Exercice 1.

Soit u la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}$.

1. Démontrer que pour tout entier n, $u_n > 1$.
2. On définit la suite v pour $n \in \mathbf{N}$ par $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$. Montrer que v est géométrique et déterminer sa limite.
3. En déduire que u est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2.

Soit u la suite définie par $u_1 = \frac{3}{2}$ et pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $u_n > 0$.
2. Démontrer que pour tout $n \geq 1$ on a $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{u_n}$.

   En déduire que pour tout $n \geq 1$, on a $u_n \geq \sqrt{2}$.
3. Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2}) + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

   En déduire que pour tout $n \geq 1$, $u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. (On pourra utiliser un raisonnement par récurrence).
4. La suite u converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa limite ?

Cette méthode d'approximation de la racine carrée d'un entier est appelée *méthode de Héron* car elle était utilisée par HÉRON D'ALEXANDRIE (I^er siècle de notre ère) sans bien sûr utiliser les suites. On remarquera la vitesse de convergence de cette méthode qui est dite *quadratique* : à chaque étape on « gagne » environ deux chiffres significatifs.

Exercice 3.

Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{10}u_n(20 - u_n) \end{cases}$

1. Soit f la fonction définie sur $[0;20]$ par $f(x) = \frac{1}{10}x(20 - x)$.
   a. Étudier les variations de f sur $[0;20]$.
   b. En déduire que pour tout $x \in [0;20]$, $f(x) \in [0;10]$.
   c. Tracer la courbe représentative de f dans un repère et représenter sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite u.
2. Montrer par récurrence que pour $n \in \mathbf{N}$ on a $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.
3. Montrer que la suite u est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4.

On considère la suite u définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. a. Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x + 6}$.
   b. Tracer dans un même repère $\mathscr{C}_f$ et $\Delta : y = x$.
   c. Représenter sur le graphique précédent les premiers termes de la suite u. Quelles conjectures peut-on faire ?

3. Montrer que u est croissante et majorée. Que peut-on en déduire pour u ?
4. Déterminer la limite de la suite u.

Exercice 5.
On considère la suite u définie par son premier terme $u_0 > -\frac{4}{3}$ et par la relation de récurrence pour $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{4+3u_n}$.

1. a. Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{4+3x}$. Tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère ainsi que la droite d d'équation $y = x$.
   b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et d.
2. On suppose dans cette question que $u_0 = 6$.
   a. Démontrer que u est minorée.
   b. Étudier les variations de u.
   c. En déduire que u converge et déterminer sa limite.
3. a. Démontrer que le résultat obtenu à la question précédente est vrai pour tout $u_0 > 4$.
   b. Qu'en est-il si $0 < u_0 < 4$?

Exercice 6 (Bac S - France 2007)**.**
Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27}$ pour tout entier naturel n.

1. a. Tracer dans un repère orthonormé (unité : 4cm) la droite d d'équation $y = \frac{1}{3}x + \frac{23}{27}$ et représenter sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite u.
   b. Démontrer que si u est convergente alors sa limite est $\ell = \frac{23}{18}$.
   c. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $u_n > \frac{23}{18}$.
   d. Étudier la monotonie de la suite u et en déduire sa convergence et sa limite.
2. a. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que :
$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) \text{ c-à-d que } \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$
   b. La suite v est définie pour $n \in \mathbf{N}$ par $v_n = 1{,}277\ldots7$ avec n décimales consécutives égales à 7. Ainsi, $v_0 = 1{,}2$, $v_1 = 1{,}27$, $v_2 = 1{,}277$, ...
   En utilisant le résultat de la question 2a, démontrer que la limite de la suite v est un nombre rationnel r.
3. La suite u et la suite v sont-elles adjacentes ? Justifier.

Exercice 7 (Amérique du Nord - Juin 2007)**.**
Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$.

1. Étudier les variations de f sur $[0\,;\,2]$. Montrer que si $x \in [1\ ;\ 2]$ alors $f(x) \in [1\ ;\ 2]$.
2. (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbf{N}$ par :
   $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$.

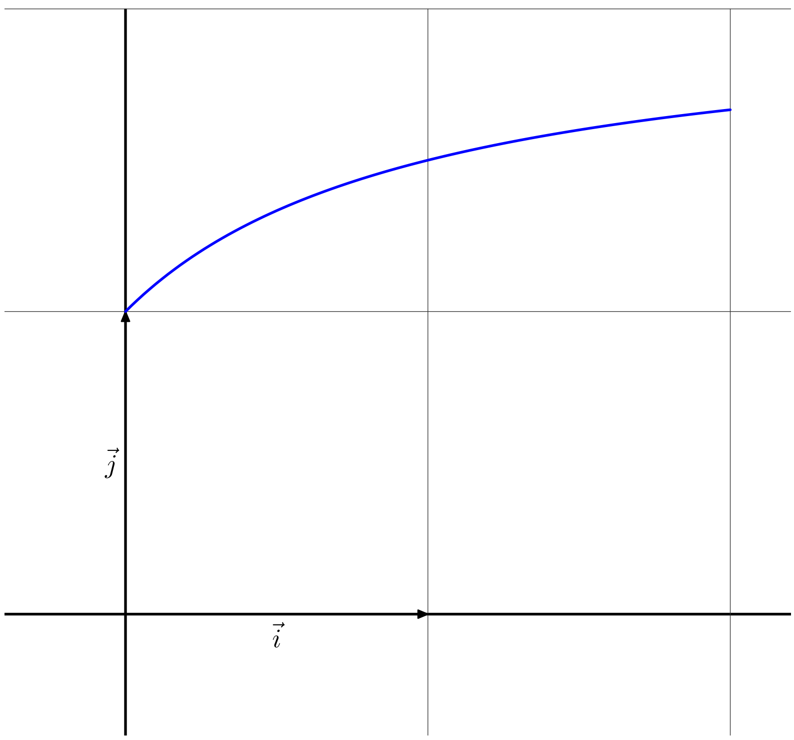
a. Le graphique donné en annexe ci-après représente la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.
Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n) en laissant apparents tous les traits de construction.
À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites (u_n) et (v_n) ?

b. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :
Pour tout entier naturel $n,\ 1 \leq v_n \leq 2$.
Pour tout entier naturel $n,\ v_{n+1} \leq v_n$.
On admettra que l'on peut démontrer de la même façon que :
Pour tout entier naturel $n,\ 1 \leq u_n \leq 2$.
Pour tout entier naturel $n,\ u_n \leq u_{n+1}$.

c. Montrer que pour tout entier naturel $n,\ v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$.
En déduire que pour tout entier naturel $n,\ v_n - u_n \geq 0$ et
$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n)$.

d. Montrer que pour tout entier naturel $n,\ v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

e. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel α.
Déterminer la valeur exacte de α.



Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

1. On procède par récurrence : pour $n \in \mathbf{N}$, soit P_n la proposition $u_n > 1$.

   Initialisation : $u_0 = 3 > 1$ donc P_0 est vraie

   Hérédité : on fait l'hypothèse que pour un n fixé, P_n est vraie, montrons alors que P_{n+1} est aussi vraie :

   $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto \frac{4x-2}{x+1}$. Une rapide étude de la fonction f donne pour $x > 1$, $f'(x) = \frac{6}{(x+1)^2} > 0$ donc f est croissante sur $[1; +\infty[$.

   On a donc $1 < u_n$ et f croissante sur $[1; +\infty[$ donc $f(1) < f(u_n)$ et donc $\frac{3}{2} < u_{n+1}$. Ainsi, P_{n+1} est vraie.

   Conclusion : donc, d'après l'axiome de récurrence, P_n est vraie pour tout n entier naturel.

2. Pour $n \in \mathbf{N}$ on a :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}-1} = \frac{\frac{4u_n-2}{u_n+1}-2}{\frac{4u_n-2}{u_n+1}-1} = \frac{4u_n-2-2(u_n+1)}{4u_n-2-(u_n+1)} = \frac{2u_n-4}{3u_n-3} = \frac{2(u_n-2)}{3(u_n-1)} = \frac{2}{3} \times v_n$$

   Donc v est géométrique de raison $\frac{2}{3} \in]-1; 1[$. Donc v est convergente et sa limite est 0.

3. On a $v_n = \frac{u_n-2}{u_n-1}$ donc $v_n \times (u_n - 1) = u_n - 2$ et donc $u_n(v_n - 1) = -2 + v_n$ et enfin $u_n = \frac{v_n-2}{v_n-1}$

   Or v converge vers 0 donc u converge vers 2.

Corrigé de l'exercice 2.

1. On procède par récurrence : pour $n \in \mathbf{N}$, soit P_n la proposition « $u_n > 0$ ».

   Initialisation : $u_0 = \frac{3}{2} > 0$ donc P_0 est vraie

   Hérédité : on fait l'hypothèse que pour un n fixé, P_n est vraie, montrons alors que P_{n+1} est aussi vraie :

   $u_n > 0$ donc $\frac{2}{u_n} > 0$ et donc $u_n + \frac{2}{u_n} > 0$; finalement, en multipliant par $\frac{1}{2}$ on obtient $u_{n+1} > 0$. Ainsi, P_{n+1} est vraie.

   Conclusion : donc, d'après l'axiome de récurrence, P_n est vraie pour tout n entier naturel.

2. Pour $n \geq 1$ on a :

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n^2+2}{u_n}\right) - \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{2} \times u_n}{u_n} = \frac{1}{2}\left(u_n^2 - 2\sqrt{2}u_n + \left(\sqrt{2}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2}{u_n}\right)$$

   On en déduit donc que pour tout n, on a $u_{n+1} - \sqrt{2} \geq 0$ donc que $u_{n+1} \geq \sqrt{2}$ et $u_0 > \sqrt{2}$
   Donc pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $u_n \geq \sqrt{2}$.

3. Pour $n \geq 1$ on a :

$$u_{n+1}-\sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - \frac{2\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}\times\frac{2}{u_n} - \frac{1}{2}\times\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right) + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(En effet $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$).

4. Pour $n \in \mathbf{N}^*$ on note P_n la proposition « $u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ ».

Initialisation : on a $u_1 = \frac{17}{12}$ donc $u_1 - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^0} = 1$; c'est-à-dire que P_1 est vraie.

Hérédité : on fait l'hypothèse que pour un $n \geq 1$ fixé, P_n est vraie (i.e : $u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$), montrons alors que P_{n+1} est aussi vraie (i.e : $u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^n}$). On a :

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right) + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Or P_n est vraie donc $u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ et de plus $u_n \geq \sqrt{2}$ donc $\frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ et donc $\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\sqrt{2}} \leq 0$. Donc :

$$u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) + 0 = \frac{1}{2^n}$$

Conclusion : donc, d'après l'axiome de récurrence, P_n est vraie pour tout n entier naturel.

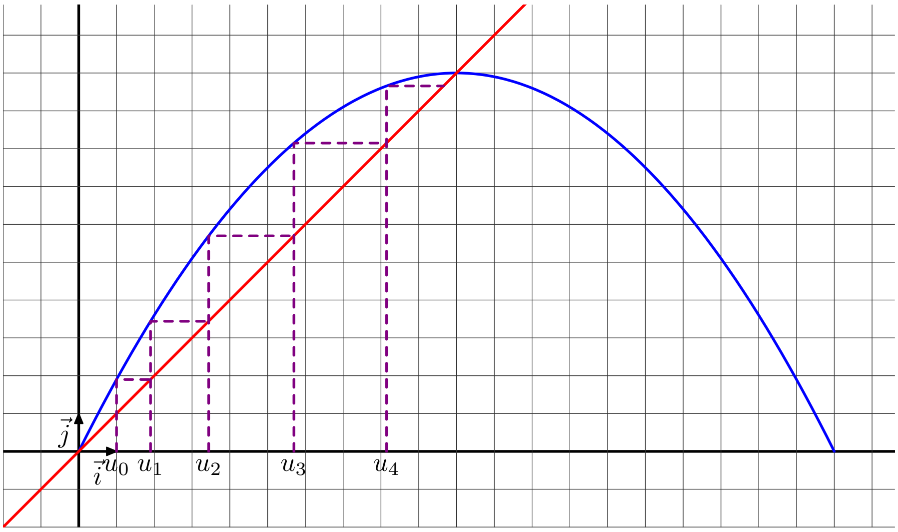
5. On a $0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ et la suite $\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ converge vers 0 donc, d'après le théorème des gendarmes la suite u converge vers $\sqrt{2}$.

Corrigé de l'exercice 3.

1. a. Pour $x \in [0;20]$ on a $f(x) = 2x - 0{,}1x^2$ donc f est dérivable sur $[0;20]$ et pour $x \in [0;20]$ on a $f'(x) = 2 - 0{,}2x$. Ainsi, on obtient le tableau suivant :

x	0		10		20
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	10	$\searrow$	0

b. Ainsi, d'après les variations de f on déduit que pour $x \in [0;20]$ on a $f(x) \in [0;10]$.

c. 

2. Pour $n \in \mathbf{N}$, soit P_n la proposition « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$ ». Montrons cette proposition par récurrence :

   Initialisation : on a $u_0 = 1$ et $u_1 = 1{,}9$ donc P_0 est vraie.

   Hérédité : on fait l'hypothèse que pour un $n \geq 0$ fixé, P_n est vraie (i.e : $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 10$), montrons alors que P_{n+1} est aussi vraie (i.e : $0 \leq u_{n+1} < u_{n+2} \leq 10$). On a :

   $$0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 10$$

   Or la fonction f est croissante sur $[0; 10]$ donc :

   $$f(0) \leq f(u_n) < f(u_{n+1}) \leq f(10) \text{ donc } 0 \leq u_{n+1} < u_{n+2} \leq 10$$

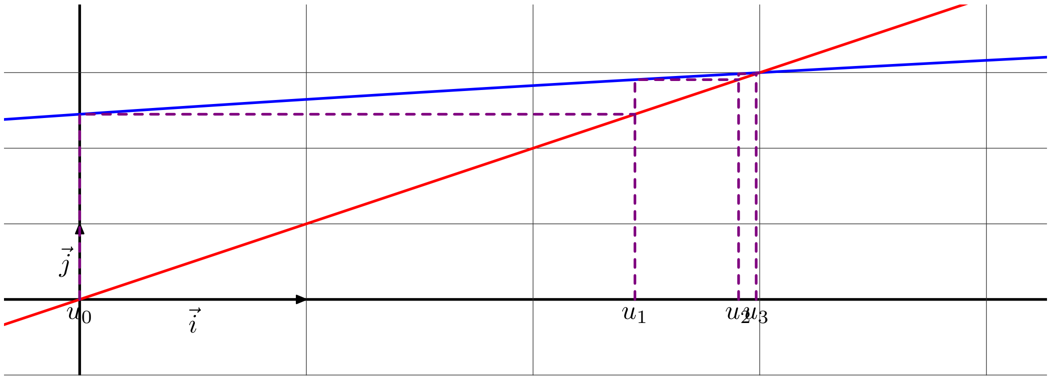
   Donc P_{n+1} est vraie.

   Conclusion : donc, d'après l'axiome de récurrence, P_n est vraie pour tout n entier naturel.

3. D'après la question précédente, la suite u est croissante et majorée par 10 donc elle converge vers une limite $\ell \in [0; 10]$. Or f est continue sur $[0; 20]$ donc elle est continue en ℓ. Ainsi, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
   Cette équation s'écrit $2x - 0{,}1x^2 = x$ soit $0{,}1x^2 - x = 0$. Elle a deux solutions : $x = 0$ et $x = 10$. Or u est croissante et $u_0 = 1$ donc la limite ne peut pas être 0 d'où $\ell = 10$.

Corrigé de l'exercice 4.

1. $u1 = \sqrt{6} \approx 2{,}45$, $u_1 = \sqrt{\sqrt{6}+6} \approx 2{,}91$ et $u_3 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{6}+6}+6} \approx 2{,}98$.
2. a. f est définie sur $[-6; +\infty[$ et dérivable sur $]-6; +\infty[$.
   Pour $x > -6$ on a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+6}} > 0$ donc f est croissante sur $[-6; +\infty[$.

b. 

c. Il semble que la suite u soit croissante et majorée par 3. C'est-à-dire que pour $n \in \mathbf{N}$ on a $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 3$.

3. Pour $n \in \mathbf{N}$, soit P_n la proposition « $0 \leq u_n \leq u_{n-1} \leq 3$ ». Montrons cette proposition par récurrence :

Initialisation : on a $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{6} > 0$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : on fait l'hypothèse que pour un $n \geq 0$ fixé, P_n est vraie (i.e : $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 3$), montrons alors que P_{n+1} est aussi vraie (i.e : $0 \leq u_{n+1} < u_{n+2} \leq 3$). On a :

$$0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 3$$

Or la fonction f est croissante sur $[0;3]$ donc :

$$f(0) \leq f(u_n) < f(u_{n+1}) \leq f(3) \text{ donc } 0 \leq u_{n+1} < u_{n+2} \leq 3$$

Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : donc, d'après l'axiome de récurrence, P_n est vraie pour tout n entier naturel.

4. D'après la question précédente, la suite u est croissante et majorée par 3 donc elle converge vers une limite $\ell \in [0;3]$. Or f est continue sur $[-6;+\infty[$ donc elle est continue en ℓ. Ainsi, ℓ est solution positive de l'équation $f(x) = x$.
Cette équation s'écrit $\sqrt{6+x} = x$ soit, x étant positif, $6 + x = x^2$. Elle a deux solutions : $x = -2$ et $x = 3$. Or $\ell \geq 0$ donc la limite ne peut pas être -2 d'où $\ell = 3$.

Corrigé de l'exercice 5.

1. a. f est la composée de deux fonctions croissantes donc elle est croisante sur son ensemble de définition.

   b. On résout $f(x) = x$ soit $\sqrt{4+3x} = x$ qui équivaut à $4 + 3x = x^2$ pour $x \geq 0$. Cette dernière équation a deux solutions qui sont -1 et 4 (mais seule la solution $x = 4$ convient) donc les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et d sont $(4;4)$.

2. a. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, u_{n+1} est défini par une racine carrée donc positif. De plus $u_0 = 6 > 0$ donc u est minorée par 0.

b. Soit $n \in \mathbf{N}$. On note P_n la proposition « $u_n + 1 < u_n$ ». Montrons cette proposition par récurrence :

Initialisation : on a $u_0 = 6$ et $u_1 = \sqrt{22} < 6$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : on fait l'hypothèse que pour un $n \geq 0$ fixé, P_n est vraie (i.e : $u_{n+1} < u_n$), montrons alors que P_{n+1} est aussi vraie (i.e : $u_{n+2} < u_{n+1}$). On a :

$$0 \leq u_{n+1} < u_n$$

Or la fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$ donc :

$$f(u_{n+1}) < f(u_n) \text{ donc } u_{n+2} < u_{n+1}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

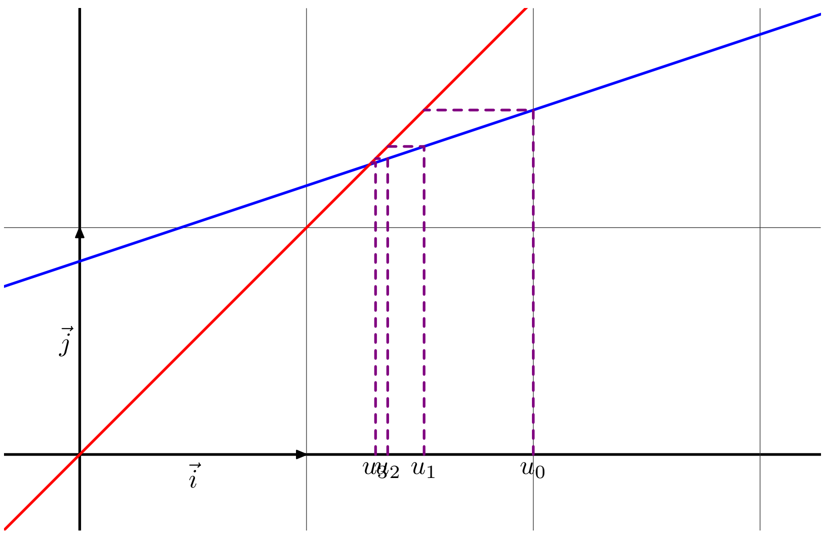
Conclusion : donc, d'après l'axiome de récurrence, P_n est vraie pour tout n entier naturel.

Donc pour tout n on a $u_{n+1} < u_n$ donc u est décroissante.

c. La suite u est donc décroissante et minorée donc elle converge vers une limite $\ell \geq 0$.

d. La fonction f est continue sur son ensemble de définition donc en ℓ donc la limite ℓ est solution de $f(x) = x$; équation qu'on a résolue question 1b. Donc $\ell = 4$.

Corrigé de l'exercice 6.

1. a. 

b. Si u est convergente vers ℓ on a u définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue sur $\mathbf{R}$ (fonction affine) donc f continue en ℓ. Donc ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$ dont l'unique solution est $x = \frac{23}{18}$. Donc si u converge, c'est vers $\ell = \frac{23}{18}$.

c. Pour $n \in \mathbf{N}$, soit P_n la proposition « $u_n > \frac{23}{18}$. Montrons par recurrence que P_n est vraie pour tout n :

Initialisation : $u_0 = 2 > \frac{23}{18}$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : on fait l'hypothèse que pour un n fixé P_n est vraie (i.e que $u_n > \frac{23}{18}$) on montre alors que P_{n+1} est vraie aussi (i.e que $u_{n+1} > \frac{23}{18}$). On a : $u_n < \ell$ et f est croissante sur $\mathbf{R}$ donc $f(u_n) > f(\ell)$ donc $u_{n+1} > \ell$ car $f(\ell) = \ell$. Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : donc, d'après l'axiome de récurrence, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

d. Pour $n \in \mathbf{N}$ on a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27} - u_n = \frac{23}{27} - \frac{2}{3}u_n$. Or $u_n > \frac{23}{18}$ donc $-\frac{2}{3}u_n < -\frac{23}{27}$ et finalement, $u_{n+1} - u_n < 0$ donc u est décroissante.

Ainsi, u est décroissante et minorée par $\frac{23}{18}$ donc elle converge et donc elle converge vers ℓ d'après la question 1b.

2. a. La somme cherchée est la somme de termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{10}$ donc :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{\frac{1}{10^2} - \frac{1}{10} \times \frac{1}{10^{n+1}}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{1}{100} \times \left(1 - \frac{1}{10^n}\right)}{0{,}9} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

b. Pour $n > 1$ on a :

$$v_n = 1{,}2 + 7 \times \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k}$$

En effet, il suffit de remarquer que $\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = 0,011\dots111$. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 1{,}2 + 7 \times \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \frac{6}{5} + \frac{7}{90} = \frac{23}{18}$$

3. La suite u est décroissante et la suite v est clairement croissante. Pour tout n on a $v_n < \ell < u_n$ et enfin, la limite de la différence des deux suite vaut 0 donc les deux suites sont adjacentes.

Corrigé de l'exercice 7.

1. f est une fraction rationnelle, donc dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition, et :

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - (2x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

Donc f est croissante sur $[0; 2]$, et comme f est continue l'image de $[1; 2]$ par f est $[f(1); f(2)] = [\frac{3}{2}; \frac{5}{3}] \subset [1; 2]$, ainsi :

si $x \in [1\ ;\ 2]$ alors $f(x) \in [1\ ;\ 2]$

2. a.

b. Pour $n \in \mathbf{N}$, soit P_n la proposition : « $1 \leq v_n \leq 2$ » Montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout n.

Initialisation : $v_0 = 2$ alors P_0 est vraie.

Hérédité : on fait l'hypothèse que pour un n fixé, P_n est vraie, alors $1 \leq v_n \leq 2$, donc $1 \leq f(v_n) \leq 2$, d'aprés la relation démontrée à la question 1. Ainsi P_{n+1} est vraie aussi.

Conclusion : donc, d'après l'axiome de récurrence, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Pour $n \in \mathbf{N}$, soit Q_n la proposition : « $v_{n+1} \leq v_n$. Montrons par récurrence que Q_n estvraie pour tout n.

Initialisation : $v_1 = f(v_0) = f(2) = \frac{5}{3}$ donc $v_1 \leq v_0$. Donc Q_0 est vraie.

Hérédité : on fait l'hypothèse que pour un n fixé Q_n est vraie ; montrons qu'alors Q_{n+1} est vraie. On a : $v_{n+1} \leq v_n$, et v_n et v_{n+1} sont deux nombres de $[0\,;\,2]$, donc comme f est croissante sur $[0\,;\,2]$, alors : $f(v_{n+1}) \leq f(v_n)$ et donc $v_{n+2} \leq v_{n+1}$. Donc Q_{n+1} est vraie.

Conclusion : donc, d'après l'axiome de récurrence, Q_n est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

c.

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{2v_n+1}{v_n+1} - \frac{2u_n+1}{u_n+1} \\
&= \frac{(2u_n+1)(v_n+1) - (2u_n+1)(v_n+1)}{(v_n+1)(u_n+1)} \\
&= \frac{2u_nv_n + u_n + 2v_n + 1 - 2u_nv_n - 2u_n - v_n - 1}{(u_n+1)(v_n+1)} \\
&= \frac{v_n - u_n}{(v_n+1)\,(u_n+1)}
\end{aligned}$$

On montre par récurrence sans difficulté que $v_n - u_n \geq 0$.
Comme $1 \leq u_n \leq 2$, alors $2 \leq u_n + 1 \leq 3$ et $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{u_n+1} \leq \frac{1}{2}$.
De même, $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{v_n+1} \leq \frac{1}{2}$. Or

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{(v_n+1)\,(u_n+1)} \text{ donc } v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{4}$$

d. En procédant par récurence, on démontre que pour tout entier naturel n :

$$v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n (\underbrace{v_0 - u_0}_{=1})$$

e. La suite (u_n) est croissante $(u_n \leq u_{n+1})$ et majorée par 2 donc u est convergente.
La suite (v_n) est décroissante $(v_n \geq v_{n+1})$ et minorée par 1 donc v est convergente.
On a $-1 < \frac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ et comme pour tout entier naturel n, on a $0 \leq v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$, alors d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0 \text{ donc } (u \text{ et } v \text{ étant convergentes}) \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n$$

Donc les suites (u_n) et (v_n) convergent vers le même réel α.

Comme f est continue, $u_{n+1} = f(u_n)$ et u converge vers α, alors :

$$\begin{aligned}
\alpha = f(\alpha) &\Leftrightarrow \alpha = \frac{2\alpha+1}{\alpha+1}\\
&\Leftrightarrow \alpha(\alpha+1) = 2\alpha+1\\
&\Leftrightarrow \alpha^2-\alpha-1=0\\
&\Leftrightarrow \alpha = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Or comme $1 \leq u_n \leq 2$, $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.