Nom : .... Prénom : ....

Le soin et la rédaction prendront une part importante dans la notation des copies. Le sujet est à rendre *obligatoirement* avec la copie. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (7 points)**.**
Un restaurant propose à sa carte deux types de dessert :
- un assortiment de macarons, choisi par 50 % des clients ;
- une part de tarte tatin, choisie par 30 % des clients.

20 % des clients ne prennent pas de dessert et aucun client ne prend plusieurs desserts.

Le restaurateur a remarqué que :
- parmi les clients ayant pris un assortiment de macarons, 80 % prennent un café ;
- parmi les clients ayant pris une part de tarte tatin, 60 % prennent un café ;
- parmi les clients n'ayant pas pris de dessert, 90 % prennent un café.

On interroge au hasard un client de ce restaurant. On note p la probabilité associée à cette expérience aléatoire.

On note :
- M l'évènement : « Le client prend un assortiment de macarons » ;
- T l'évènement : « Le client prend une part de tarte tatin » ;
- P l'évènement : « Le client ne prend pas de dessert » ;
- C l'évènement : « Le client prend un café » et $\overline{C}$ l'évènement contraire de C.

1. En utilisant les données de l'énoncé, préciser la valeur de $p(T)$ et celle de $P_T(C)$, probabilité de l'évènement C sachant que T est réalisé.
2. Dresser un arbre de probabilité décrivant cette situation.
3. a. Exprimer par une phrase ce que représente l'évènement $M \cap C$ puis calculer $p(M \cap C)$.
   b. Montrer que $p(C) = 0{,}76$.
4. Quelle est la probabilité que le client prenne un assortiment de macarons sachant qu'il prend un café ? (*On donnera le résultat arrondi au centième*).
5. On considère une table à laquelle quatre clients se sont installés et où ceux-ci choisissent indépendamment les uns des autres leur dessert et le choix du café ou non. Calculer la probabilité qu'exactement deux d'entre eux prennent un café.
6. Un assortiment de macarons est vendu 6 €, une part de tarte tatin est vendue 7 €, et un café est vendu 2 €.
   Chaque client prend un plat (et un seul) au prix unique de 18 €, ne prend pas plus d'un dessert ni plus d'un café.
   a. Quelles sont les six valeurs possibles pour la somme totale dépensée par un client ?
   b. Compléter le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de la somme totale dépensée par un client :

Sommes s_i	18	20	24	...	...	...
$p(s_i)$	0,02	0,18	...			

   c. Calculer l'espérance mathématique de cette loi et interpréter ce résultat.

Exercice 2 (6 points).

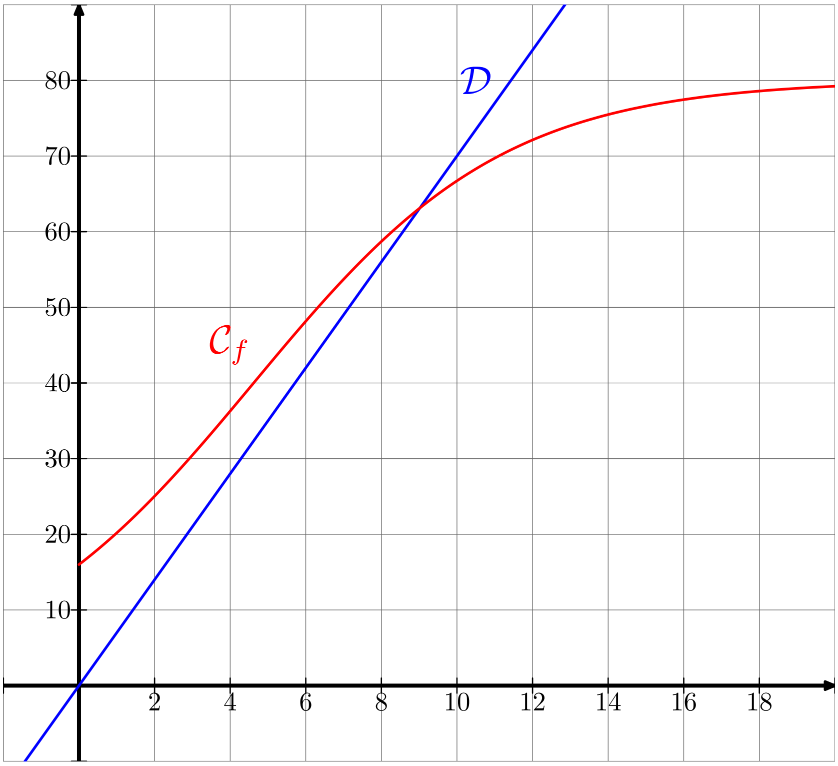
Partie A : étude d'une fonction

Soit f la fonction dérivable définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{80}{1 + 4\mathrm{e}^{-0,3x}}.$$

Dans un repère orthogonal, on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et D la droite d'équation $y = 7x$.

On admet que la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite D se coupent en un seul point d'abscisse x_0 et on donne $x_0 \approx 9,02$.



1. Calculer $f(0)$ et la valeur arrondie au centième de $f(20)$.
2. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
3. a. Calculer la limite de f en $+\infty$. En déduire que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$ et en donner une équation.

   b. Montrer que pour tout x appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$, on a $f(x) < 80$. En déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $y = 80$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
4. À l'aide du graphique, déterminer, selon les valeurs de x, le signe de $7x - f(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie B : interprétation économique

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On utilisera les résultats de la partie A.

Une entreprise peut produire chaque jour au maximum 2 000 thermomètres de bain pour bébé.

On note x le nombre de centaines de thermomètres produits chaque jour travaillé, x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 20]$.

On suppose que le coût total de production par jour, exprimé en centaines d'euros, est égal à $f(x)$, où f est la fonction définie dans la **partie A**.

1. Déterminer le montant des « coûts fixes », c'est-à-dire le montant des coûts lorsque la quantité produite est nulle.
2. Le coût total de production des thermomètres peut-il atteindre 8 100 € par jour ? Justifier.
3. Le prix de vente d'un thermomètre est fixé à 7 €. La recette journalière, exprimée en centaines d'euros, est donc donnée par $R(x) = 7x$.

   Pour quelles productions journalières de thermomètres l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ? Justifier.

Exercice 3 (3 points)**.**
Une somme C empruntée au taux [1] annuel t, est remboursée en n annuités A égales. La formule qui relie C, t, n et A est donnée ci-dessous :

$$C = A \times \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

Monsieur X a emprunté la somme de 26 243 € au taux annuel de 7 %. Il peut effectuer ses remboursements :
– par annuités de 10 000 € ;
– ou par annuités de 8 000 €.
Dans chacun des deux cas proposés quelle serait (on détaillera les calculs) :

a. la durée de remboursement du prêt ;

b. la somme totale versée par M. X pour rembourser son emprunt.

1. Aide (généreuse) : pour un taux de 5 % on a $t = 0{,}05$.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

1. $p(T) = 0{,}30$; $p_T(C) = 0{,}60$.
2.
3. a. $M \cap C$ est l'événement « le client choisit l'assortiment de macarons **et** prend un café ».
   $p(M \cap C) = p(M) \times p_M(C) = 0{,}50 \times 0{,}80 = 0{,}40$.

   b. $p(C) = p(M \cap C) + p(T \cap C) + p(P \cap C) = 0{,}40 + 0{,}30 \times 0{,}60 + 0{,}20 \times 0{,}90 = 0{,}76$.
   (formule des probabilités totales : les événements M, T et P forment une partition de l'univers).
4. $p_C(M) = \frac{p(M \cap C)}{p(C)} = \frac{0{,}40}{0{,}76} \approx 0{,}53$.
5. En dressant l'arbre des possibilités (16 branches), on constate que 6 chemins aboutissent à « deux cafés ». La probabilité cherchée est donc $p = 6 \times 0{,}76^2 \times 0{,}24^2 \approx 0{,}199\,6$.
6. a. Les prix possibles sont :

   – plat seul : 18 € ;
   – plat + café : 20 € ;
   – plat + macarons : 24 € ;
   – plat + macarons + café : 26 € ;
   – plat + tarte : 25 € ;
   – plat + tarte + café : 27 €.

   b. On obtient :

Sommes s_i	18	20	24	25	26	27
$p(s_i)$	0,02	0,18	0,10	0,12	0,40	0,18

   c. $E = 18 \times 0{,}02 + 20 \times 0{,}18 + \cdots = 24{,}63$. Il s'agit de l'addition moyenne d'un client de ce restaurant.

Corrigé de l'exercice 2.
Partie A

1. $f(0) = \frac{80}{5} = 16$ et $f(20) \approx 79{,}21$.
2. Pour $x \geq 0$ on a $f'(x) = \frac{80 \times 1{,}2\mathrm{e}^{-0{,}3x}}{(1+4\mathrm{e}^{-0{,}3x})^2} > 0$ donc f est croissante sur $\mathbf{R}_+$.
3. a. $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-0{,}3x} = 0$ donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 80$. Ainsi la droite d'équation $y = 80$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

   b. Pour tout $x \geq 0$ on a $4\mathrm{e}^{-0{,}3x} > 0$ donc $1 + 4\mathrm{e}^{-0{,}3x} > 1$ et donc $\frac{80}{1+4\mathrm{e}^{-0{,}3x}} < 80$. Ainsi $\mathcal{C}_f$ est en dessous de l'asymptote horizontale.
4. $7x - f(x) > 0$ lorsque la droite $\mathcal{D}$ est au dessus de $\mathcal{C}_f$ c'est-à-dire pour $x > x_0$. De même $7x - f(x) < 0$ pour $x < x_0$.

Partie B

1. le montant des coûts fixes est $f(0) = 16$ centaines d'euros soit 1 600 €.
2. C'est impossible car on a montré que pour tout $x \geq 0$ on a $f(x) < 80$ donc les coûts ne dépassent pas 8 000 €.
3. L'entreprise réalise un bénéfice lorsque $7x - f(x) > 0$ soit pour $x > x_0$ c'est-à-dire pour plus de 902 thermomètres produits.

Corrigé de l'exercice 3.
Pour des annuités de 10 000 € on a : $C = 26\ 243$, $t = 0{,}07$, $A = 10\ 000$ et :

$$\begin{aligned}
C = A \times \frac{1-(1+t)^{-n}}{t} &\iff \frac{C}{A} = \frac{1-(1+t)^{-n}}{t} \\
&\iff \frac{tC}{A} = 1-(1+t)^{-n} \\
&\iff (1+t)^{-n} = 1 - \frac{tC}{A} \\
&\iff -n\ln(1+t) = \ln\left(1-\frac{tC}{A}\right) \\
&\iff n = -\frac{\ln\left(1-\frac{tC}{A}\right)}{\ln(1+t)}
\end{aligned}$$

En remplaçant on obtient $n = 3$. On aura remboursé au total : $3 \times 10\ 000 = 30\ 000$.
De même avec $A = 8\ 000$ on obtient $n = 3{,}86$ pour un remboursement total de 30 880 €.