Exercice 1.
Page 113 ex 73

Corrigé

a) $f(x) = \ln(x) \times \frac{1}{x}$. Or $\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ donc par produit des deux limites précédentes, on obtient :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$$

b) Pour $x > 0$ on a $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times 1 - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$ (dérivée d'un quotient $\frac{u}{v}$).
Le signe de $f'(x)$ est donc le signe de $1 - \ln(x)$. On résout $1 - \ln(x) > 0$:

$$\begin{aligned} 1 - \ln(x) > 0 &\iff 1 > \ln(x) \\ &\iff \ln(\mathrm{e}) > \ln(1) \\ &\iff \mathrm{e} > 1 \end{aligned}$$

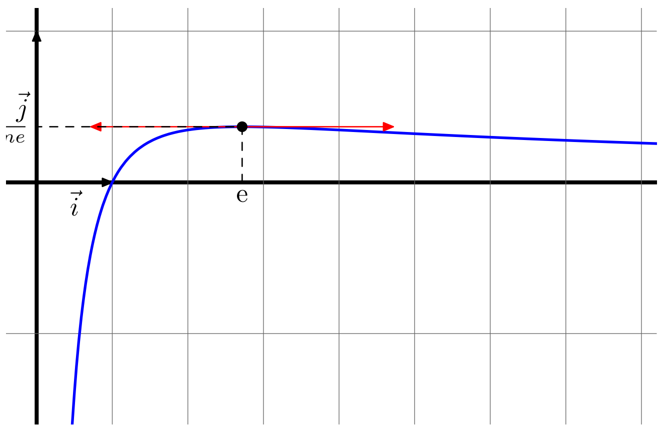
Ainsi, $f'(x) > 0$ pour $x < \mathrm{e}$ et de même, $f'(x) < 0$ pour $x > \mathrm{e}$.

c)

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	↘	0

$f(\mathrm{e}) = \frac{\ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}} = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

d)



e) $\ln(x) = mx$ équivaut, pour $x > 0$ à $\frac{\ln(x)}{x} = m$ soit $f(x) = m$. On cherche donc, en fonction de la valeur de m, le nombre de point communs entre $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y = m$.
Ainsi, en utilisant le tableau des variations de f on obtient :

- si $m \leq 0$ alors l'équation admet une unique solution appartenant à $]-\infty ; \mathrm{e}[$;
- si $0 < m < \frac{1}{\mathrm{e}}$ alors l'équation admet deux solutions : une inférieure à e et l'autre supérieure à e ;
- si $m = \frac{1}{\mathrm{e}}$ alors l'équation admet une unique solution : e ;
- enfin, si $m > \frac{1}{\mathrm{e}}$ alors l'équation n'a pas de solution.