Exercice 1.
On considère les suites u, v et w définies sur $\mathbf{N}$ par :

$$u_n = 3n + 1; \qquad v_n = \frac{n}{n+1}; \qquad w_n = -n^2 + 2n - 1$$

Calculer les cinq premiers termes de chaque suite.

Exercice 2.
On considère les suites u, v et w définies sur $\mathbf{N}$ par :

$$u : \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n + 1, n \in \mathbf{N} \end{cases} ; \quad v : \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{v_n}{v_n + 1}, n \in \mathbf{N} \end{cases} ; \quad w : \begin{cases} w_0 = 2 \\ w_{n+1} = -w_n^2 + 2w_n - 1, n \in \mathbf{N} \end{cases}$$

Calculer les cinq premiers termes de chaque suite.

Exercice 3.
1. Une suite arithmétique u est définie par son premier terme $u_0 = -2$ et sa raison $r = 3$. Calculer u_9 et u_{99}.
2. Une suite arithmétique v est définie par son premier terme $v_0 = 1$ et sa raison $r = -2$. Calculer v_5 et v_{20}.
3. Une suite arithmétique w est définie par son premier terme $w_1 = -1$ et sa raison $r = 5$. Calculer w_6 et w_{30}.

Exercice 4.
1. Une suite arithmétique u est définie par ses deux premiers termes $u_0 = 2$ et $u_1 = 3{,}5$. Déterminer sa raison et l'expression de son terme général en fonction de n.
2. Une suite arithmétique v est définie par les termes $v_5 = 2$ et $v_9 = 14$. Déterminer sa raison, son premier terme v_0 et l'expression de son terme général en fonction de n.
3. Une suite arithmétique w est définie par les termes $w_{10} = 14$ et $w_{35} = 44$. Déterminer sa raison, son premier terme w_0 et l'expression de son terme général en fonction de n.

Exercice 5.
Calculer la somme des dix premiers termes de chacune des suites de l'exercice 3

Exercice 6.
1. Une suite géométrique u est définie par son premier terme $u_0 = 1$ et sa raison $q = 2$. Calculer u_4 et u_{11}.
2. Une suite géométrique v est définie par son premier terme $v_0 = 128$ et sa raison $q = \frac{1}{2}$. Calculer v_4 et v_{11}.
3. Une suite géométrique w est définie par son premier terme $w_1 = \frac{1}{27}$ et sa raison $q = 3$. Calculer w_4 et w_9.

Exercice 7.
1. La suite géométrique u est définie par les termes $u_3 = 2{,}4$ et $u_{10} = 307{,}2$. Déterminer la raison q, le premier terme u_0 et l'expression de u_n en fonction de n.
2. La suite géométrique v est définie par les termes $v_2 = 25$ et $v_6 = 0{,}04$. Déterminer la raison q, le premier terme v_0 et l'expression de v_n en fonction de n.

Exercice 8.
Calculer la somme des cinq premiers termes des suites de l'exercice 6.

Exercice 9.
On considère la suite u définie sur $\mathbf{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1, \text{ pour } n \in \mathbf{N} \end{cases}$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3.
2. La suite u est-elle arithmétique ? géométrique ?
3. On définit la suite v par $v_n = u_n - 3$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
   a. Calculer v_0, v_1, v_2.
   b. Déterminer la nature de la suite v.
   c. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
4. a. Exprimer u_n en fonction de v_n, puis en fonction de n.
   b. Calculer u_8.

Exercice 10.
On appelle rémunération d'un capital les intérêts produits par le capital une fois placé. Le montant de cette rémunération dépend de la durée du placement, du montant du capital ainsi que de la catégorie des intérêts. Ceux-ci sont dits « simples » lorsqu'ils sont proportionnels à la durée du placement. Ils sont dits « composés » lorsqu'à la fin de chaque période(année, semestre, mois...) les intérêts produits sont ajoutés au capital. Ils produisent alors aux-mêmes des intérêts au cours des périodes suivantes.

1. Intérêts simples
   Antoine dispose de 3500 € qu'il place à intérêts simples au taux annuel de 6%. On note C_0 le capital de départ et C_n la somme dont disposera Antoine au bout de n années de placement.
   a. Calculer C_1 et C_2.
   b. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n. En déduire la nature de la suite (C_n).
   c. En déduire l'expression de C_n en fonction de n.
   d. De quelle somme disposera-t-il s'il laisse son argent placé pendant 10 ans ?
2. Intérêts composés
   Armand dispose de 3500 € qu'il place à intérêts composés au taux annuel de 5%. On note K_0 le capital de départ et K_n la somme dont disposera Armand au bout de n années de placement.
   a. Calculer K_1 et K_2.
   b. Exprimer K_{n+1} en fonction de K_n. En déduire la nature de la suite (K_n).
   c. En déduire l'expression de K_n en fonction de n.
   d. De quelle somme disposera-t-il s'il laisse son argent placé pendant 10 ans ?
3. Comparer les deux placements.

Exercice 11.
Romain décide de placer ses économies sur un compte rémunéré. Son banquier lui propose deux types de placement :

placement W : rémunération à intérêts simples au taux annuel de 5% ;

placement V : rémunération à intérêts composés au taux annuel de 4%.

On note respectivement w_n et v_n les capitaux disponibles au bout de n années de placement aux placements W et V. Romain disposant de 5000 €, on notera $w_0 = v_0 = 5000$.

1. a. Calculer w_1 et w_2.
   b. Quelle est la nature de la suite (w_n) ?
   c. En déduire l'expression de w_n en fonction de n.
2. a. Calculer v_1 et v_2.
   b. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
   c. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
3. Combien d'années Romain doit-il placer son argent afin :
   a. que le placement V soit plus avantageux que le placement W ?
   b. d'avoir un capital disponible supérieur à 11000 € ?
4. Son banquier lui affirme que son capital peut augmenter de plus de 53% en 11 ans.
   A t-il raison ? Justifier.

Exercice 12.
Partie A
Une balle élastique est lâchée d'une hauteur de 100 cm au-dessus d'une table ; elle rebondit plusieurs fois.
On appelle h_n la hauteur en centimètre du n^e rebond, et h_0 vaut 100. La hauteur atteinte à chaque rebond est égale 9/10 de la hauteur du rebond précédent.

1. Calculer h_1, h_2, h_3 et h_4.
2. Exprimer h_n en fonction de l'entier n. Quelle est la nature de la suite ?
3. Calculer à 10^{-2} près la hauteur du 10^e rebond.
4. A partir de quel rebond la hauteur deviendra-t-elle inférieure à 1 cm ?

Partie B
A chaque rebond, la balle ne rebondit pas exactement au même endroit. La distance entre le premier rebond et le deuxième est de 10 cm , on appelle d_1 cette distance. A chaque nouveau rebond, la distance parcourue vaut les 2/3 de la distance parcourue au rebond précédent. On considère la suite (d_n) des distances entre chaque rebond. On appelle ℓ_n la distance horizontale parcourue par la balle après $n+1$ rebonds.

1. Quelle est la nature de la suite (d_n) ? Exprimer d_n en fonction de n.
2. a. Calculer ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 et ℓ_4.
   b. Exprimer ℓ_n en fonction de n.
   c. Calculer à 10^{-2} près la valeur de ℓ_{10}.
3. Le premier rebond à lieu 28 cm du bord de la table et la balle se dirige droit sur lui, tombera-t-elle ?
   Si oui, après quel rebond ?
4. À quelle distance du bord de la table, au moins, doit se situer le premier rebond pour que la balle ne tombe pas ?

Solutions des exercices

Corrigé de l'exercice 1.
$u_0 = 1$, $u_1 = 4$, $u_2 = 7$, $u_3 = 10$ et $u_4 = 13$.
$v_0 = 0$, $v_1 = \frac{1}{2}$, $v_2 = \frac{2}{3}$, $v_3 = \frac{3}{4}$ et $v_4 = \frac{4}{5}$.
$w_0 = -1$, $w_1 = 0$, $w_2 = -1$, $w_3 = -4$ et $w_4 = -9$.

Corrigé de l'exercice 2.
$u_0 = 2$, $u_1 = 7$, $u_2 = 22$, $u_3 = 67$ et $u_4 = 202$.
$v_0 = 2$, $v_1 = \frac{2}{3}$, $v_2 = \frac{2}{5}$, $v_3 = \frac{2}{7}$ et $v_4 = \frac{2}{9}$.
$w_0 = 2$, $w_1 = -1$, $w_2 = -4$, $w_3 = -25$ et $w_4 = -676$.

Corrigé de l'exercice 3.

1. $u_9 = u_0 + (9 - 0) \times 3 = 25$ et $u_{99} = u_0 + 99 \times 3 = 295$.
2. $v_5 = 1 + 5 \times (-2) = -9$ et $v_{20} = -39$.
3. $w_6 = -1 + 5 \times 5 = 24$ et $w_{30} = -1 + 29 \times 5 = 144$.

Corrigé de l'exercice 4.

1. $r = u_1 - u_0 = 1{,}5$ et pour $n \in \mathbf{N}$ on a $u_n = 2 + 1{,}5n$.
2. $v_9 = v_5 + (9-5) \times r$ donc $r = \frac{v_9 - v_5}{4} = 3$. Donc pour $n \in \mathbf{N}$ on a $v_n = v_5 + (n-5) \times 3 = -13 + 3n$.
3. De même, $r = \frac{6}{5}$, $w_0 = 2$ et $w_n = 2 + \frac{6}{5} \times n$ pour $n \in \mathbf{N}$.

Corrigé de l'exercice 5.
Pour les suites u et v : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_9 = \frac{10(u_0+u_9)}{2}$ donc :
$S_u = 115$, $S_v = -80$.
Pour la suite w : $S_w = \frac{10\times(w_1+w_{10})}{2} = 240$.

Corrigé de l'exercice 6.

1. $u_4 = u_0 \times 2^{4-0} = 16$ et $u_{11} = u_0 \times q^{11} = 2048$.
2. $v_4 = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 8$ et $v_{11} = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \frac{1}{16}$.
3. $w_4 = w_1 \times q^{4-1} = 1$ et $w_9 = w_1 \times q^8 = 243$.

Corrigé de l'exercice 7.

1. On a $u_{10} = u_3 \times q^{10-3}$ donc $q^7 = \frac{307{,}2}{2{,}4} = 128$. On cherche un nombre q tel que $q^7 = 128$; avec la touche $\sqrt[y]{x}$ de la calculatrice, on obtient $q = 2$. Ainsi, $u_3 = u_0 \times 2^3$ et donc $u_0 = \frac{2{,}4}{8} = 0{,}3$ et finalement, pour $n \in \mathbf{N}$ on a $u_n = 0{,}3 \times 2^n$.
2. De même on a $v_6 = v_2 \times q^{6-2}$ donc $q^4 = \frac{0{,}04}{25} = 0{,}001\ 6$. Donc $q = 0{,}2$. De plus, $v_2 = v_0 \times 0{,}2^2$ donc $u_0 = \frac{25}{0{,}2^2} = 625$.

Corrigé de l'exercice 8.
On a $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \frac{u_0 - q \times u_4}{1-q} = \frac{1-2\times 2^4}{1-2} = 31$.
De même, $v_0 + \ldots v_4 = 248$ et $w_1 + \ldots w_5 = \frac{121}{27}$.

Corrigé de l'exercice 9.

1. $u_1 = \frac{2}{3} \times 2 + 1 = \frac{7}{3}$ et de même, $u_2 = \frac{23}{9}$, $u_3 = \frac{73}{27}$.
2. On a $u_1 - u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_2 - u_1 = \frac{2}{9}$ donc u n'est pas arithmétique.
   De même, $\frac{u_1}{u_0} = \frac{7}{6}$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{23}{21}$ donc u n'est pas géométrique.
   Attention : cette méthode n'est à utiliser que pour montrer qu'une suite *n'est pas* arithmétique ou géométrique (on écrit un *contre-exemple*) ; si on avait trouvé que $uu_2 - u_1 = u_1 - u_0$ on n'aurait pas pu conclure que la suite est arithmétique.
3. a. $v_0 = u_0 - 3 = -1$ et de même, $v_1 = u_1 - 3 = -\frac{2}{3}$ et $v_2 = u_2 - 3 = -\frac{4}{9}$. On peut conjecturer que v est géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
   b. Montrons la conjecture précédente. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a :
   $$v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{2}{3}u_n + 1 - 3 = \frac{2}{3}u_n - 2 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3} \times 3 = \frac{2}{3}(u_n - 3) = \frac{2}{3}v_n$$
   Donc v est bien géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = -1$.
   c. On a donc pour $n \in \mathbf{N}$, $v_n = (-1) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
4. On a pour $n \in \mathbf{N}$, $v_n = u_n - 3$ donc $u_n = v_n + 3 = 3 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
5. On a donc $u_8 = 3 - \left(\frac{2}{3}\right)^8 = \frac{19\ 427}{6\ 561}$.

Corrigé de l'exercice 10.

Corrigé de l'exercice 11.

1. a. On a $w_1 = 5\ 000 + \frac{5}{100}5\ 000 = 5\ 250$ et $w_2 = 5\ 250 + \frac{5}{100}5\ 000 = 5\ 500$.
   b. On a pour tout $n \in \mathbf{N}$, $w_{n+1} = w_n + 250$ donc la suite (w_n) est arithmétique de premier terme $w_0 = 5\ 000$ et de raison 250.
   c. On a donc pour $n \in \mathbf{N}$, $w_n = 5\ 000 + 250n$.
2. a. On a $v_1 = 5\ 000 \times \left(1 + \frac{4}{100}\right) = 5\ 200$ et $v_2 = 5\ 200 \times \left(1 + \frac{4}{100}\right) = 5\ 460$.
   b. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $v_{n+1} = v_n \times \left(1 + \frac{4}{100}\right) = 1{,}04v_n$; donc v est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 5\ 000$ et de raison 1,04.
   c. Ainsi, pour $n \in \mathbf{N}$, on a $v_n = 5\ 000 \times 1{,}04^n$.
3. a. On a $v_{11} = 7\ 697{,}27 < w_{11} = 7\ 750$ et $v_{12} = 8\ 005{,}16 > w_{12} = 8\ 000$; donc le placement V est plus intéressant à partir de la douzième année.
   b. On a $v_{20} < 11\ 000$ et $v_{21} > 11\ 000$ donc c'est à partir de la vingt-et-unième année.
4. Après onze ans, en choisissant le placement W, Romain peut avoir 7 750 €.
   Soit $\frac{7\ 750 - 5\ 000}{5\ 000} = 0{,}55 = 55\%$ de plus qu'au départ.

Corrigé de l'exercice 12.
Partie A

1. On a $h_1 = \frac{9}{10} \times 100 = 90$ cm ; $h_2 = \frac{9}{100} \times 90 = 81$ cm ; ...
2. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $h_{n+1} = \frac{9}{10} \times h_n$; donc la suite est géométrique de premier terme $h_0 = 100$ et de raison $q = \frac{9}{10}$.
3. La hauteur du 10e rebond est $h_{10} = h_0 \times \left(\frac{9}{10}\right)^{10} \approx 34{,}87$ cm.
4. Avec la calculatrice ou le tableur, on obtient $h_{43} \approx 1{,}07$ et $h_{44} \approx 0{,}97$ donc c'est à partir du 44e rebond que la hauteur est inférieure à 1 cm.

Partie B

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $d_{n+1} = d_n \times \frac{2}{3}$ donc d est géométrique de premier terme $d_1 = 10$ et de raison $\frac{2}{3}$. On a donc pour $n \in \mathbf{N}$, $d_n = 10 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.
2. a. On a ℓ_1 qui est la distance (horizontale) de la balle parcourue après le 2e rebond ; donc $\ell_1 = d_1 = 10$. De même on a $\ell_2 = \ell_1 + d_2 = 10 + \frac{2}{3} \times 10 = \frac{50}{3}$, $\ell_3 = \ell_2 + 10 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{190}{9}$, ...

   b. ℓ_n est la somme des n premiers termes de la suite d : pour $n \in \mathbf{N}$ on a $\ell_n = \frac{d_1 - \frac{2}{3}d_n}{1-\frac{2}{3}} = \frac{10-10\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}} = 3 \times 10\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$.

   c. $\ell_{10} \approx 29{,}65$.
3. La balle tombrea après le 6e rebond car $l_5 < 28$ et $l_6 > 28$.
4. Le premier rebond doit se situer à plus de 30 cm du bord de la table ; en effet, pour $n \in \mathbf{N}$, on a $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$ qui se rapproche de 1 en étant inférieur à 1 ; donc ℓ_n se rapproche de 30 sans jamais l'atteindre.