Nom : .... Prénom : ....

Le soin et la rédaction prendront une part importante dans la notation des copies. Le sujet est à rendre *obligatoirement* avec la copie. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (12 points)**.**
Soit f la fonction définie pour $x \neq -1$ par $f(x) = \frac{x^2-4x-1}{x+1}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. **Étude asymptotique**
   a. Déterminer la (ou les) limite(s) de f en -1. Quelle conséquence graphique peut-on en tirer ?
   b. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   c. Montrer que pour $x \neq -1$ on a $f(x) = x - 5 + \frac{4}{x+1}$.
   d. En déduire que la droite d : $y = x - 5$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $= +\infty$ et en $-\infty$.
2. **Étude de quelques points de $\mathscr{C}_f$**
   a. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées.
   b. Résoudre $f(x) = 0$. Que peut-on en déduire graphiquement ?
3. **Variations de f**
   a. Montrer que pour $x \neq -1$ on a $f'(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.
   c. En déduire le tableau de variation complet de f.
4. **Quelques tangentes**
   a. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
   b. Existe-t-il une (ou plusieurs) tangente(s) à $\mathscr{C}_f$ parallèles à l'asymptote d de la question 1d ? Justifier.
5. **La courbe :** dans un repère (unité graphique : 1cm), tracer les droites des questions 1a, 1d, 4a, 4b puis tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ limitée à l'intervalle $]-1;+\infty[$.

Exercice 2 (4 points)**.**
Calculer les limites suivantes (on détaillera les étapes...) :

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3-5x^2-7x-100); \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{0{,}02x^2+x-6}{257x+3}; \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-5x+1}{x^2+1}$$

Exercice 3 (4 points)**.**
On donne dans le tableau suivant la taille en cm des 20 nourrissons nés dans une maternité au cours d'une journée :

Taille x_i	48	49	50	51	52
Nombre	3	7	4	5	1
Fréquence en %					

Pour les deux premières questions, on **n'utilisera pas** le mode statistique de la calculatrice, et on détaillera les calculs ou les explications.

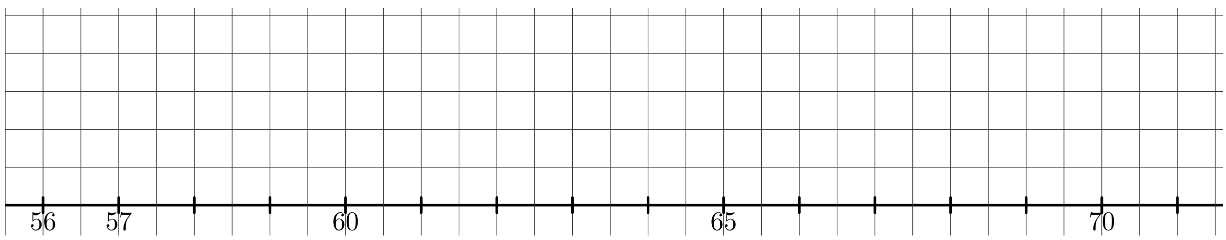
1. Compléter la ligne « fréquence en % ».
2. Déterminer la moyenne, le mode et la médiane de la série.
3. Calculer l'écart-type.

Exercice 4 (5 points)**.**
Afin de centrer les lunettes en face des pupilles, les opticiens mesurent « l'écartement interpupillaire ». L'unité de mesure habituellement utilisée est le mm. On a mesuré cet écartement, noté e, pour cinquante individus. Les résultats sont regroupés par classes dans le tableau ci-dessous :

e (mm)	[55 ;57[	[57 ;59[	[59 ;61[	[61 ;63[	[63 ;65[	[65 ;67[	[67 ;69[	[69 ;71[
centre de classe								
Effectif	3	6	11	9	7	7	5	2

Pour les calculs, on remplace chaque classe par son centre [1]. On pourra utiliser la calculatrice et donner les réponses arrondies au centième sans justification sur cette fiche.

1. Donner la moyenne $\overline{e} =$..........., la médiane $\text{Med}_e =$........... et l'écart-type $\sigma =$...........
2. Donner les 1er et 3e quartiles de la série : $Q_1 =$..........., $Q_3 =$...........
3. En expliquant brièvement déterminer « manuellement » les premier et neuvième déciles :
   ....
   ....
   Donc : $D_1 =$........... et $D_9 =$...........
4. Tracer ci-dessous la boite à moustaches de la série [2].



1. c'est à dire qu'on considère que tous les individus de la première classe (ceux ayant un écartement entre 55 et 57) ont un écartement de 56 ; et de même pour les classes suivantes.
2. en prenant comme « moustaches » les déciles de la question 3.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

1. a. On a $\lim_{x\to -1}(x^2-4x-1)=4$ et $\lim_{x\to -1}(x+1)=0$; par ailleurs, $x+1<0$ si et seulement si $x<-1$ donc :

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = +\infty$$

On en déduit que $\delta : x=-1$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

b. pour $x \neq 0$ on a $f(x) = \frac{x^2\left(1-\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = x \times \frac{1-\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}$. Ainsi, on obtient facilement :

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

c. Pour $x \neq -1$ on a $x-5+\frac{4}{x+1} = \frac{(x-5)(x+1)}{x+1} + \frac{4}{x+1} = \frac{x^2-4x-1}{x+1} = f(x)$.

d. On a $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x+1} = 0$ donc $\lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x)-(x-5)\right) = 0$ et donc d est bien asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$.

2. a. $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées au point d'abscisse 0 et son ordonnée est donc $f(0)=-1$. Finalement le point d'intersection est $A(0;-1)$.

b. Pour $x \neq -1$ on a $f(x)=0 \iff x^2-4x-1=0$; cette dernière équation a pour discriminant $\Delta = 20 > 0$, elle admet donc deux solutions : $\alpha = 2-\sqrt{5}$ et $\beta = 2+\sqrt{5}$. On en déduit que $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points $B(2-\sqrt{5};0)$ et $C(2+\sqrt{5};0)$.

3. a. pour $x \neq -1$ on a $f'(x) = \frac{(2x-4)(x+1)-(x^2-4x-1)\times 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$.

b. Le signe de $f'(x)$ est celui de x^2+2x-3 dont le discriminant est $\delta = 16$ et donc les racines sont $\alpha' = 1-3$ et $\beta' = 1$. On obtient donc :

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	-10	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

4. a. $T_0 : y = f'(0)(x-0)+f(0)$ or $f'(0)=-3$ et $f(0)=-1$ donc $T_0 : y = -3x-1$.

b. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a \neq -1$ est parallèle à d si et seulement si $f'(a)=1$ (coef directeurs égaux). On résout donc $f'(a)=1$:
$f'(a)=1 \iff x^2+2x-3=(x+1)^2$. Or cette équation équivaut à $-3=1$ ce qui est impossible donc de telles tangentes n'existent pas !

5.

Corrigé de l'exercice 2.
On a pour $x \neq 0$: $x^3 - 5x^2 - 7x - 100 = x^3\left(1 - \frac{5}{x} - \frac{7}{x^2} - \frac{100}{x^3}\right)$. Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{7}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{100}{x^3} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} (x^3 - 5x^2 - 7x - 100) = +\infty \times 1 = +\infty$.
Pour $x > 0$ on a $\frac{0{,}02x^2+x-6}{257x+3} = \frac{x^2\left(0{,}02+\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}\right)}{x\left(257+\frac{1}{x}\right)} = x \times \frac{0{,}02+\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}{257+\frac{1}{x}}$. Or on a $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(0{,}02 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}\right) = 0{,}02$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(257 + \frac{1}{x}\right) = 257$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{0{,}02x^2+x-6}{257x+3} = +\infty \times \frac{0{,}02}{257} = +\infty$.
Par une méthode analogue, on obtient $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-5x+1}{x^2+1} = 2$

Corrigé de l'exercice 3.

1.

Taille x_i	48	49	50	51	52
Nombre	3	7	4	5	1
Fréquence en %	15	35	20	25	5

2. Moyenne : 49,7 ; mode : 49 ; médiane : 49,5.
3. Écart-type : 1,14

Corrigé de l'exercice 4.

1. $\overline{e} = 62{,}48$, $\text{Med}_e = 62$, $\sigma \approx 3{,}70$.
2. $Q_1 = 60$ et $Q_3 = 66$.
3. l'effectif total est $n = 50$ donc D_1 est la cinquième valeur de la série rangée par ordre croissant et D_9 la quarante-cinquième valeur donc $D_1 = 58$ et $D_9 = 68$.
4.