Chapitre 5

Généralités sur les fonctions numériques

5.1 Généralités

Définition 5.1
Une fonction numérique permet d'associer à chaque nombre x d'un ensemble D un autre nombre que l'on note $f(x)$. On note :

$$f: \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Le nombre $f(x)$ est appelé *image* de x par la fonction f. L'image d'un nombre par une fonction numérique est unique.
x est appelé *antécédent* de $f(x)$ par f. Un nombre peut avoir plusieurs antécédents.

Exemple 5.1
On définit la fonction f sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 - 5$. On a :

$$f: \begin{array}{ccl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - 5 \\ 1 & \longmapsto & 1^2 - 5 = -4 \\ -5 & \longmapsto & (-5)^2 - 5 = 20 \\ \frac{5}{2} & \longmapsto & \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 = \frac{25}{4} - 5 = \frac{5}{4} \\ \pi & \longmapsto & \pi^2 - 5 \approx 4{,}87 \end{array}$$

Dans cet exemple 20 a deux antécédents car l'équation $x^2 - 5 = 20$ a deux solutions : $x = 5$ et $x = -5$.
Par contre -6 n'a pas d'antécédent car $x^2 - 5 = -6$ n'a pas de solution. (car $x^2 = -1$ n'en a pas.)

Définition 5.2
Soit f une fonction numérique. On appelle *ensemble de définition* de f et on note généralement $\mathscr{D}_f$ l'ensemble des nombres pour lesquels $f(x)$ existe.

Exemple 5.2
On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3x+2}{x-1}$. Le nombre $f(x)$ existe pour tout $x \neq 1$.
En effet si $x = 1$, pour calculer $f(x)$, il faudrait diviser par 0 ce qui est impossible. Donc $\mathscr{D}_f = \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

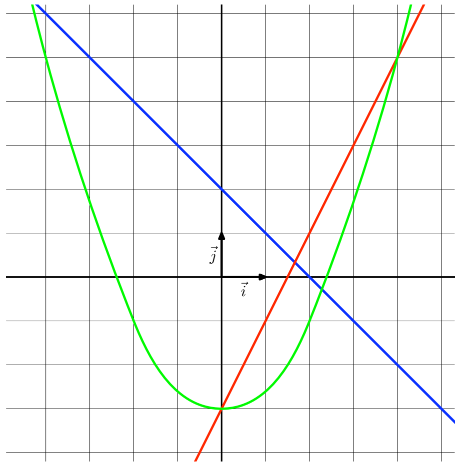
Définition 5.3
Soit f une fonction numérique. Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on pose $y = f(x)$. À chaque couple $(x; y)$ on peut donc associer un point dans un repère. L'ensemble de ces points est appelé *courbe représentative* de la fonction f. On la note généralement $\mathscr{C}_f$.

Exemple 5.3
On a tracé ci-contre les représentations graphiques de trois fonctions f, g, et h. Associer à chaque fonction sa courbe représentative sachant que pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$f(x) = 2x - 3$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$$

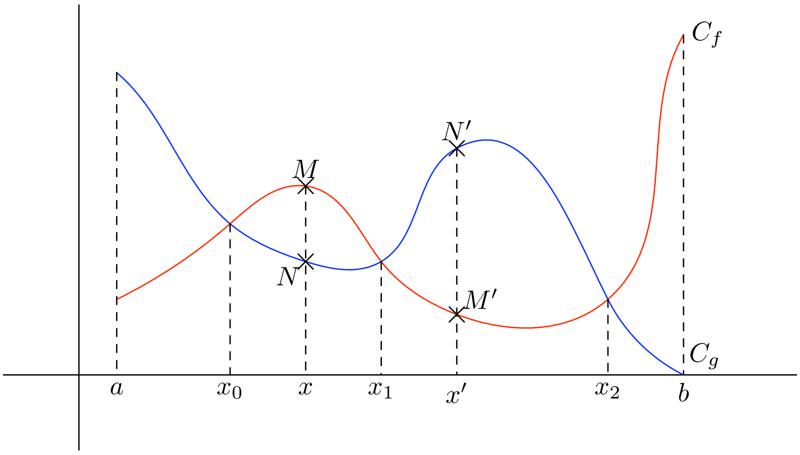
$$h(x) = -x + 2$$



5.2 Résolutions graphiques d'équations et d'inéquations

Soit f et g deux fonctions numériques définies sur un intervalle $[a; b]$.
- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ c'est trouver les *abscisses* des points d'intersections de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
- Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$, c'est trouver les *abscisses* des points $M(x; f(x))$ et $N(x; g(x))$ tels que M est au dessus de N.

Exemple 5.4



Sur la figure ci-dessus, on a tracé les représentations graphiques de deux fonctions f et g définies sur $[a; b]$.
L'équation $f(x) = g(x)$ admet trois solutions : $\mathscr{S} = \{x_0, x_1, x_2\}$.
La solution de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ est $S = [x_0; x_1] \cup [x_2; b]$.
Par exemple, pour $x \in [x_0; x_1]$, on a bien $M(x; f(x))$ qui est au dessus de $N(x; g(x))$. Par contre pour $x' \in [x_1; x_2]$, on a $M(x'; f(x'))$ qui est en dessous de $N(x'; g(x'))$.

5.3 Fonctions usuelles

5.3.1 Fonctions linéaires et affines

Définition 5.4
Soit a et b deux réels.

Une fonction f définie par $f(x) = ax$ est appelée fonction *linéaire*.

Une fonction f définie par $f(x) = ax + b$ est appelée fonction *affine*.

Remarque 5.1
Une fonction linéaire est aussi affine (en prenant $b = 0$). La réciproque est fausse.

Propriété 5.1
Dire que f est une fonction linéaire, équivaut à dire que pour tous $x_1 \in \mathbf{R}, x_2 \in \mathbf{R}$, on a :

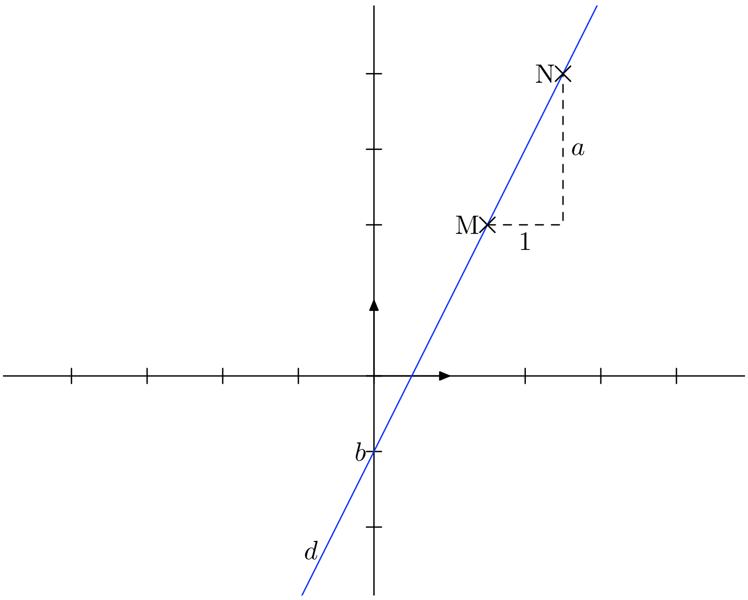
$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

Propriété 5.2
– La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère.
– La représentation graphique d'une fonction affine est une droite (ne passant pas nécessairement par l'origine du repère).

Vocabulaire :
Soit f une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$, et d sa représentation graphique.
– le réel a est appelé *coefficient directeur* de la droite d.
– le réel b est appelé *ordonnée à l'origine* de la droite d.

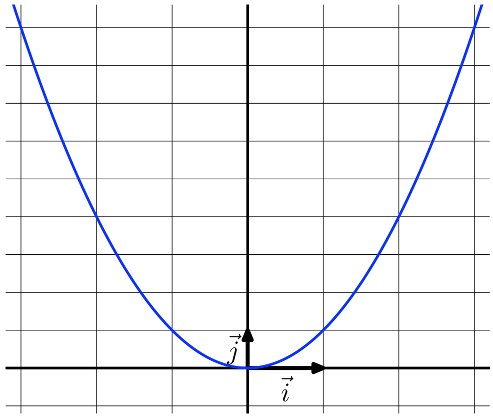
Interprétation graphique de a et b :
b est l'ordonnée du point d'intersection de d avec l'axe des ordonnées (yy').

a est la différence des ordonnées de deux points M et N de d tels que $x_N = x_M + 1$.



5.3.2 La fonction carrée

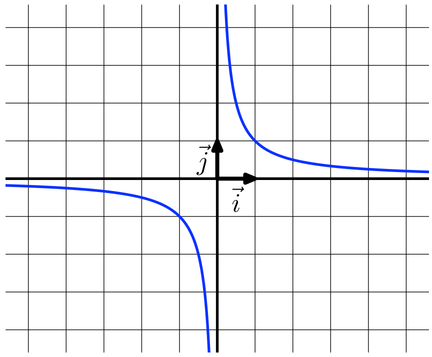
Définition 5.5
La fonction carrée est la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2$.
Sa représentation graphique dans un repère orthogonal est une parabole de sommet l'origine du repère.



Remarque 5.2
On a $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ donc l'axe des ordonnées est axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction carrée.

5.3.3 La fonction inverse

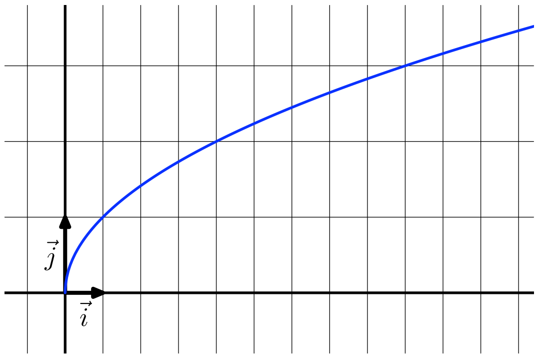
Définition 5.6
La fonction inverse est la fonction f définie sur $\mathbf{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.
Sa représentation graphique dans un repère orthogonal est une hyperbole d'asymptotes les axes du repère.



Remarque 5.3
On a $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$ donc l'origine du repère est centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction inverse.

5.3.4 La fonction racine carrée

Définition 5.7
La fonction racine carrée est la fonction f définie sur $\mathbf{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
Sa représentation graphique dans un repère orthogonal est une demi-parabole de sommet l'origine du repère et d'axe horizontal (elle est tournée vars la droite).



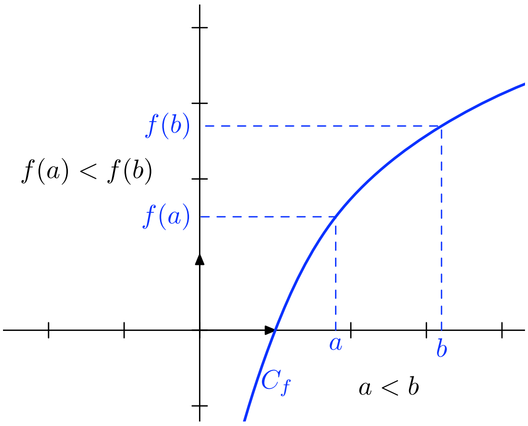
5.4 Variations d'une fonction

Définition 5.8
On dit qu'une fonction f est *strictement croissante* sur un intervalle I si pour tout a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) < f(b)$.
On dit qu'une fonction f est *strictement décroissante* sur un intervalle I si pour tout a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) > f(b)$.

Remarque 5.4
Graphiquement, lorsqu'une fonction est croissante, sa courbe « monte » lorsqu'on se déplace de

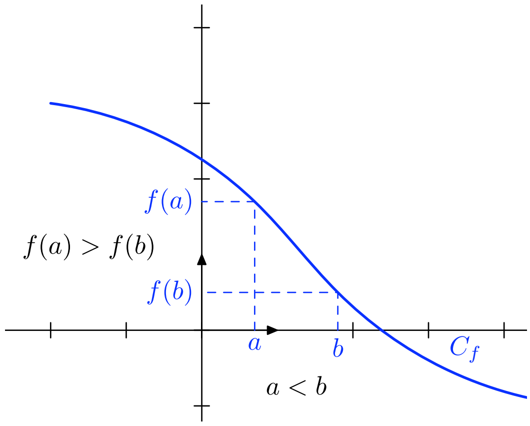
la gauche vers la droite. Lorsqu'une fonction est décroissante, sa courbe « descend » lorsqu'on se déplace de la gauche vers la droite.

Fonction strictement croissante :



Pour tous les réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) < f(b)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ « monte » lorsqu'on se déplace vers la droite.

Fonction strictement décroissante :



Pour tous les réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) > f(b)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ « descend » lorsqu'on se déplace vers la droite.

5.4.1 Fonction affine

Propriété 5.3
Une fonction affine est :
- croissante si son coefficient directeur est positif,
- décroissante si son coefficient directeur est négatif.

Exemple 5.5
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 3x + 2$.
Soit x et y deux réels tels que $x < y$. on a donc $3x < 3y$ car $3 > 0$ et donc $3x + 2 < 3y + 2$. Ainsi on obtient que $f(x) < f(y)$. Donc f est croissante sur $\mathbf{R}$.

5.4.2 Fonction carrée

Propriété 5.4
La fonction carrée ($x \mapsto x^2$) est décroissante sur $\mathbf{R}^-$ et croissante sur $\mathbf{R}^+$.

Démonstration :
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2$.
Soit x et y deux réels tels que $0 \leq x < y$. En multipliant les deux membres de la deuxième inégalité par x on obtient : $x^2 \leq xy$ car $x \geq 0$. De même, en les multipliant par y on obtient : $xy < y^2$ car $y > 0$. Donc finalement, on a : $x^2 \leq xy < y^2$. Donc $f(x) < f(y)$. Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbf{R}^+$.
Soit x et y deux réels tels que $x < y \leq 0$. En multipliant les deux membres de la première inégalité par x on obtient : $x^2 > xy$ car $x < 0$. De même, en les multipliant par y on obtient : $xy \geq y^2$ car $y \leq 0$. Donc finalement, on a : $x^2 > xy \geq y^2$. Donc $f(x) > f(y)$. Ainsi f est strictement décroissante sur $\mathbf{R}^-$.

5.4.3 Fonction inverse

Propriété 5.5
La fonction inverse ($x \mapsto \frac{1}{x}$) est décroissante sur $\mathbf{R}^-$ et sur $\mathbf{R}^+$.

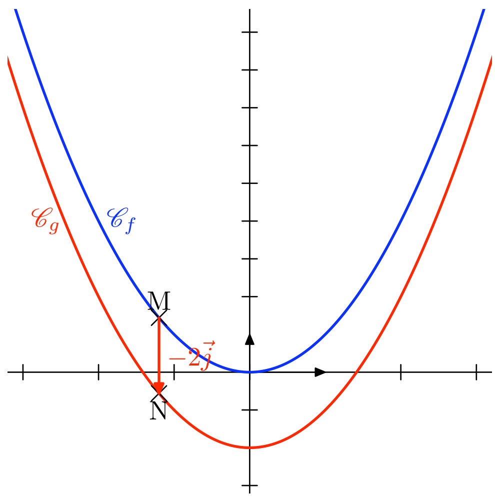
Pour $x \neq 0$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Étudions les variations de f sur $]0;+\infty[$:
Soit $0 < x < y$. $\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-y}{xy}$. Or $xy > 0$ et $x < y$ donc $x - y < 0$. Donc $\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} < 0$ donc $f(y) < f(x)$. Ainsi f est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$.
On démontrerait de même que f est décroissante sur $\mathbf{R}_-^*$.

Remarque 5.5 (Attention !)
La fonction inverse n'est pas décroissante sur $\mathbf{R}^*$.
En effet : $-2 < 2$ et $f(-2) < f(2)$.

5.5 Fonctions associées

5.5.1 Fonction $x \mapsto f(x) + \beta$

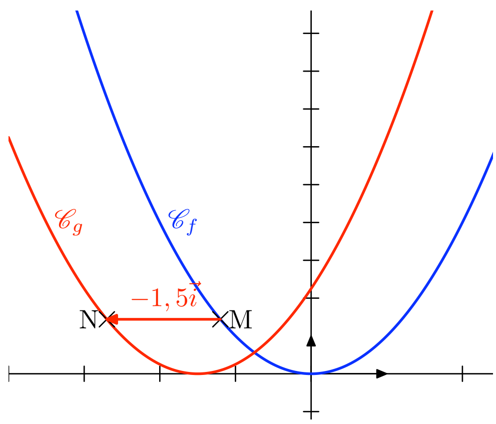
Propriété 5.6
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit β un réel quelconque. On considère la fonction g définie sur I par $g(x) = f(x) + \beta$.
La courbe représentative de la fonction g est l'image de la courbe représentative de la fonction f par la translation de vecteur $\beta\vec{j}$.



Exemple 5.6
Sur la figure ci-contre on a tracé la fonction f définie par $f(x) = x^2$ et la fonction g définie par $g(x) = f(x) - 2$. On a $\mathscr{C}_g$ qui est l'image de $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $-2\vec{j}$.

5.5.2 Fonction $x \mapsto f(x + \alpha)$

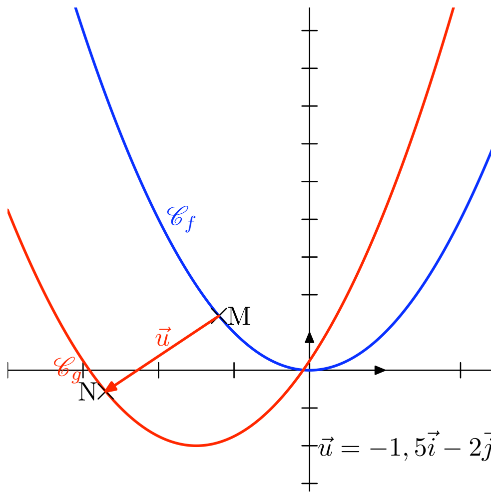
Propriété 5.7
Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]a\,;b[$. Soit α un réel quelconque. On considère la fonction g définie sur $]a - \alpha\,; b - \alpha[$ par $g(x) = f(x + \alpha)$.
La courbe représentative de la fonction g est l'image de la courbe représentative de la fonction f par la translation de vecteur $-\alpha\vec{i}$.



Exemple 5.7
Sur la figure ci-contre on a tracé la fonction f définie par $f(x) = x^2$ et la fonction g définie par $g(x) = f(x + 1{,}5)$. On a $\mathscr{C}_g$ qui est l'image de $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $-1{,}5\vec{i}$.

5.5.3 Fonction $x \mapsto f(x+\alpha)+\beta$

Propriété 5.8
Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]a\,;\,b[$. Soit α et β deux réels quelconques. On considère la fonction g définie sur $]a-\alpha\,;\,b-\alpha[$ par $g(x) = f(x+\alpha)+\beta$.
La courbe représentative de la fonction g est l'image de la courbe représentative de la fonction f par la translation de vecteur $-\alpha\vec{\imath}+\beta\vec{\jmath}$.



Exemple 5.8
Sur la figure ci-contre on a tracé la fonction f définie par $f(x) = x^2$ et la fonction g définie par $g(x) = f(x+1{,}5)-2$. On a $\mathscr{C}_g$ qui est l'image de $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $-1{,}5\vec{\imath}-2\vec{\jmath}$.

5.5.4 Variations des fonctions associées

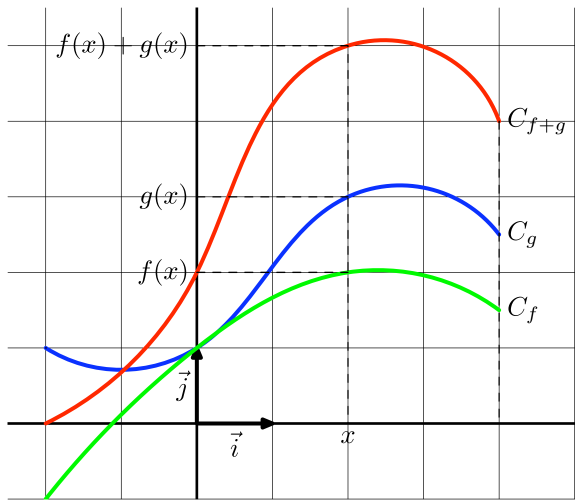
Propriété 5.9
Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]a\,;\,b[$ et strictement monotone sur I. Soit α et β deux réels quelconques.
- La fonction g définie sur I par $g(x) = f(x)+\beta$ a les mêmes variations que f sur I.
- La fonction h définie sur $I' =]a-\alpha\,;\,b-\alpha[$ par $h(x) = f(x+\alpha)$ a les mêmes variations sur I' que f sur I.

5.6 Opérations sur les fonctions

5.6.1 Somme de fonctions

Définition 5.9
Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I. On dit que la fonction h est la *somme* des fonctions f et g, si pour tout $x \in I$, $h(x) = f(x)+g(x)$.

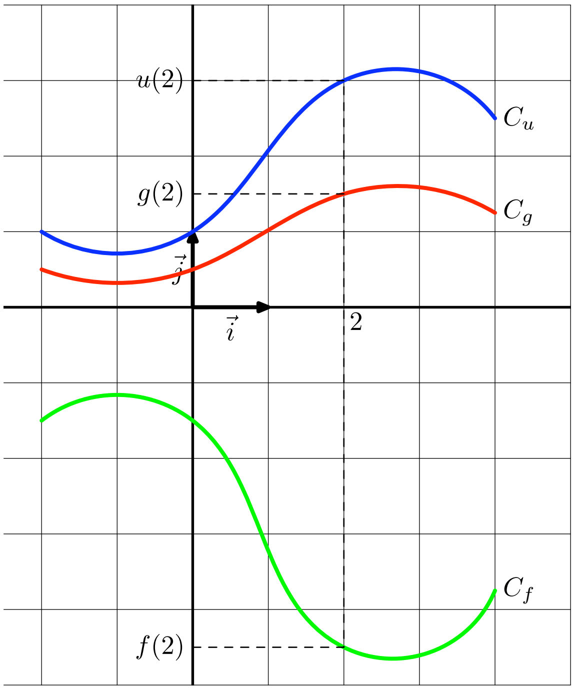
Propriété 5.10
Si f et g sont deux fonctions strictement croissantes (resp. décroissantes) sur un intervalle I, alors la fonction $h = f+g$ est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.



5.6.2 Produit d'une fonction par un réel

Définition 5.10
Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et k un réel. On dit que la fonction g est le produit de f par k si pour tout $x \in I$, $g(x) = k \times f(x)$.

Exemple 5.9
Sur le graphique ci-dessous, la fonction f définie sur $I = [-2; 4]$ est le produit de la fonction u par $-1{,}5$, et la fonction g définie sur $I = [-2; 4]$ est le produit de la fonction u par $\frac{1}{2}$: pour tout $x \in I$, on a : $f(x) = -1{,}5u(x)$ et $g(x) = \frac{1}{2}u(x)$.



Propriété 5.11
Si $k > 0$, les fonctions f et kf ont le même sens de variation.
Si $k < 0$, les fonctions f et kf ont des sens de variation contraires.

5.6.3 Fonction composée

Exemple 5.10
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2+3$, et g la fonction définie sur $\mathbf{R}^+$ par $g(x) = \sqrt{x}$.
Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $f(x) > 0$, on peut donc calculer $g(f(x))$.
La fonction h définie par $h(x) = g(f(x))$, est la fonction *composée* f suivie de g. C'est à dire $h(x) = \sqrt{x^2+3}$.

Remarque 5.6 (Attention)
L'ordre des fonctions a un sens : dans l'exemple précédent, on appelle u la fonction composée g suivie de f. Pour $x \geq 0$, on a : $u(x) = (\sqrt{x})^2 + 3 = x + 3$. Et pour $x \geq 0$, $u(x) \neq h(x)$.

Exemple 5.11
Tracer la représentation graphique de la fonction f qui est la composée de la fonction g suivie de h définies par $g(x) = x + 2$, et $h(x) = |x|$.