 3)$ donc l'ordonnée à l'origine vaut 3 : $p = 3$.
La droite d passe aussi par le point $A(2; 0)$. On a donc $m = \frac{y_A - y_P}{x_A - x_P} = \frac{0-3}{2-0} = -1{,}5$.
Ainsi la droite d a pour équation réduite : $y = -1{,}5x + 3$.

1. En supposant le repère orthogonal.

2.2.2 Droite parallèle à l'axe des ordonnées

Propriété 2.4
Soit d une droite parallèle à l'axe des ordonnées. Tous les points de la droite d ont la même abscisse. Si on note k cette abscisse, on dit que la droite d a pour équation réduite $x = k$.

Remarque 2.3 (Attention !)
La droite d d'équation $x = k$ pas de coefficient directeur, ni d'ordonnée à l'origine.

2.3 Systèmes d'équations linéaires

2.3.1 Système de deux équations à deux inconnues

Un système de deux équations linéaires à deux inconnues x et y est un couple d'égalités comportants deux nombres inconnus que l'on note x et y.

Exemple 2.4

$$\text{Soit } (S) : \begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ -2x + y = 5 \end{cases}$$

(S) est un système de deux équations à deux inconnues. Le couple $(-1; 3)$ est solution de ce système car en remplaçant x par -1 et y par 3 dans chacune des deux équations du système, on obtient une égalité vraie :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 3 \times (-1) + 2 \times 3 = 3 \\ -2x + y = -2 \times (-1) + 3 = 5 \end{cases}$$

2.3.2 Interprétation graphique d'un système linéaire

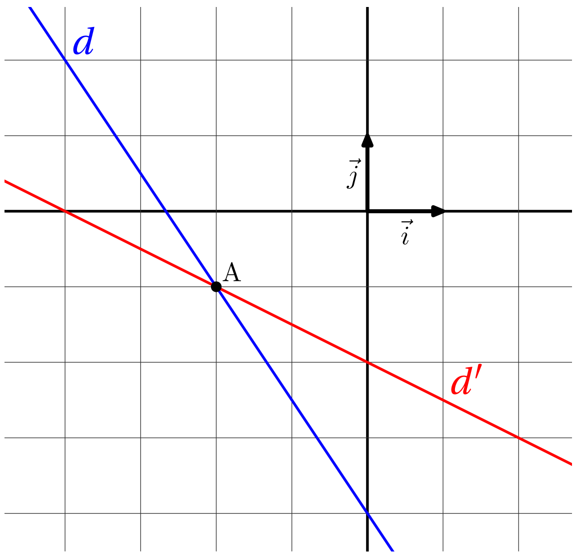
Exemple 2.5
Résoudre graphiquement le système suivant : $\begin{cases} 3x + 2y = -8 \\ x + 2y = -4 \end{cases}$

On transforme les équations pour les obtenir sous la forme $y = mx + p$. On obtient le système suivant : $\begin{cases} 2y = -3x - 8 \\ 2y = -x - 4 \end{cases}$

Soit : $\begin{cases} y = -1{,}5x - 4 \\ y = -0{,}5x - 2 \end{cases}$

On trace les droites d et d' d'équations respectives $y = -1{,}5x - 4$ et $y = -0{,}5x - 2$ dans un même repère.

Ces deux droites se coupent au point A de coordonnées $(-2; -1)$.
Donc $\mathscr{S} = \{(-2; -1)\}$.



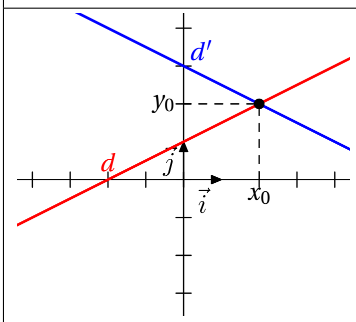
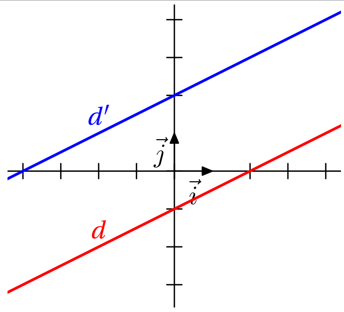
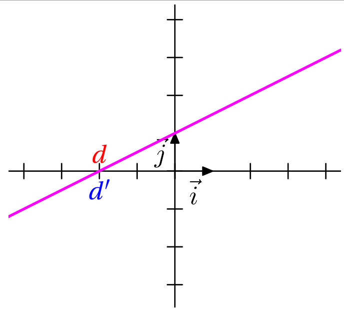
Récapitulons. . .

Un système de deux équations linéaires peut être représenté par deux droites dans un repère (chaque équation est représentée par une droite). Les solutions du système sont alors les coordonnées des points qui vérifient les deux équations donc qui appartiennent aux deux droites.

On considère un système (S) de deux équations linéaires à deux inconnues :

$$(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

On note d et d' les droites associées aux deux équations du système. On a alors trois possibilités :

<table>
<tr><td>Les droites sont sécantes</td><td>Les droites sont strictement parallèles</td><td>Les droites sont confondues</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Une unique solution $(x_0; y_0)$</td><td>Pas de solution</td><td>Tous les couples de coordonnées des points des droites sont solution.</td></tr>
</table>

2.3.3 Résolution algébrique d'un système linéaire

Pour résoudre un système de deux équations à deux inconnues, on va écrire successivement des systèmes *équivalents* aux précédents dans lesquels on va « éliminer » une des deux inconnues dans une des deux équations. Pour indiquer que chaque système est équivalent au précédent, on utilise le symbole « $\Longleftrightarrow$ » (qui se lit « si et seulement si »).

Exemple 2.6

Résolvons algébriquement le système $(S) : \begin{cases} 3x + 2y = -4 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$

Résolution	Explication
$\begin{cases} 3x+2y=-4 & (L_1) \\ 2x+5y=1 & (L_2) \end{cases}$	On écrit le système de départ en numérotant les lignes
$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\times 3x+2\times 2y=2\times(-4) & (2L_1 \to L_1') \\ 3\times 2x+3\times 5y=3\times 1 & (3L_2 \to L_2') \end{cases}$	On multiplie L_1 par a_2 et L_2 par a_1.
$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x+4y=-8 & (L_1') \\ 6x+15y=3 & (L_2') \end{cases}$	On réduit.
$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x+4y=-8 & (L_1') \\ 0x+11y=3-(-8) & (L_2'-L_1' \to L_2'') \end{cases}$	On soustrait les deux lignes.
$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x+4y=-8 & (L_1') \\ y=\frac{11}{11}=1 & (L_2'') \end{cases}$	On résout (L_2'').
$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-8-4}{6}=-2 & (L_1') \\ y=1 & (L_2'') \end{cases}$	On reporte $y=1$ dans (L_1') et on résout.
$\mathscr{S}=\{(-2;1)\}$	On écrit l'ensemble solution.

« *Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve.* »
Euclide d'Alexandrie

Chapitre 3

Évolutions

Dans le premier chapitre, nous avons parlé de pourcentages lorqu'on calculait des *proportions*. Dans ce chapitre, nous allons encore parler de pourcentages mais cette fois pour quantifier des *variations*.

3.1 Variation absolue. Taux d'évolution

Définition 3.1
On considère deux nombres réels strictement positifs y_1 et y_2.
On appelle *variation absolue* entre y_1 et y_2 le nombre $y_2 - y_1$.
On appelle *taux d'évolution* (ou variation relative) entre y_1 et y_2 le nombre $t = \dfrac{y_2 - y_1}{y_1}$.
En pourcentage la variation est de p % avec $p = 100 \times t$.

Exemple 3.1
Le PIB de la France en 2011 était de 30 324 € par habitant. En 2012, il était de 30 792 € par habitant.
La variation absolue du PIB par habitant entre 2011 et 2012 est : 30 792 − 30 324 = 468 €.
Le taux d'évolution du PIB par habitant entre 2011 et 2012 est :

$$t = \frac{30\,792 - 30\,324}{30\,324} \approx 0{,}015 \text{ soit environ } 1{,}5\%.$$

Remarque 3.1
Si le taux d'évolution est positif, il s'agit d'une augmentation, s'il est négatif, il s'agit d'une diminution.

Exemple 3.2
À Saint-Jean de Maurienne, la population était de 8 685 habitants en 2006. En 2010 elle était de 8 242 habitants. Le taux de variation de la population de Saint-Jean de Maurienne entre 2006 et 2010 est égal à :

$$\frac{8\,242 - 8\,685}{8\,685} \approx -0{,}051.$$

La population a donc *diminué* d'environ 5,1 %.

Remarque 3.2
On écrit aussi :

$$t = \frac{\text{Valeur d'arrivée} - \text{Valeur de départ}}{\text{Valeur de départ}} = \frac{V_A - V_D}{V_D}$$

Remarque 3.3 (Vocabulaire)
En mai 2005, 35 % des Belges étaient satisfaits de leur premier ministre ; en juin 2005 ils étaient 42 %. On dit que la côte de popularité du premier ministre belge a augmenté de 7 *points* et non pas de 7 % : le % n'est pas une unité de mesure.

3.2 Coefficient multiplicateur

Propriété 3.1
Si le taux d'évolution entre y_1 et y_2 est de $x\%$ alors :

$$y_2 = \left(1 + \frac{x}{100}\right) \times y_1$$

Le nombre $\left(1 + \frac{x}{100}\right)$ est appelé *coefficient multiplicateur* de l'évolution, on le note souvent CM.
De plus :
- si $\left(1 + \frac{x}{100}\right) < 1$, il traduit une baisse ;
- si $\left(1 + \frac{x}{100}\right) > 1$, il traduit une hausse.

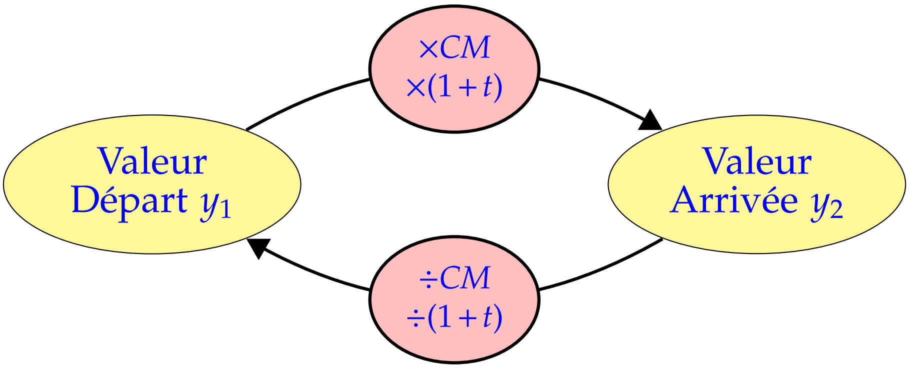
Remarque 3.4
En notant $t = \frac{x}{100}$, on a $CM = 1 + t$.

Exemple 3.3
Pendant les soldes, un commerçant baisse les prix de 25 %. Puisque c'est une baisse, le taux d'évolution est négatif ; on a donc : $t = -\frac{25}{100} = -0{,}25$. Le coefficient multiplicateur vaut donc $CM = 1 + (-0{,}25) = 0{,}75$.
Si un article coûtait 154 €, son prix soldé est $154 \times 0{,}75 = 115{,}50$ €.
Plus généralement, si un article coûtait x euros, le nouveau prix y est :

$$y = 0{,}75 \times x$$

Exemple 3.4
En trois ans, le prix des composants électroniques a été divisé par 4. Quel est le pourcentage de baisse des composants électroniques ?
Le coefficient multiplicateur est $\frac{1}{4} = 0{,}25$; on appelle t le taux d'évolution du prix des composants électroniques. On a : $1 + t = 0{,}25$, donc $t = 0{,}25 - 1 = -0{,}75$. Donc le prix des composants électroniques a baissé de 75 % en trois ans.

Remarque 3.5
Ceci peut se résumer par le schéma suivant :



Remarque 3.6
Toutes les questions sur les taux d'évolution peuvent être résolues en complétant le tableau suivant :

Valeur de départ V_D $= \frac{V_A}{CM}$	Valeur d'arrivée V_A $= V_D \times CM$	Variation relative $t = \frac{V_A - V_D}{V_D}$ $t = \frac{x}{100}$	Évolution de $x\%$ $x = 100 \times t$ $x = 100(CM - 1)$	Coefficient multiplicateur $CM = 1 + \frac{x}{100}$ $CM = 1 + t$	augmentation ou réduction $\uparrow$ si $CM > 1$ $\downarrow$ si $CM < 1$
12	13,56				
14,5	11,6				
54			−45		
	158,40	0,32			
	54,60			0,65	
87		−0,12			
125				1,24	

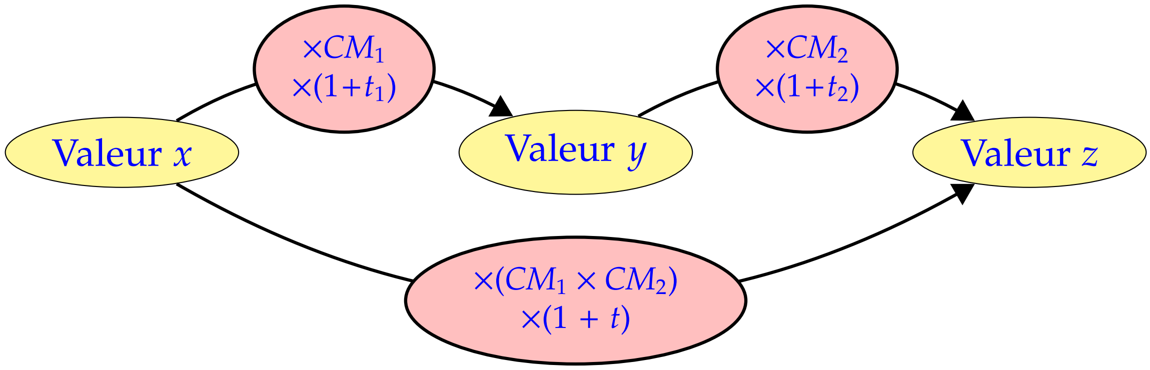
3.3 Évolutions successives. Évolutions réciproques

3.3.1 Évolutions successives

Propriété 3.2
Lorsqu'un nombre subit plusieurs évolutions successives, le coefficient multiplicateur de l'évolution totale est le produit des coefficients multiplicateurs de chaque évolution.
Autrement dit, si on a trois nombres x, y, et z, on note t_1 le taux d'évolution de x à y, t_2 le

taux d'évolution de y à z et t le taux d'évolution de x à z. On a alors :

$$1 + t = (1 + t_1) \times (1 + t_2)$$



Exemple 3.5
Après avoir augmenté ses prix de 10 %, un commerçant décide de solder ses articles à −25 %. L'augmentation a un coefficient multiplicateur de $(1 + \frac{10}{100}) = 1{,}10$; le coefficient multiplicateur de la baisse vaut : $(1 - \frac{25}{100}) = 0{,}75$. Au total, le coefficient multiplicateur de l'évolution totale est donc égal à : $1{,}10 \times 0{,}75 = 0{,}825$.
En notant t le taux d'évolution correspondant on a $1 + t = 0{,}825$. Donc $t = -0{,}175$; soit une baisse de 17,5 %.

Exemple 3.6
Entre 2002 et 2004, la population d'un village a baissé de 44 %. Entre 2002 et 2003, elle avait baissé de 30 %. De combien a-t-elle baissé entre 2003 et 2004 ?
Soit CM le coefficient directeur de la baisse entre 2003 et 2004.

$$\begin{array}{ll} \text{On a :} & \left(1 - \frac{30}{100}\right) \times CM = \left(1 - \frac{44}{100}\right) \\ \text{donc :} & 0{,}7 \times CM = 0{,}56 \\ \text{donc :} & CM = \frac{0{,}56}{0{,}7} = 0{,}8 \end{array}$$

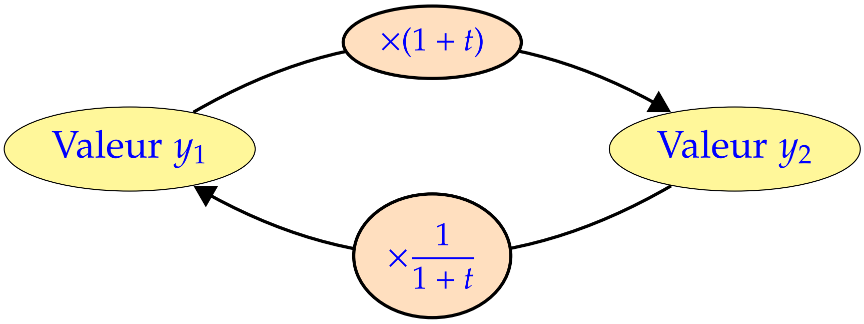
Ainsi, entre 2003 et 2004 la population a baissé de 20 % (car $0{,}8 - 1 = -0{,}2$).

3.3.2 Évolutions réciproques

Remarque 3.7
Si le prix d'un produit augmente de p %, puis qu'il baisse de p %, il ne reviendra pas au prix d'origine :
un article coûte 50 €. Il augmente de 10 %, puis baisse de 10 %. Son prix définitif est : $50 \times (1 + 0{,}10) \times (1 - 0{,}10) = 50 \times 1{,}1 \times 0{,}9 = 49{,}50$ €.

Propriété 3.3
Soit y_1 et y_2 deux réels positifs. On note t le taux d'évolution de y_1 à y_2 ($t = \frac{y_2 - y_1}{y_1}$). Le taux d'évolution *reciproque* t' est le taux d'évolution de y_2 à y_1. On a alors :

$$1 + t' = \frac{1}{1 + t}$$



Exemple 3.7
Le prix d'un article augmente de 25 %. Quel doit être le taux r de baisse pour revenir au prix initial ?
On a : $1 + t = \dfrac{1}{1+0{,}25}$ donc $t = \dfrac{1}{1{,}25} - 1 = -0{,}20$. Il faut donc appliquer une baisse de 20 % pour que l'article revienne au prix initial.

« *Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve.* »
EUCLIDE D'ALEXANDRIE

Chapitre 4

Fonctions polynômes de degré 2

En seconde, on a étudié la fonction carré ($x \longmapsto x^2$) et les fonctions définie à l'aide de la fonction carré par $f : x \longmapsto a(x-\alpha)^2+\beta$. L'an dernier, nous avons appris à étudier les variations de ces fonctions, mais nous n'avons pas donné de méthode « simple » pour déterminer les solutions de $f(x)=0$. C'est l'objet de ce chapitre...

4.1 Fonction polynôme de degré 2

Définition 4.1
On appelle *fonction polynôme de degré 2* toute fonction f définie par :

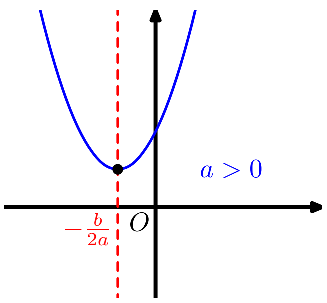
$$f(x) = ax^2+bx+c \text{ où } a, b \text{ et } c \text{ sont des réels avec } a \neq 0$$

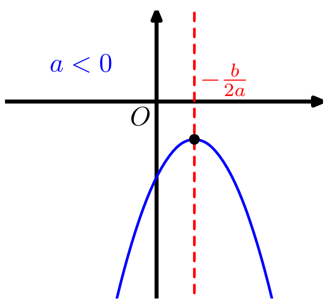
Exemple 4.1
La fonction $f : x \mapsto 2x^2-5x+1$ est une fonction polynôme de degré 2 (on dit aussi du second degré).

Propriété 4.1 (vue en seconde)
La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré dans un repère orthogonal du plan est une *parabole*. De plus en notant $f(x)=ax^2+bx+c$, on a :
- si $a>0$, la parabole est tournée « vers le haut » ;
- si $a<0$, la parabole est tournée « vers le bas » ;

Dans tous les cas, on a :
- le point S d'abscisse $-\frac{b}{2a}$ est le *sommet* de la parabole ;
- c'est à l'abscisse $-\frac{b}{2a}$ que la fonction change de sens de variation ;
- la droite verticale d'équation $x=-\frac{b}{2a}$ est un axe de symétrie de la parabole.

On a donc deux types de tracé possibles :





Propriété 4.2 (Conséquence)
Les variations d'une fonction polynôme du second degré $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ sont résumées dans les tableaux ci-dessous :

Si $a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f	$\searrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$

Si $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f	$\nearrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\searrow$

4.2 Résolution d'une équation du second degré

Dans cette partie, on considère une fonction polynôme du second degré f définie par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ avec } a \neq 0$$

Définition 4.2
On appelle *discriminant* de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ le nombre noté Δ défini par :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Exemple 4.2
Le discriminant de l'équation $-2x^2 - 5x + 3 = 0$ est $\Delta = (-5)^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 25 + 24 = 49$.

L'existence de solutions à l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dépend du signe de Δ :

Théorème 4.1 (admis)
Soit $ax^2 + bx + c = 0$ une équation du second degré et Δ son discriminant.

si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution.

si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$

si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.

Remarque 4.1
Lorsque a et c sont de signes contraires (et non nuls), le produit $-ac$ est strictement positif donc $b^2 - 4ac > 0$, et donc l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes.

Exemple 4.3
Résoudre l'équation $x^2 - 3x + 4 = 0$.
On calcule $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9 - 16 = -7 < 0$. Donc cette équation n'a pas de solution : $\mathscr{S} = \emptyset$.

Exemple 4.4
Résoudre l'équation $9x^2 - 30x + 25 = 0$

On calcule $\Delta = (-30)^2 - 4 \times 9 \times 25 = 900 - 900 = 0$.
L'équation a donc une unique solution $x_0 = -\frac{-30}{2\times 9} = \frac{5}{3}$.

Exemple 4.5
Résoudre l'équation $4x^2 + 11x - 3 = 0$.
On calcule $\Delta = 11^2 - 4 \times 4 \times (-3) = 121 + 48 = 169 > 0$. Donc l'équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-11 - \sqrt{169}}{2 \times 4} = \frac{-24}{8} = -3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-11 + \sqrt{169}}{2 \times 4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\mathscr{S} = \left\{-3\,;\,\frac{1}{4}\right\}$$

4.3 Factorisation et signe

4.3.1 Factorisation d'un trinôme

Propriété 4.3
Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré ($a \neq 0$). On note Δ son discriminant ($\Delta = b^2 - 4ac$). On a :
- si $\Delta < 0$, alors on ne peut pas factoriser $f(x)$;
- si $\Delta = 0$, alors, en notant $x_0 = -\frac{b}{2a}$ on a : $f(x) = a(x - x_0)^2$;
- si $\Delta > 0$, alors, en notant $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, on a : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Démonstration :
on peut démontrer cette propriété (les deux derniers points) en développant les expressions proposées.

Exemple 4.6
En reprenant les polynômes des exemples 4.4 et 4.5, on obtient :

$$9x^2 - 30x + 25 = 9\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 \quad \text{et} \quad 4x^2 + 11x - 3 = 4(x+3)\left(x - \frac{1}{4}\right)$$

4.3.2 Étude du signe d'un trinôme

Exemple 4.7
Reprenons le polynôme de l'exemple 4.5 :

$$f(x) = 4x^2 + 11x - 3 = 4(x+3)\left(x - \frac{1}{4}\right)$$

Étudier le signe de $f(x)$ c'est trouver les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est positif et celles pour lesquelles $f(x)$ est négatif. Pour résoudre ce problème, on utilise un tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
4		$+$		$+$		$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-\frac{1}{4}$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ce tableau signifie que si $x < -3$ ou si $x > \frac{1}{4}$ alors $f(x) > 0$ et si $-3 < x < \frac{1}{4}$ alors $f(x) < 0$.

Propriété 4.4 (généralisation)
Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme du second degré ($a \neq 0$). On note Δ son discriminant ($\Delta = b^2 - 4ac$). On a :
- si $\Delta < 0$, alors, pour toutes les valeurs de x, $f(x)$ est du signe de a ;
- si $\Delta = 0$, alors pour toutes les valeurs de x autres que $-\frac{b}{2a}$, $f(x)$ est du signe de a ;
- si $\Delta > 0$, alors, en notant x_1 et x_2 les deux solutions de $f(x) = 0$ telles que $x_1 < x_2$, on a :
  - $f(x)$ est du signe de a « à l'extérieur des racines » (c'est-à-dire si $x < x_1$ ou $x > x_2$) ;
  - $f(x)$ est du signe de $-a$ « à l'intérieur des racines » (c'est-à-dire si $x_1 < x < x_2$).

Exemple 4.8
Soit $f(x) = x^2 - x - 2$ et $g(x) = -2x^2 + 2x + 12$. Étudier le signe de $f(x)$ et de $g(x)$.

4.4 Récapitulatif

On peut regrouper les résultats du chapitre dans le tableau suivant en notant :
- $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$.
- $\Delta = b^2 - 4ac$ avec :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} \qquad \text{si } \Delta = 0$$

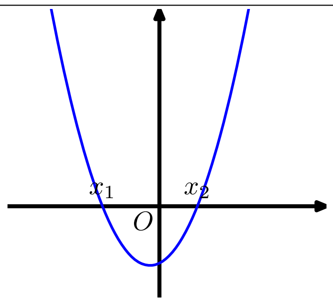
et

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{si } \Delta > 0$$

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$

$a > 0$

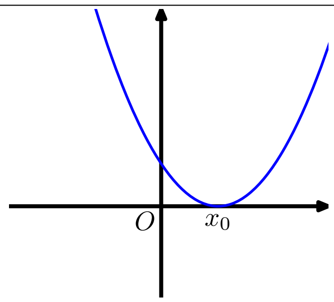
$\Delta > 0$



x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f	$\searrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

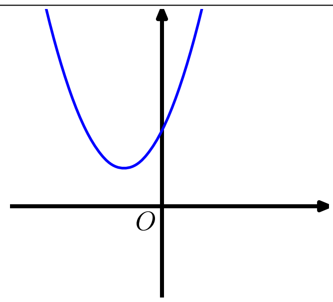
$\Delta = 0$



x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f	$\searrow$	0	$\nearrow$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

$\Delta < 0$

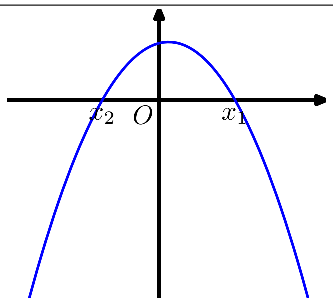


x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f	$\searrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

$a < 0$

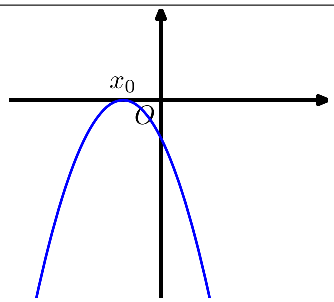
$\Delta > 0$



x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f	$\nearrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\searrow$

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

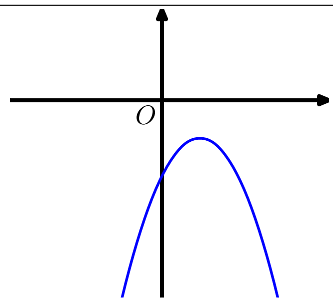
$\Delta = 0$



x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f	$\nearrow$	0	$\searrow$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

$\Delta < 0$



x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f	$\nearrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\searrow$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	

« *Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve.* »
Euclide d'Alexandrie

Chapitre 5

Suites numériques

5.1 Suite de nombres réels

5.1.1 Définition

Définition 5.1
On appelle *suite de terme général* u_n, et on note u, la liste *ordonnée* des nombres u_0, u_1, u_2, u_3, ...
Les nombres u_i sont appelés les *termes* de la suite.

Remarque 5.1
Parfois le premier terme d'une suite peut être u_1 ou u_2, ... et non pas u_0.

Exemple 5.1
On définit u comme la suite des nombres pairs.
Dans ce cas, on a : $u_0 = 0$, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$, ... On peut écrire aussi $u_n = 2 \times n$.
Attention au comptage : ici u_3 est le *terme de rang* 3 mais c'est le *quatrième terme* de la suite.

Exemple 5.2
En reprenant la suite des entiers pairs définie dans l'exemple 5.1 par $u_n = 2 \times n$, on a : $u_6 = 2 \times 6 = 12$, $u_n = 2 \times n$, mais aussi $u_p = 2 \times p$ ou encore $u_t = 2 \times t$.
Si on choisit comme indice l'entier $n + 1$ on a $u_{n+1} = 2 \times (n + 1) = 2n + 2$.
À ne pas confondre avec $u_n + 1 = (2 \times n) + 1 = 2n + 1$.
Il est donc très important d'écrire les indices au bon endroit et à la bonne taille !

5.1.2 Mode de génération

Définir une suite u c'est être capable de calculer u_n pour n'importe quelle valeur de n. Il existe deux façons usuelles pour définir une suite :
– soit on donne l'expression de u_n en fonction de n : $u_n = \dots$ et alors on peut remplacer n par une valeur quelconque pour déterminer u_n ;
– soit on donne une relation entre un terme et son suivant qui permet, à partir de u_0 de calculer u_1, puis u_2, puis ....
Dans le premier cas on dit que la suite est définie *explicitement*, dans le deuxième cas on dit qu'elle est définie *par récurrence*.

Exemple 5.3
On considère la suite u définie par $u_n = \frac{1}{2}n + 2$. On a alors :

$$u_0 = \frac{1}{2} \times 0 + 2 = 2; \quad u_1 = \frac{1}{2} \times 1 + 2 = \frac{5}{2}; \quad u_2 = \frac{1}{2} \times 2 + 2 = 3; \quad \ldots$$

Dans cette situation, on est bien en mesure de calculer u_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exemple 5.4
Je possède 1 000 € sur mon livret d'épargne. Chaque année on me reverse dessus 5 % en intérêts et je rajoute 100 €. J'appelle u_n la somme dont je dispose sur mon livret après n ans. On a donc :
– pour $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = (1 + \frac{5}{100}) \times u_n + 100 = 1,05u_n + 100$;
– la somme disponible sur le livret aujourd'hui est 1 000€. Donc : $u_0 = 1\,000$.
On a : $u_1 = 1{,}05 \times 1\,000 + 100 = 1\,150$, puis $u_2 = 1{,}05 \times 1\,150 + 100 = 1\,307{,}50$ . . .. De proche en proche, on peut donc calculer u_n pour n'importe quelle valeur de n.

Remarque 5.2
Lorsqu'une suite est définie par récurrence, pour calculer u_n, on est obligé d'avoir calculé avant tous les termes précédents.

5.1.3 Variations d'une suite

Définition 5.2
On dit qu'une suite est *croissante* si chacun de ses termes est supérieur au terme précédent : si pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $u_{n+1} \geq u_n$.
On dit qu'une suite est *décroissante* si chacun de ses termes est inférieur au terme précédent : si pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $u_{n+1} \leq u_n$.

Exemple 5.5
Si u est la suite définie par $u_n = 3n - 1$ on a $u_{n+1} = 3(n + 1) - 1 = 3n + 2$.
On a donc $u_{n+1} > u_n$ donc la suite u est croissante.

Exemple 5.6
Soit v la suite définie par récurrence par $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = v_n - 4 \end{cases}$
On calcule $v_{n+1} - v_n = v_n - 4 - v_n = -4 < 0$ donc $v_{n+1} < v_n$ et donc v est décroissante.

5.2 Suites arithmétiques

5.2.1 Définition

Définition 5.3
Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite *arithmétique* si la différence entre deux termes consécutifs est constante. C'est à dire qu'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$.
Le réel r est appelé *raison* de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exemple 5.7
Si u est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 3, on a :

$$u_0 = 5$$
$$u_1 = u_0 + 3 = 5 + 3 = 8$$
$$u_2 = u_1 + 3 = 8 + 3 = 11$$

5.2.2 Variations

Propriété 5.1
Soit u une suite arithmétique de raison r :
- si $r < 0$ alors la suite u est décroissante ;
- si $r > 0$ alors la suite u est croissante.

Démonstration :
- si $r < 0$ alors pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $u_{n+1} - u_n = r < 0$ donc u est décroissante ;
- si $r > 0$ alors pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $u_{n+1} - u_n = r > 0$ donc u est croissante ;

5.2.3 Au tableur

Dans un tableur, pour obtenir les termes d'une suite arithmétique on a deux possibilités. Reprenons l'exemple 5.7. On indique dans la colonne `A` les indices n $(0, 1, 2, 3, 4, \ldots)$. Puis :
- dans la cellule `B2` on saisit la valeur de u_0 (par exemple 5 dans l'exemple ci-dessous) et dans la cellule `B3` on écrit la formule (à recopier vers le bas ensuite) : `=B2+3` (car ici la raison vaut 3) ;
- pour la deuxième méthode on écrit dans la cellule `C2` la formule `=5+A2*3` (formule à recopier vers le bas).

	A	B	C
1	n	Un (méth 1)	Un (méth 2)
2	0	5	5
3	1	8	8
4	2	11	11
5	3	14	14

On peut même améliorer la feuille de calcul pour qu'elle permette de calculer les premiers termes de n'importe quelle suite arithmétique : on saisit respectivement dans `B1` et `D1` le premier terme et la raison et on écrit les formules suivantes :
- dans `B4` : `=B1` ;
- dans `B5` : `=B4+D$1` (à recopier vers le bas) ;
- dans `C4` : `=B$1+A4*D$1` (à recopier vers le bas).

On obtient alors :

	A	B	C	D
1	U0 =	5	raison r =	3
2				
3	n	Un (méth 1)	Un (méth 2)	
4	0	5	5	
5	1	8	8	
6	2	11	11	
7	3	14	14	

5.3 Suites géométriques

5.3.1 Définition

Définition 5.4
Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite *géométrique* si chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par un même nombre q. C'est à dire qu'il existe un réel q tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le réel q est appelé *raison* de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exemple 5.8
Si u est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$, et de raison $q = 2$, on a :

$$u_0 = 5, \quad u_1 = q \times u_0 = 2 \times 5 = 10, \quad u_2 = q \times u_1 = 2 \times 10 = 20, \quad u_3 = q \times u_2 = 2 \times 20 = 40, \ldots$$

5.3.2 Variations

Propriété 5.2
Soit u une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme $u_0 > 0$:
- si $q < 1$ alors la suite u est décroissante ;
- si $q > 1$ alors la suite u est croissante ;
- si $q = 1$ alors la suite est stationnaire.

Démonstration :
Lorsqu'on multiplie un nombre par $q > 1$, le résultat est plus grand que le nombre initial ; lorsqu'on multiplie un nombre par $q \in]0;1[$, le résultat est plus petit que le nombre initial, d'où le résultat.

5.3.3 Au tableur

Dans un tableur, pour obtenir les termes d'une suite géométrique on a aussi deux possibilités. Reprenons l'exemple 5.8. On indique dans la colonne `A` les indices n (0, 1, 2, 3, 4, ...). Puis :
- dans la cellule `B2` on saisit la valeur de u_0 (par exemple 5 dans l'exemple ci-dessous) et dans la cellule `B3` on écrit la formule (à recopier vers le bas ensuite) : `=B2*2` (car ici la raison vaut 2) ;
- pour la deuxième méthode on écrit dans la cellule `C2` la formule `=5*2^A2` (formule à recopier vers le bas).

	A	B	C
1	n	Un (méth1)	Un (méth2)
2	0	5	5
3	1	10	10
4	2	20	20
5	3	40	40
6	4	80	80

On peut même améliorer la feuille de calcul pour qu'elle permette de calculer les premiers termes de n'importe quelle suite arithmétique : on saisit respectivement dans `B1` et `D1` le premier terme et la raison et on écrit les formules suivantes :
- dans `B4` : `=B1` ;
- dans `B5` : `=B4*D$1` (à recopier vers le bas) ;

– dans `C4` : `=B$1*D$1^A4` (à recopier vers le bas).
On obtient alors :

	A	B	C	D
1	U0=	5	q=	2
2				
3	n	Un (méth1)	Un (méth2)	
4	0	5	5	
5	1	10	10	
6	2	20	20	
7	3	40	40	
8	4	80	80	

Exemple 5.9
Reprenons l'exemple 5.4. On souhaite savoir combien de temps il faut laisser placé notre argent pour doubler notre capital. Pour cela, on peut utiliser le tableur :
Dans la cellule `B1` on saisit le montant placé et dans la cellule `B2` le taux dans une cellule au format pourcentage.
Il reste à écrire les formules permettant de connaître l'épargne disponible :
– en `B5` on écrit `=B1` ;
– en `B6` on écrit `=B5*(1+B$2)` (à recopier vers le bas).
C'est donc après 15 ans que le capital placé a doublé.

	A	B
1	Somme placée :	1 000,00 €
2	taux annuel :	5,00%
3		
4	Année	Montant
5	0	1 000,00 €
6	1	1 050,00 €
7	2	1 102,50 €
8	3	1 157,63 €
9	4	1 215,51 €
10	5	1 276,28 €
11	6	1 340,10 €
12	7	1 407,10 €
13	8	1 477,46 €
14	9	1 551,33 €
15	10	1 628,89 €
16	11	1 710,34 €
17	12	1 795,86 €
18	13	1 885,65 €
19	14	1 979,93 €
20	15	2 078,93 €
21	16	2 182,87 €

« *Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve.* »
Euclide d'Alexandrie

Chapitre 6

Statistiques

6.1 Tableaux et graphiques

6.1.1 Vocabulaire

Définition 6.1
- l'*effectif* d'une classe (ou « catégorie ») est le nombre d'éléments de la classe ;
- la *fréquence* d'une classe est le quotient de l'effectif de la classe par l'effectif total :

$$f_i = \text{fréquence de } x_i = \frac{\text{effectif de } x_i}{\text{effectif total}} = \frac{n_i}{N}$$

La somme des fréquences vaut 1.

6.1.2 Tableaux

Pour présenter les données d'une série statistique on peut utiliser un tableau. Si on étudie un seul caractère, il s'agit généralement d'un tableau d'effectifs ; si on étudie deux caractères, on peut avoir un tableau à double entrées ou tableau croisé. Dans les deux cas, on peut calculer les fréquences correspondantes.

Exemple 6.1 (Tableau d'effectifs)
On donne ci-dessous le tableau récapitulatif des niveaux de pollutions atteints au cours d'une année dans une grande ville. Calculer les fréquences :

Niveau de pollution	0	1	2	3	4
Nombre de jours	5	81	143	100	36
fréquence	0,014	0,222	0,392	0,274	0,099
fréquence en %	1,4	22,2	39,2	27,4	9,9

Exemple 6.2 (Tableau croisé)
On donne ci-dessous la répartition des élèves d'un groupe d'élèves selon les langues étudiées :

LV2 \ LV1	Anglais	Allemand	Italien	Total
Anglais	0	16	2	18
Allemand	12	0	3	15
Espagnol	26	0	5	31
Italien	20	0	0	20
Total	58	16	10	84

Dans le cas d'un tableau croisé on peut calculer deux types de fréquences, les fréquences *globales* qui se rapportent à l'effectif total ou les fréquences *relatives* qui se rapportent au total de chaque ligne.

Exemple 6.3 (Fréquences dans un tableau croisé)
On donne ci-dessous les fréquences (en pourcentages) dans la population totale :

LV2 \ LV1	Anglais	Allemand	Italien	Total
Anglais	0	19%	2%	21%
Allemand	14%	0%	4%	18%
Espagnol	31%	0%	6%	37%
Italien	24%	0%	0%	24%
Total	69%	19%	12%	100%

Et le tableau des fréquences relatives, c'est-à-dire de la fréquence de chaque langue LV1 dans la population des élèves étudiant une langue LV2 définie :

LV2 \ LV1	Anglais	Allemand	Italien	Total
Anglais	0%	89%	11%	100%
Allemand	80%	0%	20%	100%
Espagnol	84%	0%	16%	100%
Italien	100%	0%	0%	100%

C'est-à-dire que 89% des élèves qui étudient l'anglais en LV2 ont choisi l'allemand en LV1, ou encore 16% des élèves qui étudient l'espagnol en LV2 ont choisi l'italien en LV1, . . .

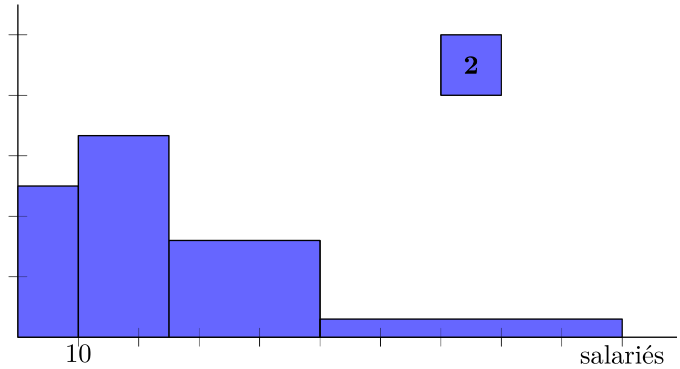
6.1.3 Histogramme

Si on représente une série statistique par un histogramme, chaque classe correspond à un rectangle dont l'*aire* est proportionnelle à l'effectif de la classe, et la largeur est proportionnelle à l'amplitude de la classe. On l'utilise pour représenter une série dont le caractère est quantitatif.

Exemple 6.4
Le tableau suivant donne l'effectif des entreprises d'une zone industrielle suivant le nombre d'employés :

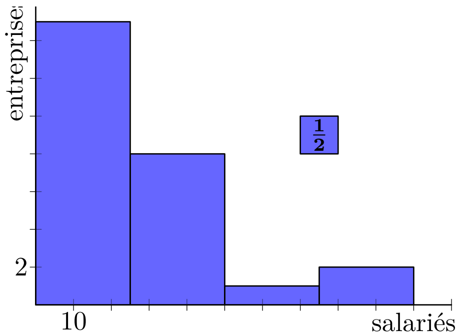
Nombre d'employés N	$N < 10$	$10 \leq N < 25$	$25 \leq N < 50$	$50 \leq N < 100$
Nombre d'entreprises	5	10	8	3

La représentation de ce tableau en histogramme donne :



Remarque 6.1
Si les classes ont toutes la même amplitude, les hauteurs des rectangles sont proportionnelles aux effectifs.

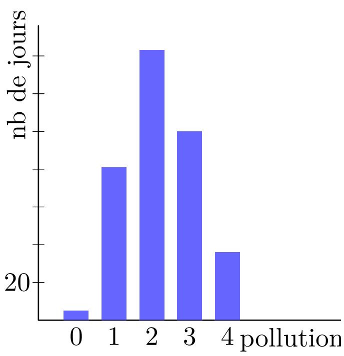
Exemple 6.5
Dans l'exemple 6.4 si on regroupe les deux premières classes et qu'on sait de plus que les entreprises ayant plus de 75 salariés sont au nombre de 2, on obtient :

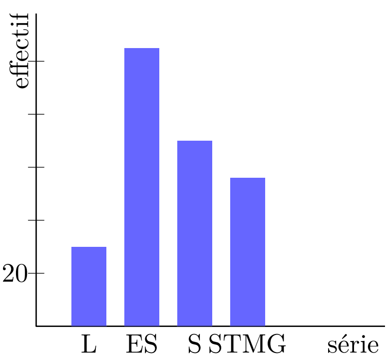


6.1.4 Diagramme en bâtons

Dans un diagramme en bâtons, la hauteur de chaque bâton est proportionnelle à l'effectif de la classe. On l'utilise pour représenter une série dont le caractère est qualitatif.

Exemple 6.6
Les deux diagrammes suivants sont des exemples de diagrammes en bâtons ; le premier représente les données de l'exemple 6.1, le second représente le nombre d'élèves de première dans chacune des séries d'un lycée :





6.2 Paramètres de position

6.2.1 Le mode

Définition 6.2
Le mode ou valeur modale est la valeur de la variable statistique qui est le plus souvent observée. C'est à dire la valeur du caractère ou la classe qui a le plus grand effectif.

Exemple 6.7
Dans l'exemple 6.1, le mode est le niveau de pollution 2.
Dans l'exemple 6.6 (le deuxième diagramme), le mode est le bac ES.

6.2.2 La médiane

Définition 6.3
La médiane d'une série statistique est la valeur de la variable qui partage la population en deux groupes de même effectif :
- ceux qui ont une valeur du caractère inférieure à la médiane,
- ceux qui ont une valeur du caractère supérieure à la médiane,

Exemple 6.8 (nombre impair d'observations)
On donne la série statistique suivante :

valeur	3	4	6	7
effectif	1	3	2	1

On a ici un effectif total de 7. La médiane est donc la 4e valeur lorsqu'elles sont rangées par ordre croissant :
3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 6 ; 6 ; 7. La médiane vaut 4.

Exemple 6.9 (nombre pair d'observations)
On donne la série statistique suivante :

valeur	3	4	6	7
effectif	2	3	1	4

On a ici un effectif total de 10. La médiane est donc la moyenne de la 5e et de la 6e valeurs lorsqu'elles sont rangées par ordre croissant :
3 ; 3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 6 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7. La médiane vaut $\frac{4+6}{2} = 5$.

6.2.3 La moyenne

Définition 6.4
Une série statistique est donnée sous la forme d'un tableau d'effectifs :

valeur	x_1	x_2	...	x_p
effectif	n_1	n_2	...	n_p

La moyenne de la série est :

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_px_p}{n_1 + n_2 + \cdots + n_p} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_ix_i}{N}$$

Exemple 6.10
On donne le tableau d'effectif des tailles d'un groupe d'élèves :

taille	165	170	175	180
effectif	7	8	5	2

La moyenne est :

$$\overline{x} = \frac{7 \times 165 + 8 \times 170 + 5 \times 175 + 2 \times 180}{22}$$

Propriété 6.1 (moyennes partielles)
Soit x et y deux séries statistiques d'effectifs respectifs N et P. On considère la série statistique z constituée du regroupement des séries x et y. On a :

$$\overline{z} = \frac{N\overline{x} + P\overline{y}}{N + P}$$

Exemple 6.11
Lors d'un contrôle, la moyenne des 15 filles d'une classe était de 12/20. La moyenne des 10 garçons de 11/20. La moyenne de la classe est :

$$M = \frac{15 \times 12 + 10 \times 11}{15 + 10} = 11{,}6$$

6.3 Paramètres de dispersion

Les paramètres de positions sont insuffisants pour étudier correctement une série statistique : deux séries ayant les mêmes paramètres peuvent être très différentes.

Exemple 6.12
On donne les résultats de deux groupes d'élèves à un même contrôle :

Groupe 1 :

note x	3	5	6	7	8	9	10	13	14	18	20
effectif	1	1	2	2	4	2	1	2	3	1	1

Groupe 2 :

note y	1	2	3	4	13	14	18	19	20
effectif	3	2	2	4	1	2	4	2	2

Ces deux séries ont pour moyenne $\overline{x} = \overline{y} = 10$ et pour médiane $\text{Med}_x = \text{Med}_y = 8{,}5$.

6.3.1 L'étendue

Définition 6.5
L'*étendue* d'une série statistique est la différence entre les deux valeurs extrêmes observées.

Exemple 6.13
Dans l'exemple 6.12, l'étendue du groupe 1 vaut $20 - 3 = 17$, et l'étendue du groupe 2 vaut $20 - 1 = 19$.

6.3.2 Les quartiles

Définition 6.6
Soit x une série statistique avec $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$.
Les *quartiles* (au nombre de 3 : Q_1, Q_2 et Q_3) partagent la population classée par ordre croissant de valeur du caractère en quatre sous ensembles, en respectant les règles ci-dessous :
- Q_1 est la valeur x_i dont l'indice i est le plus petit entier supérieur ou égal à $n/4$.
- Q_2 est la valeur x_i dont l'indice i est le plus petit entier supérieur ou égal à $n/2$.
- Q_3 est la valeur x_i dont l'indice i est le plus petit entier supérieur ou égal à $3n/4$.

Définition 6.7
L'*écart interquartile* est la différence entre le 3^{e} et le 1er quartile. Au moins 50% des observations ont une valeur du caractère comprise entre Q_1 et Q_3.

Exemple 6.14
Calculer les trois quartiles de chacune des séries de l'exemple 6.12 :

série x : $n = 20$ donc $n/4 = 5$, $n/2 = 10$, $3n/4 = 15$,
on a donc : $Q_1 = x_5 = 7$, $Q_2 = x_{10} = 8$, $Q_3 = x_{15} = 13$;

série y : $n = 22$ donc $n/4 = 5{,}5$, $n/2 = 11$, $3n/4 = 16{,}5$,
on a donc $Q_1 = y_6 = 3$, $Q_2 = y_{11} = 14$, et $Q_3 = y_{17} = 18$.

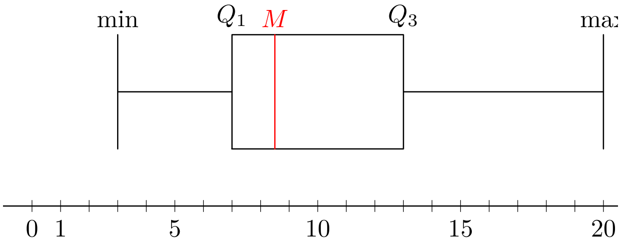
On pourra se réferer à l'annexe A de la page 55 pour l'obtention des paramètres statistiques à l'aide de la calculatrice.

6.3.3 Application : les diagrammes en boîtes

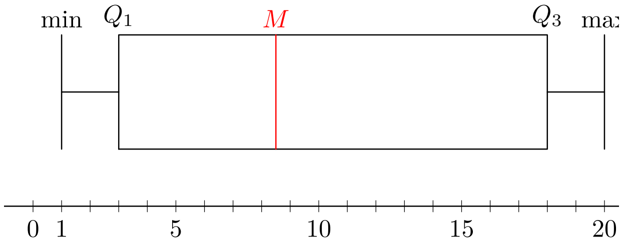
La représentation graphique de la dispersion d'une série statistique se fait à l'aide de graphiques appelés *diagrammes en boites*, *boites à moustaches*, ou *box plot*, voire *diagramme de Tuckey*. On les trace comme ceci :
- on construit en face d'un axe gradué, permettant de repérer les valeurs extrêmes de la série étudiée, un rectangle dont la longueur est égale à l'écart interquartile et dans lequel on représente la médiane par un trait ;
- deux traits repèrent les valeurs extrêmes de la série.

Exemple 6.15
On reprend les deux séries de l'exemple 6.12 :

Série x :



Série y :



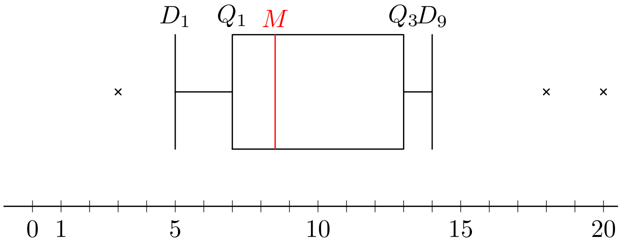
On pourra se réferer à l'annexe A de la page 55 pour l'obtention des boites à moustaches à l'aide de la calculatrice.

Remarque 6.2

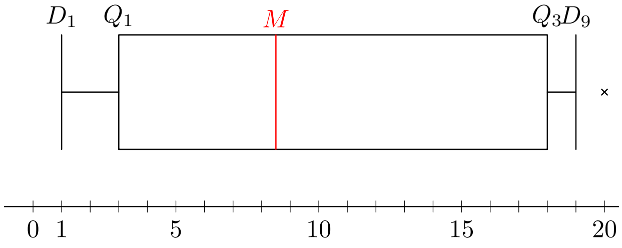
Parfois, les « moustaches » sont placées aux premier et neuvième déciles. Les valeurs extrêmes ou les valeurs inférieures à D_1 et supérieures à D_9 sont alors indiquées par une croix.

Exemple 6.16
En reprenant les séries de l'exemple 6.12, on obtient les boîtes à moustaches (avec déciles) suivantes :

Série x :



Série y :



6.3.4 Variance et écart type

Définition 6.8
La *variance* est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne. C'est un nombre positif.

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{N} = \frac{n_1 \left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + \cdots + n_p \left(x_p - \overline{x}\right)^2}{N}$$

Cette formule n'est pas à connaître par contre il faut savoir déterminer la variance avec la calculatrice.

Définition 6.9
L'*écart type* d'une série statistique est égal à la racine carrée de la variance.

Remarque 6.3
L'écart type permet de mesurer la dispersion d'une série statistique ; à moyenne égale, plus il est important, plus les valeurs observées sont dispersées. Son avantage par rapport à la variance est qu'il est exprimé dans la même unité que les valeurs de la série.

« *Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve.* »
Euclide d'Alexandrie

Chapitre 7

Dérivation

7.1 Dérivée d'une fonction polynôme du second degré

7.1.1 Définition

Définition 7.1
Soit f une fonction polynôme du second degré défini par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
On appelle *fonction dérivée* de f la fonction notée f' définie par :

$$f'(x) = 2ax + b$$

Exemple 7.1
Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2 + 3x - 1; \qquad g(x) = -3x^2 + x + 1; \qquad h(x) = -5x^2 + 5$$

Calculer $f'(2)$, $g'(-5)$ et $h'(0)$.

Remarque 7.1
La fonction dérivée d'une fonction polynôme du second degré est une fonction affine.

Remarque 7.2
La plupart des autres fonctions usuelles ont aussi une fonction dérivée mais qui s'obtiennent par d'autres formules que nous ne verrons pas cette année.

7.1.2 Dérivée et variations

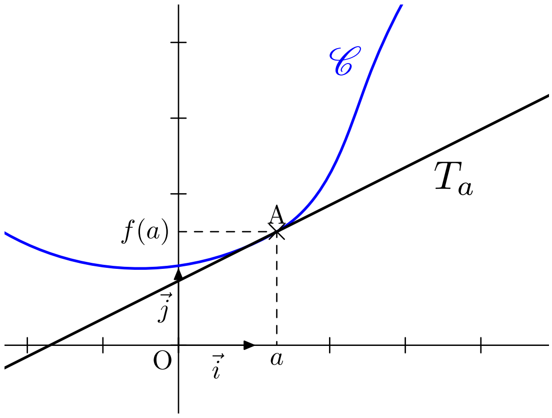
Théorème 7.1 (admis)
Soit f une fonction polynôme du second degré et f' sa fonction dérivée ; on a alors :
– si $f'(x) > 0$ sur un intervalle I alors f est croissante sur cet intervalle I ;
– si $f'(x) < 0$ sur un intervalle I alors f est décroissante sur cet intervalle I ;

Exemple 7.2
Étudier les variations de la fonction f sur $[-5; 5]$ définie par $f(x) = x^2 - 3x - 1$.
En déduire les extremums de f sur cet intervalle.

7.1.3 Tangente

Définition 7.2
Soit f une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère. On appelle *tangente* à $\mathscr{C}_f$ en $a \in \mathbf{R}$ la droite qui passe par le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a et qui a pour coefficient directeur $f'(a)$.

Remarque 7.3
Avec les notations de la définition précédente et en notant A le point de coordonnées $(a; f(a))$, la tangente en A à $\mathscr{C}_f$ est une droite qui passe « au plus près » de $\mathscr{C}_f$ autour du point A.



7.1.4 Exemples

Exemple 7.3
Soit f la fonction carré. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 puis au point d'abscisse 2.
Pour $x \in \mathbf{R}$ on a $f(x) = x^2$ et donc $f'(x) = 2x$. Ainsi le nombre dérivé en 1 est $f'(1) = 2 \times 1 = 2$ et $f'(2) = 2 \times 2 = 4$. Donc les coefficients directeurs en ces points sont respectivement 2 et 4.

Exemple 7.4
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 1$. Montrer que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4 est parallèle à l'axe des abscisses.
Pour $x \in \mathbf{R}$ on a $f'(x) = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)x + 4 = -x + 4$; donc $f'(4) = 0$.
Donc le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4 est 0 : la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

Exemple 7.5
Soit f une fonction qui admet une fonction dérivée. La droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2x - 4$ est tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 5. Déterminer $f(5)$ et $f'(5)$.
On a :
- $a = 5$;
- $f'(a) = f'(5)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 5 donc c'est le coefficient directeur de $\mathscr{D}$ c'est-à-dire $f'(5) = 2$;
- $f(a) = f(5)$ est l'ordonnée du point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 5 mais c'est aussi l'ordonnée du point de $\mathscr{D}$ d'abscisse 5 car $\mathscr{D}$ est tangente à $\mathscr{C}_f$ en ce point donc $f(5) = 2 \times 5 - 4 = 6$.