Chapitre 3

Les matrices

3.1 Définitions

3.1.1 Matrice

Définition 3.1
Une matrice $m \times n$ est un tableau de nombres à m lignes et n colonnes. Les nombres qui composent la matrice sont appelés les *éléments* de la matrice (ou aussi les *coefficients*).
Notations :
– Les coefficients s'écrivent sans « séparation » verticale ou horizontale et la matrice est « encadrée » par des parenthèses.
– Si A est une matrice de dimension $m \times n$, on note généralement a_{ij} le coefficient qui est à la i^{e} ligne et dans la j^{e} colonne de la matrice, où $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.

Exemple 3.1
$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice à 3 lignes et 4 colonnes.
On a $a_{13} = -1$, $a_{31} = \sqrt{2}$.

Définition 3.2 (cas particuliers)
– Une matrice dont tous les éléments sont nuls est appelée *matrice nulle*.
– Une matrice ne contenant qu'une ligne (matrice $1 \times n$) est appelée *matrice ligne* ou encore *vecteur ligne*.
– Une matrice ne contenant qu'une colonne (matrice $m \times 1$) est appelée *matrice colonne* ou encore *vecteur colonne*.
– Une matrice ayant le même nombre de lignes et de colonnes (matrice $m \times m$) est appelée une *matrice carrée*.

3.1.2 Matrices carrées

– Dans une matrice carrée, la *diagonale* est la suite des éléments de la diagonale issue du coin haut-gauche au coin bas-droit.
$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & -7 & 0 \\ \sqrt{5} & 0 & -2 \end{pmatrix}$. La diagonale de B est en bleu : $\begin{pmatrix} 4 & -7 & -2 \end{pmatrix}$

– Une matrice carrée dont tous les éléments en dehors de la diagonale sont nuls[1] est appelée matrice *diagonale*.
$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale.
– La matrice diagonale $n \times n$ dont tous les éléments de la diagonale sont égaux à 1 est appelée *matrice unité*. On la note I_n.
$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice unité d'ordre 4.

3.1.3 Transposée d'une matrice

Définition 3.3
Soit M une matrice $m \times n$. La transposée de la matrice M est la matrice $n \times m$ notée ${}^tM$ dont les lignes sont les colonnes de M.

Exemple 3.2
Soit D la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. La transposée de D est ${}^tD = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$${}^t\begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

3.1.4 Égalité de deux matrices

Définition 3.4
Soit A et B deux matrices ayant le même nombre de lignes et de colonnes. On dit que $A = B$ si tous les éléments de A sont égaux aux élements correspondants de B.

Exemple 3.3
On donne : $E = \begin{pmatrix} 2x+3 & 5 \\ 3 & -2y-4 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer x et y pour que les matrices E et F soient égales.
E et F sont égales si $\begin{cases} 2x+3 & = & -1 \\ -2y-4 & = & 5 \end{cases}$. Soit $x = -2$ et $y = -\frac{9}{2}$.

3.2 Opérations élémentaires

3.2.1 Addition de matrices

Définition 3.5
Soit M et N deux matrices ayant le même nombre de lignes et de colonnes. La somme des matrices M et N est la matrice de mêmes dimensions que M et N dont chaque élément est la somme des éléments correspondants de M et N.

[1]Certains éléments de la diagonales peuvent aussi être nuls.

Exemple 3.4
$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -8 \end{pmatrix}$

3.2.2 Multiplication d'une matrice par un nombre

Définition 3.6
Soit M une matrice quelconque et λ un réel. Le produit de λ par M est la matrice de mêmes dimensions que M dont chaque élément est le produit de λ par l'élément correspondant de M.

Exemple 3.5
Soit $M = \begin{pmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{pmatrix}$, et $\lambda \in \mathbf{R}$. On a : $\lambda M = \begin{pmatrix} 4\lambda & \lambda a \\ \lambda b & -\lambda \end{pmatrix}$

Remarque 3.1
En prenant $\lambda = -1$, on peut ainsi définir la matrice opposée d'une matrice A : c'est la matrice $(-1) \times A$ qu'on note aussi $-A$. De même on définit la soustraction de deux matrices A et B : $A - B = A + (-1) \cdot B$.

Exemple 3.6
Soit A et B les matrices définies par : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$.
L'opposée de B est $-B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, et la différence de A et B est : $A - B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

3.2.3 Propriétés

On admettra le théorème suivant :

Théorème 3.1
Soit A, B et C trois matrices ayant le même nombre de lignes et de colonnes, λ et λ' deux réels.

$$\begin{aligned} A + B &= B + A && (1) \\ (A + B) + C &= A + (B + C) && (2) \\ \lambda(A + B) &= \lambda A + \lambda B && (3) \\ (\lambda + \lambda')A &= \lambda A + \lambda' A && (4) \\ \lambda(\lambda' A) &= (\lambda\lambda')A && (5) \end{aligned}$$

Remarque 3.2
- L'égalité (1) caractérise la *commutativité* de l'addition matricielle.
- L'égalité (2) traduit son *associativité*.
- L'égalité (3) traduit la *distributivité* de la multiplication de matrice par un réel par rapport à l'addition de matrices.
- L'égalité (3) traduit la *distributivité* de la multiplication de matrice par un réel par rapport à l'addition de réels.

Remarque 3.3
Soit A et B deux matrices connues, et X une matrice dont on ne connait pas les coefficients telle que $A + X = B$.

En utilisant la remarque 3.1, on peut soustraire aux deux membres de cette égalité matricielle la matrice A et on obtient : $X = B - A$.

Exemple 3.7
On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. Soit X une matrice 2×2 telle que $2X + 3A = B$. Déterminer X.
En utilisant la remarque 3.3, on obtient que $2X = B - 3A$. En multipliant les matrices $2X$ et $B - 3A$ par $\frac{1}{2}$, on obtient $X = \frac{1}{2}(B - 3A)$.
$3A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$. Donc $-3A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$. Et donc : $B - 3A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.
Finalement, on obtient $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3.3 Produit de matrices

3.3.1 Produit d'une matrice par un vecteur colonne

On peut effectuer le produit d'une matrice à n colonnes (quelque soit le nombre m de lignes) par un vecteur colonne à n lignes[2]. Le résultat est alors un vecteur colonne à m lignes.

Exemple 3.8
On considère une matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ -1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ et un vecteur colonne $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
Le produit AV est le vecteur colonne $V = \begin{pmatrix} 2x + 4y - 5z \\ -x + 6y + 3z \end{pmatrix}$.

Exemple 3.9 (technique de calcul)
On obtient le résultat en additionnant les « produits diagonaux » :

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 0 \times (-2) + (-3) \times 3 \\ -2 \times 1 + 1 \times (-2) + 3 \times 3 \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

3.3.2 Produit d'un vecteur ligne par une matrice

On peut effectuer le produit d'un vecteur ligne à m colonnes par une matrice à m lignes (quelque soit le nombre n de colonnes). Le résultat est alors un vecteur ligne à n colonnes.

Exemple 3.10

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \times 3 + (-2) \times 2 + 4 \times (-2) & 1 \times (-1) + (-2) \times 0 + 4 \times 4 \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} -9 & 15 \end{pmatrix} \end{array}$$

[2] le même « n »

3.3.3 Produit de deux matrices

On peut effectuer le produit d'une matrice à m lignes et n colonnes par une matrice à n lignes[3] et p colonnes. Le résultat est alors une matrice à m lignes et p colonnes.

Exemple 3.11

On note $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Le produit AB est la matrice à 3 lignes et 4 colonnes suivante :

$$\begin{pmatrix} 2\times 2+1\times 1 & 2\times 4+1\times(-2) & 2\times 6+1\times 3 & 2\times(-1)+1\times 5 \\ 4\times 2+3\times 1 & 4\times 4+3\times(-2) & 4\times 6+3\times 3 & 4\times(-1)+3\times 5 \\ (-1)\times 2+(-2)\times 1 & (-1)\times 4+(-2)\times(-2) & (-1)\times 6+(-2)\times 3 & (-1)\times(-1)+(-2)\times 5 \end{pmatrix}$$

qui est égale à $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 15 & 3 \\ 11 & 10 & 33 & 11 \\ -4 & 0 & -12 & -9 \end{pmatrix}$

Remarque 3.4 (Attention !)

Le produit de matrices n'est pas commutatif, c'est à dire que si A et B sont deux matrices, en général, $AB \neq BA$. En effet, le nombre de lignes et de colonnes des matrices A et B peuvent permettre d'effectuer le produit AB mais pas nécessairement le produit BA. De plus même dans le cas où les deux produits existent (si les matrices sont carrées par exemple), AB n'est pas toujours égal à BA

Exemple 3.12

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Le produit AB existe : c'est la matrice $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 12 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 6 & 19 \end{pmatrix}$. Par contre le produit $B \times A$ n'existe pas car le nombre de colonnes de B n'est pas égal au nombre de lignes de A.

Exemple 3.13

On donne $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer AB puis BA.

$AB = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

3.3.4 Propriétés

Propriété 3.1

Soit A, B et C trois matrices. On a :

$$A(BC) = (AB)C$$

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$(A+B)C = AC + BC$$

[3] le même « n »

Définition 3.7
Soit A une matrice carrée et n un entier naturel non nul. On note A^n la matrice égale à $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ facteurs}}$.

Exemple 3.14
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^3.
$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Et $A^3 = A \times A^2 = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.

Remarque 3.5 (Attention !)
Pour a et b réels, si $ab = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$. Cette propriété est fausse pour les matrices : on considère $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a : $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3.4 Inverse d'une matrice

3.4.1 Définition

Exemple 3.15
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer AB, puis BA.
On a : $AB = BA = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Définition 3.8
Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n. On dit que B est *l'inverse* de A si on a $AB = I_n$.

Remarque 3.6
Dans ce cas, on a : $AB = BA = I_n$.

Exemple 3.16
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est sa propre inverse.
Il s'agit de montrer que $A \times A = I_n$. On calcule : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple 3.17
On donne $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que les matrices A et B sont inverses l'une de l'autre.

3.4.2 Recherche de l'inverse

Exemple 3.18
On donne $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, et on note B l'inverse de A si elle existe. La matrice B existe-t-elle ? Si oui, quels sont ses coefficients ?

Si $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ existe, on a : $A \times B = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Or, $A \times B = \begin{pmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ 3a+5c & 3b+5d \end{pmatrix}$. Donc résoudre $A \times B = I_2$ équivaut à résoudre le système :
$\begin{cases} 2a+3c=1 & (1) \\ 2b+3d=0 & (2) \\ 3a+5c=0 & (3) \\ 3b+5d=1 & (4) \end{cases}$
Ce système peut, en fait, se décomposer en deux systèmes :
$\begin{cases} 2a+3c=1 & (1) \\ 3a+5c=0 & (3) \end{cases}$ et $\begin{cases} 2b+3d=0 & (2) \\ 3b+5d=1 & (4) \end{cases}$
qu'on peut facilement résoudre pour obtenir le quadruplet $(5; -3; -3; 2)$ comme unique solution pour $(a; b; c; d)$.
On vérifie que B convient, c'est à dire que $A \times B = I$; ce qui est le cas. Donc B existe et elle est égale à : $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Remarque 3.7

Certaines matrices n'ont pas d'inverse. On considère par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
On cherche $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que : $A \times B = I_2$.
Or $A \times B = \begin{pmatrix} 2a+6c & 2b+6d \\ a+3c & b+3d \end{pmatrix}$. Donc si $A \times B = I_2$, alors $2a+6c=1$ et $a+3c=0$. Ce qui est impossible car la première de ces deux équations est équivalente à $a+3c=\frac{1}{2}$ et $a+3c$ ne peut être à la fois égal à $\frac{1}{2}$ et à 0. La matrice B n'existe donc pas !

Exemple 3.19 (Cas particulier)

Déterminer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exemple 3.20

En utilisant la calculatrice, déterminer l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 7 & -8 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

3.5 Application à la résolution d'un système linéaire

3.5.1 Système linéaire et matrice

On donne une matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, un vecteur colonne inconnu $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, et un vecteur colonne connu $C = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Résoudre l'équation matricielle $AV = C$ équivaut à résoudre le système $\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ 2x \quad 3y = -5 \end{cases}$.
Ainsi pour résoudre un tel système, il suffit de déterminer A^{-1} et en multipliant (à gauche) l'égalité $AV = C$ par A^{-1}, on obtient : $A^{-1}AV = A^{-1}C$ soit $V = A^{-1}C$.

Dans l'exemple précedent, on détermine A^{-1} à l'aide de la calculatrice, et on obtient

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & \frac{2}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{pmatrix} \text{ et } V = A^{-1}C = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

La solution du système est donc $\mathscr{S} = \{(2; -3)\}$.

3.5.2 Application

Exemple 3.21
Résoudre le système suivant à l'aide du mode « matrices » de la calculatrice, puis vérifier à l'aide de la méthode de Gauss :

$$(S) : \begin{cases} 2x - 3y + z = 16 \\ 3x - 4y - 2z = 5 \\ -4x + 5y - 3z = -34 \end{cases}$$

Exemple 3.22
Un fournisseur fabrique quatre types de produits P_1, P_2, P_3 et P_4 qu'il vend à quatre clients différents : C_1, C_2, C_3 et C_4. On a regroupé dans le tableau ci-contre les commandes de chaque produit pour les quatre acheteurs. De plus les montants des factures adressées à chaque client sont respectivement 51,95 €, 42,35 €, 36,60 € et 277 €.

	P_1	P_2	P_3	P_4
C_1	5	6	2	3
C_2	11	0	24	5
C_3	0	4	100	0
C_4	40	20	10	30

Déterminer le prix de vente de chaque article.