NOM : .... PRÉNOM : ....

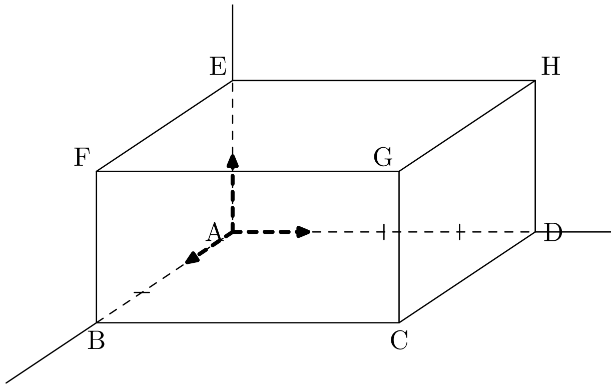
Le soin et la rédaction prendront une part importante dans la notation des copies. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet de ce devoir est à rendre *obligatoirement* avec la copie.

Exercice 1 (4 points).
Sur la figure ci-dessous, le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est orthonormé. On donne $\overrightarrow{AB}=3\vec{i}$, $\overrightarrow{AD}=4\vec{j}$ et $\overrightarrow{AE}=2\vec{k}$.

1. Quelle est la nature du solide $ABCDEFGH$? Expliquer brièvement.
2. Nommer le plan d'équation $z=2$ (avec des lettres de la figure).
3. Déterminer un équation de chacun des plans suivants :

$$(CDHG); (BFGC); (EGCA)$$

4. Tracer[1] le plan d'équation $x+y-2=0$.



Exercice 2 (2 points).
Déterminer une équation cartésienne du plan passant par les points $A(2;1;1)$, $B(3;0;2)$ et $C(0;2;-1)$ dans un repère de l'espace.

Exercice 3 (2 points).
Donner (en expliquant) les coordonnées de deux points appartenant à la droite définie par le système d'équations $\begin{cases} 2x-y+z-1=0 \\ x+2y-z+2=0 \end{cases}$

Exercice 4 (3 points).
On donne le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2y+z-4=0$ dans un repère de l'espace.

1. Ce plan est-il parallèle à un axe de coordonnées ? Si oui, lequel ?
2. Déterminer les coordonnées de deux points d'intersection de $\mathscr{P}$ avec (yOz).
3. En déduire le tracé (à faire) des intersections de $\mathscr{P}$ avec les plans (xOy) et (xOz).

Exercice 5 (5 points).
Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on donne les équations des plans suivants :

$$\mathscr{P}_1 : x+2y-3z=2; \quad \mathscr{P}_2 : 2x+4y-6z-2=0; \quad \mathscr{P}_3 : -3z+2y-x-1=0$$

Soit A le point de coordonnées $(0;2;1)$.

1. Le point A appartient-il aux plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$, $\mathscr{P}_3$? Justifier.
2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$ et $\vec{n_3}$ normaux aux plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$, $\mathscr{P}_3$ respectivement.
3. Parmi les plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$, $\mathscr{P}_3$ y en a-t-il qui sont parallèles ? Lesquels ? Justifier.
4. Déterminer les coordonnées de deux points d'intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_3$.

1. On pourra se contenter de tracer l'intersection de ce plan avec le pavé droit.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

1. $ABCDEFGH$ est un pavé droit car le repère est orthonormé.
2. Le plan d'équation $z = 2$ est le plan $(EFGH)$.
3. $(CDHG) : y = 4$ car il est parallèle à xOz.
   $(BFGC) : x = 3$ car il est parallèle à yOz.
   $(EGCA)$ est parallèle à (Oz) donc il a une équation du type $ax + by + d = 0$. Or il contient l'origine du repère donc $d = 0$ de plus $C(3; 4; 0)$ appartient à ce plan donc $3a + 4b = 0$ on peut prendre $a = 4$ et $b = -3$ donc $(EGCA) : 4x - 3y = 0$.
4. Ce plan est parallèle à (Oz) et il passe par $M(2; 0; 0)$ et $N(0; 2; 0)$.

Corrigé de l'exercice 2.

Une équation du plan ABC est du type $ax + by + cz + d = 0$. En remplaçant par les coordonnées des points A, B et C on obtient le système : $\begin{cases} 2a+b+c=-d & L_1 \\ 3a+2c=-d & L_2 \\ 2b-c=-d & L_3 \end{cases}$ Ce système équivaut à $\begin{cases} 2a+b+c=-d & L_1 \\ 3b-c=-d & 3L_1-2L_2 \to L_2' \\ 2b-c=-d & L_3 \end{cases}$ ou encore : $\begin{cases} 2a+b+c=-d & L_1 \\ 3b-c=-d & L_2' \\ b=0 & L_2'-L_3 \to L_3' \end{cases}$

D'où en prenant par exemple $d = 1$, on obtient $\begin{cases} a=-1 \\ c=1 \\ b=0 \end{cases}$ d'où $(ABC) : -x + z + 1 = 0$.

Corrigé de l'exercice 3.

On essaye de fixer $z = 0$; on résout alors $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x+2y=-2 \end{cases}$ Ce qui donne $A(0; -1; 0)$.

De même, en fixant $z = 1$ on obtient le système $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x+2y=-1 \end{cases}$. Ce qui donne $B(-\frac{1}{5}; -\frac{2}{5}; 1)$.

Corrigé de l'exercice 4.

1. $\mathscr{P}$ est parallèle à (Ox).
2. $A(0; 2; 0)$ et $B(0; 0; 4)$.
3. On trace les parallèles à (Ox) passant respectivement par A et B.

Corrigé de l'exercice 5.

1. Les coordonnées de A ne vérifient que les équations de $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ donc $A \in \mathscr{P}_2$ et $A \in \mathscr{P}_3$ mais $A \notin \mathscr{P}_1$.
2. $\overrightarrow{n_1}(1; 2; -3)$, $\overrightarrow{n_2}(2; 4; -6)$, $\overrightarrow{n_3}(-1; 2; -3)$.
3. On a $\overrightarrow{n_2} = 2\overrightarrow{n_1}$ donc $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles.
4. Par exemple $B(\frac{1}{2}; 0; -\frac{1}{2})$ et $C(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 0)$.
