NOM : .... PRÉNOM : ....

Exercice 1.

La production journalière d'une entreprise dépend de deux facteurs : le travail de la main d'œuvre et l'utilisation des machines. On désigne :

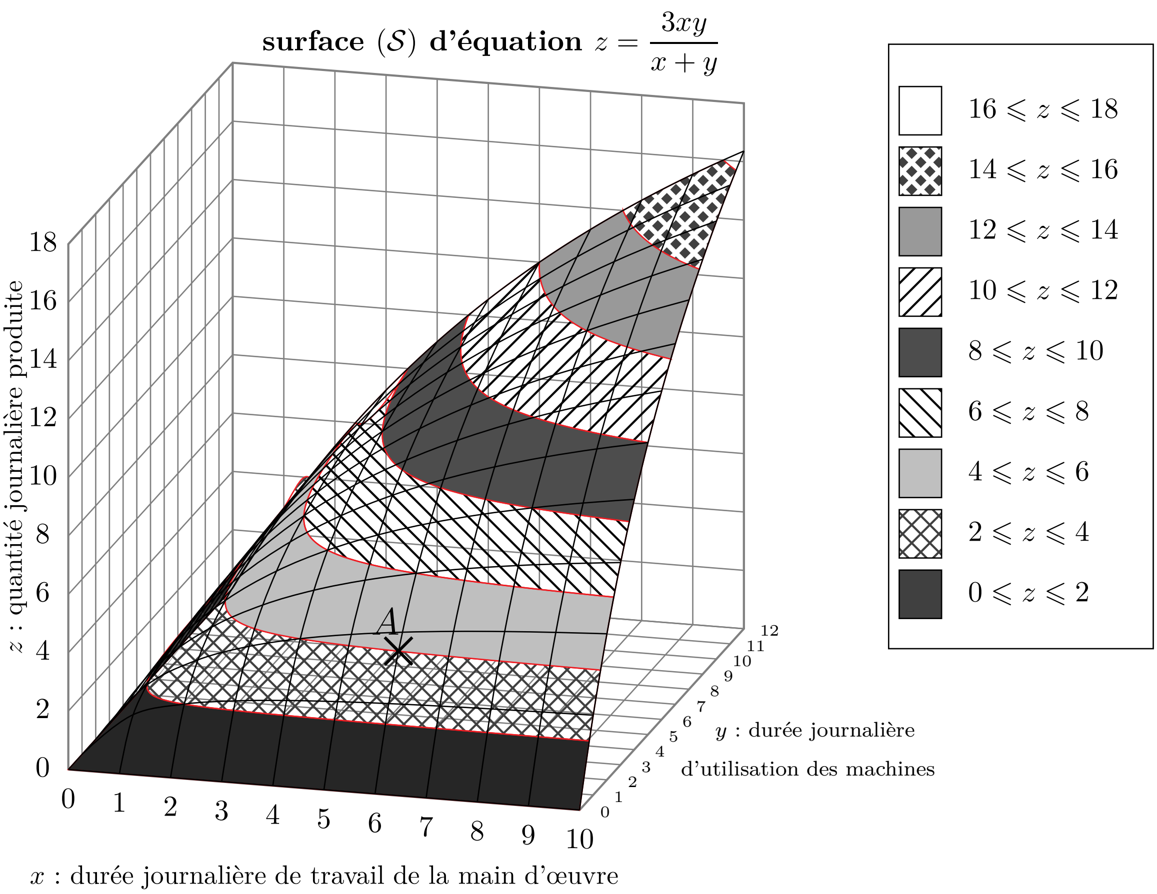
– par x la durée journalière de travail de la main d'œuvre, exprimée en heure ; x appartient à l'intervalle $]0\ ;\ 10]$

– par y la durée journalière d'utilisation des machines, exprimée en heures ; y appartient à l'intervalle $]0\ ;\ 12]$.

La quantité journalière produite (en tonnes) est donnée par la relation :

$$f(x\ ;\ y) = \frac{3xy}{x+y} \text{ avec } 0 < x \leq 10 \text{ et } 0 < y \leq 12.$$

La figure ci-dessous représente la surface $(\mathcal{S})$ d'équation : $z = f(x\ ;\ y)$ pour $0 < x \leq 10$ et $0 < y \leq 12$.



Partie 1 : le point A représenté par une croix est un point de la surface $(\mathcal{S})$.

1. Déterminer graphiquement l'abscisse et la cote du point A. Calculer son ordonnée (arrondie au dixième).
2. Interpréter les résultats obtenus en référence à la production journalière de l'entreprise.

Partie 2 : pour chaque heure, le coût total du travail s'élève à 4 milliers d'euros, et le coût d'utilisation des machines s'élève à 1 millier d'euros.
L'entreprise décide de dépenser 36 milliers d'euros par jour et cherche à maximiser sa production journalière sous cette contrainte. On a alors $4x + y = 36$.
La quantité journalière produite (en tonnes) sous cette contrainte de coût peut donc être modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ 10]$ par $g(x) = \dfrac{4x^2 - 36x}{x - 12}$.

1. On note g' la fonction dérivée de g sur l'intervalle $]0\ ;\ 10]$.
   a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\ ;\ 10]$, calculer $g'(x)$ et montrer que :
   $g'(x) = \dfrac{4\,(x-6)\,(x-18)}{(x-12)^2}$
   b. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ 10]$.
2. a. En déduire la durée journalière de travail et la durée journalière d'utilisation des machines permettant d'obtenir une production journalière maximale pour un coût total de 36 milliers d'euros.
   b. Préciser la quantité journalière maximale produite en tonnes.

Exercice 2.
Une entreprise fabrique des savons et des bougies parfumées en quantités respectives x et y exprimées en tonnes. Le coût total de production z, exprimé en milliers d'euros, est donné par la relation $z = 2x^2 - 8x + y^2 - 6y + 18$ avec $x \in [0\ ;\ 6]$ et $y \in [0\ ;\ 8]$.

1. La surface $\mathcal{S}$ représentant le coût en fonction de x et y dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est donnée sur la feuille annexe, (*qui sera rendue complétée avec la copie*) figure 1.
   a. Le point A(3 ; 2 ; 3) appartient-il à la surface $\mathcal{S}$? Justifier.
   b. Placer sur la figure 1 le point B d'abscisse 5 et d'ordonnée 2 qui appartient à $\mathcal{S}$.
   c. Soit $y = 2$. Exprimer alors z sous la forme $z = f\,(x)$ puis donner la nature de la section de la surface $\mathcal{S}$ par le plan d'équation $y = 2$ en justifiant.
2. La fabrication de x tonnes de savons et de y tonnes des bougies parfumées engendre la contrainte $x + y = 5$.
   a. Quelle est la nature de l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient $x + y = 5$?
   b. Vérifier que, sous la contrainte $x + y = 5$, z peut s'écrire sous la forme $z = g\,(x)$ avec $g(x) = 3x^2 - 12x + 13$.
   c. Déterminer la valeur de x pour laquelle g admet un minimum puis la valeur de y et le coût de production z qui correspondent. On note C le point de la surface $\mathcal{S}$ qui correspond à ce coût minimum.
   d. On donne, sur la feuille annexe, figure 2, la projection orthogonale de la surface $\mathcal{S}$ sur le plan $(x\mathrm{O}y)$ (« vue de dessus de la surface $\mathcal{S}$ »).
   Construire sur cette figure 2 la projection orthogonale sur le plan $(x\mathrm{O}y)$ des points dont les coordonnées vérifient $x + y = 5$.
   Placer sur cette figure 2 le point C_1, projeté orthogonal du point C sur le plan $(x\mathrm{O}y)$.

ANNEXE : Exercice 2 (spécialité)

À rendre avec la copie

Figure 1

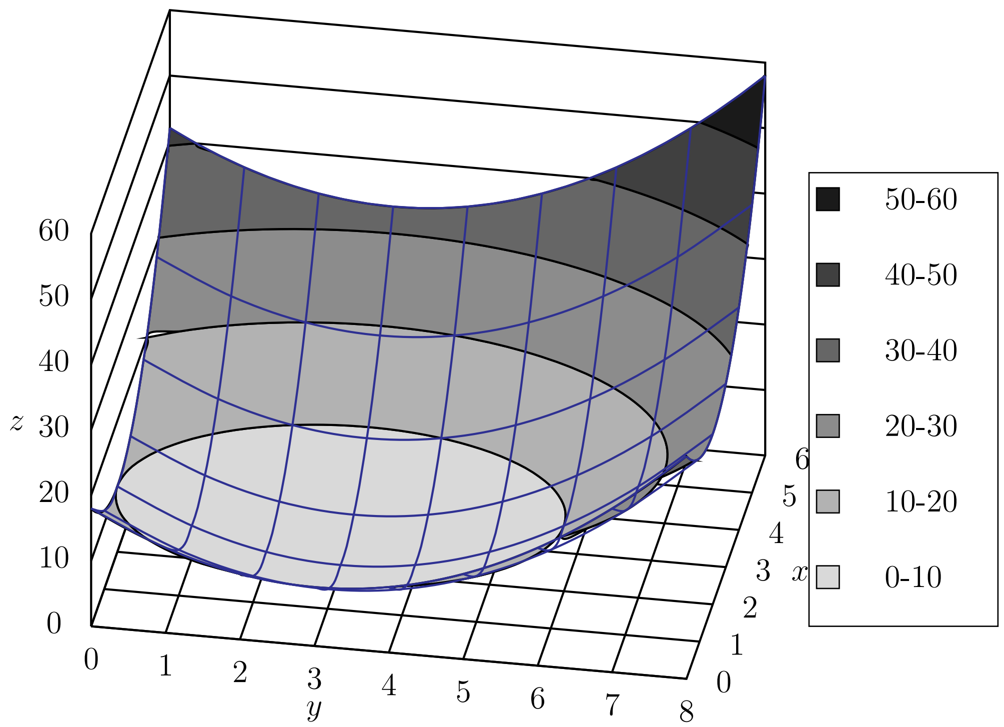
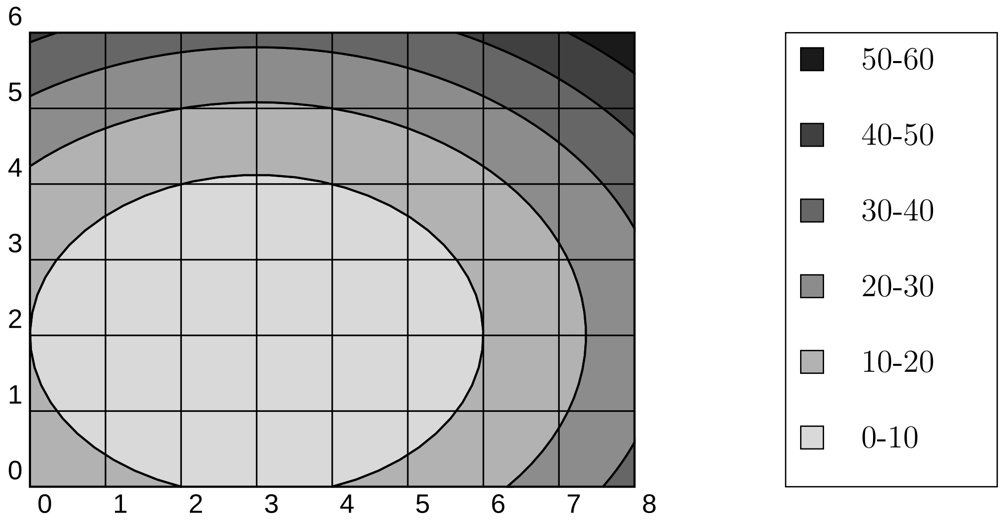


Figure 2



Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1.
Partie 1

1. $x_A = 6$ et $z_A = 4$. Or $z_A = \frac{3x_A y_A}{x_A + y_A}$ soit $4 = \frac{18 y_A}{6 + y_A}$; en résolvant cette équation on obtient $y_A = \frac{12}{7} \approx 1{,}7$.
2. Pour 6 h de travail de la main d'œuvre et 1,7 h d'utilisation des machines, on produit 4 tonnes.

Partie 2

1. a. Pour $x \in]0; 10]$ on a :

$$g'(x) = \frac{(8x-36)(x-12) - (4x^2-36x)\times 1}{(x-12)^2} = \frac{4x^2 - 96x + 432}{(x-12)^2} = \frac{4(x^2 - 24x + 108)}{(x-12)^2}$$

Le discriminant de la parenthèse de numérateur vaut $\Delta = 144$ donc ce trinôme a deux racines : $\alpha = 6$ et $\beta = 18$ d'où :

$$g'(x) = \frac{4(x-6)(x+18)}{(x-12)^2}$$

b.

x	0		6		10
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
g	‖ 0	$\nearrow$	12	$\searrow$	-20

2. a. Sous la contrainte du budget, la production est maximale pour $x = 6$ h de travail de la main d'œuvre ; on a alors $y = 12$ h de fonctionnement des machines.

   b. La quantité produite est alors de 12 tonnes.

Corrigé de l'exercice 2.

1. a. On a $2x_A^2 - 8x_A + y_A^2 - 6y_A + 18 = 2\times 3^2 - 8\times 3 + 2^2 - 6\times 2 + 18 = 4 \neq z_A$ donc $A \notin \mathcal{S}$.

   b. B est au croisement des lignes $y = 2$ et $x = 5$ sur la surface ; à la frontière entre des zones de côtes « 10-20 » et « 20-30 ».

   c. Pour $y = 2$ on a $z = 2x^2 - 8x + 10$ qui est l'équation d'une parabole (fonction polynôme de degré 2) dans le plan $y = 2$.

2. a. Il s'agit d'un plan parallèle à l'axe (Oz).

   b. En prenant $y = 5 - x$ on obtient :
   $f(x; 5-x) = 2x^2 - 8x + (5-x)^2 - 6(5-x) + 18 = 3x^2 - 12x + 13$.

c. Pour $x \in [0;6]$ on a $g'(x) = 6x - 12$ qui s'annule pour $x = 2$, qui est négatif pour $x < 2$ et positif sinon. Donc g est décroissante sur $[0;2]$ et croissante sur $[2;6]$. Le coût est donc minimum pour $x = 2$ (et donc $y = 3$) et il vaut alors $z = 1$ (millier d'euros).

d. Les points dont les coordonnées vérifient la contrainte sont les points de la droite d'équation $y = 5 - x$ dans le repère de la figure 2.

C_1 est le point de coordonnées $(2;3)$ dans le repère de la figure 2.