

Chapitre 4

Fonctions usuelles

4.1 Les fonctions affines

4.1.1 Fonction affine

Définition 4.1

Une fonction affine est une fonction définie sur \mathbf{R} par $f(x) = mx + p$ où m et p sont deux nombres réels.

Si $p = 0$ alors f est une fonction linéaire.


Propriété 4.1

On considère une fonction affine f définie par $f(x) = mx + p$.


- Si $m > 0$, alors f est strictement croissante sur \mathbf{R} .
- Si $m = 0$, alors f est constante sur \mathbf{R} .
- Si $m < 0$, alors f est strictement décroissante sur \mathbf{R} .

Tableaux de variations d'une fonction affine :


Si $m > 0$:

x	$-\infty$	$+\infty$
f		

Si $m = 0$:

x	$-\infty$	$+\infty$
f		

Si $m < 0$:

x	$-\infty$	$+\infty$
f		

Théorème 4.1

Soit f une fonction définie sur \mathbf{R} . La fonction f est une fonction affine si et seulement si pour tous réels distincts a et b , le quotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est constant.

Cela signifie que l'accroissement de la fonction est proportionnel à l'accroissement de la variable.

Remarque 4.1 (Détermination de m et p)

Si f est une fonction affine définie par $f(x) = mx + p$, alors :

$p = f(0)$ et pour tout $a \in \mathbf{R}$ et tout $b \neq a$, on a $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

4.1.2 Signe d'une fonction affine

Soit f une fonction affine définie par $f(x) = mx + p$.

Si $m \neq 0$, la représentation graphique de f est une droite d qui coupe l'axe des abscisses au point $A(-\frac{p}{m}; 0)$. En effet $f(-\frac{p}{m}) = m \times (-\frac{p}{m}) + p = -p + p = 0$.

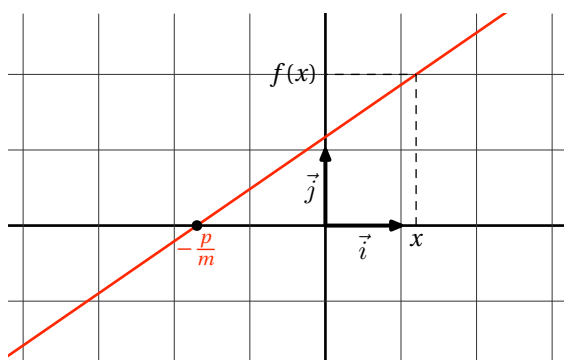
On a alors deux cas possibles :

Si $m > 0$ alors f est croissante donc pour tout $x < -\frac{p}{m}$, on a $f(x) < f(-\frac{p}{m}) = 0$ et pour tout $x > -\frac{p}{m}$, on a $f(x) > 0$.

x	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

Interprétation graphique :

La fonction affine est croissante :



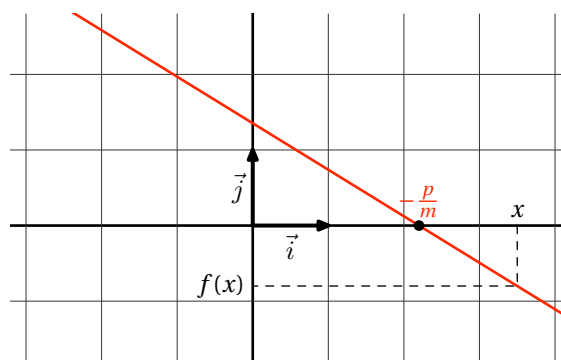
Pour tout $x < -\frac{p}{m}$, on a $f(x) < 0$.
Pour tout $x > -\frac{p}{m}$, on a $f(x) > 0$.

Si $m < 0$ alors f est décroissante donc pour tout $x < -\frac{p}{m}$, on a $f(x) > f(-\frac{p}{m}) = 0$ et pour tout $x > -\frac{p}{m}$, on a $f(x) < 0$.

x	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

Interprétation graphique :

La fonction affine est décroissante :



Pour tout $x < -\frac{p}{m}$, on a $f(x) > 0$.
Pour tout $x > -\frac{p}{m}$, on a $f(x) < 0$.

4.2 La fonction carré

Définition 4.2

La fonction carré est la fonction définie sur \mathbf{R} qui, à tout réel associe son carré.

$$f : x \mapsto x^2$$

Propriété 4.2

La fonction carré est croissante sur \mathbf{R}^+ et décroissante sur \mathbf{R}^- . Cela peut aussi s'énoncer :

- deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés ;
- deux nombres négatifs sont rangés dans l'ordre inverse de leurs carrés.

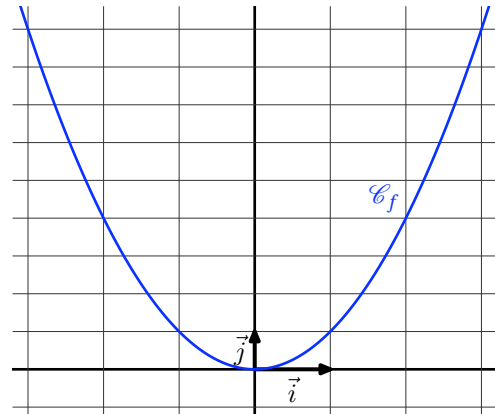
Tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f : x \mapsto x^2$		$\swarrow \quad \searrow$ 0	

Le minimum de la fonction carré est 0 ; il est atteint pour $x = 0$.

La courbe représentative de la fonction carré tracée ci-contre est une *parabole* de sommet O et d'axe $(O; \vec{j})$.

Courbe représentative :



4.3 La fonction inverse

Définition 4.3

La fonction inverse est la fonction qui, à tout réel non nul associe son inverse.

$$\text{Pour } x \neq 0, f(x) = \frac{1}{x}$$

Propriété 4.3

La fonction inverse est décroissante sur \mathbf{R}_-^* et sur \mathbf{R}_+^* .

Démonstration :

Soit a et b deux réels strictement négatifs tels que $a < b$. Étudions le signe de $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$:

$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b}{ab} - \frac{a}{ab} = \frac{b-a}{ab}$. Or a et b sont négatifs donc $ab > 0$. De plus $a < b$ donc $b - a > 0$. Donc $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ est égal au quotient de deux réels positifs ; c'est donc un réel positif. Donc $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0$; ainsi, $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. Les nombres a et b et leurs images sont donc rangés dans l'ordre inverse : la fonction inverse est décroissante sur \mathbf{R}_-^* .

On démontrerait de même que la fonction inverse est décroissante sur \mathbf{R}_+^* .

Remarque 4.2

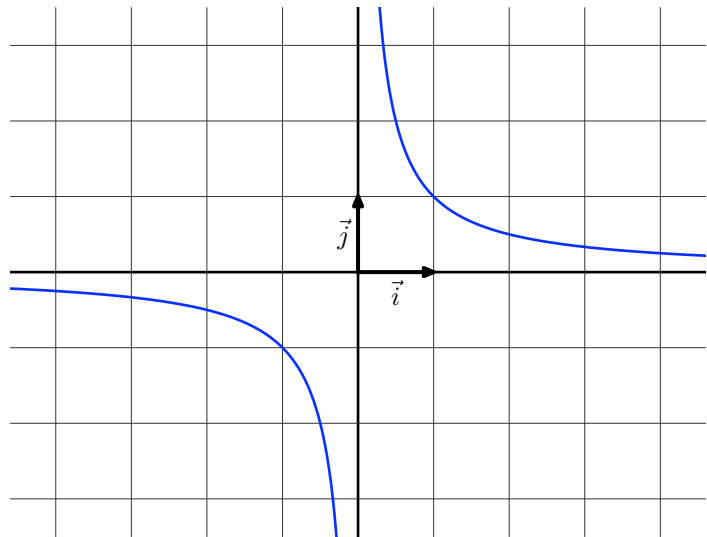
Attention ! La fonction inverse n'est pas décroissante sur \mathbf{R}^* .

En effet, on a : $-2 < 2$ et $\frac{1}{-2} < \frac{1}{2}$: les images de -2 et 2 sont rangés dans le même ordre que -2 et 2 .

Tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	0		0

Courbe représentative :



La courbe représentative de la fonction inverse est une *hyperbole* de centre O et d'asymptotes (Ox) et (Oy) .

4.4 La fonction cube

Définition 4.4

La fonction cube est la fonction définie sur \mathbf{R} qui à tout réel associe son cube.

$$f : x \mapsto x^3$$

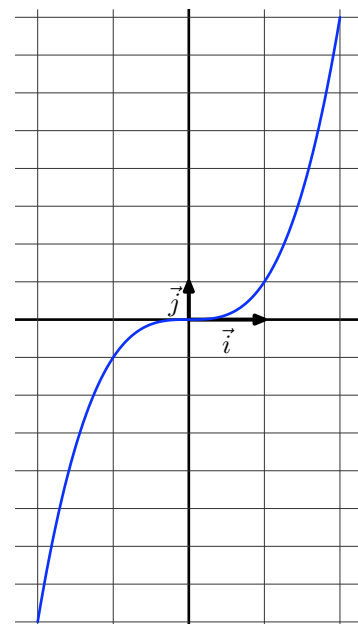
Propriété 4.4

La fonction cube est strictement croissante sur \mathbf{R} . Cela signifie que deux nombres et leurs cubes sont rangés dans le même ordre.

Tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f : x \mapsto x^3$		0	

Courbe représentative :



La fonction cube n'a ni minimum, ni maximum.

La courbe représentative de la fonction cube est tracée ci-contre dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Remarque 4.3

Pour trouver le nombre dont le cube vaut 125 on utilise la touche $x^{\frac{1}{3}}$ ou encore $\sqrt[3]{x}$ de la calculatrice : $125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5$.

De manière générale, s'il existe, le nombre x tel que $x^n = a$ se note $x = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

4.5 La fonction racine carrée

Définition 4.5

La fonction *racine carrée* est la fonction définie sur \mathbf{R}_+ qui à tout $x \geq 0$ associe sa racine carrée.

$$\text{pour } x \in \mathbf{R}_+, \quad f(x) = \sqrt{x}$$

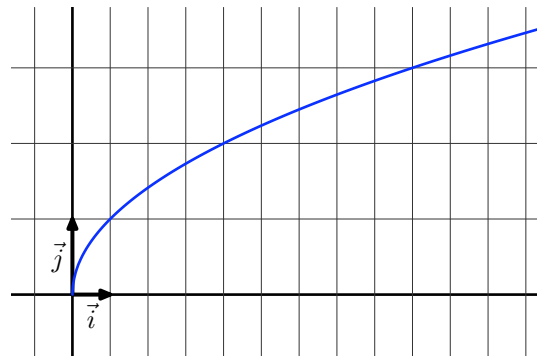
Propriété 4.5

La fonction racine carrée est strictement croissante sur \mathbf{R}_+ .

Tableau de variations :

x	0	1	$+\infty$
f	0	1	

Courbe représentative :



4.6 Étude de fonctions

4.6.1 Propriété des variations

Propriété 4.6

Soit u et v deux fonctions définies sur un intervalle I et croissantes sur I . Alors la fonction $f = u + v$ est croissante sur I .

(La fonction f est définie sur I par $f(x) = u(x) + v(x)$ pour $x \in I$).

Remarque 4.4

On a la propriété correspondante pour u et v décroissantes sur I .

Propriété 4.7

Soit u une fonction définie sur I et croissante sur I et soit λ un réel non nul. Alors :

- si $\lambda > 0$, la fonction $f = \lambda u$ est croissante sur I ;
- si $\lambda < 0$, la fonction $f = \lambda u$ est décroissante sur I .

(La fonction f est définie sur I par $f(x) = \lambda \times u(x)$ pour $x \in I$).

4.6.2 Avec la fonction carré

Exemple 4.1

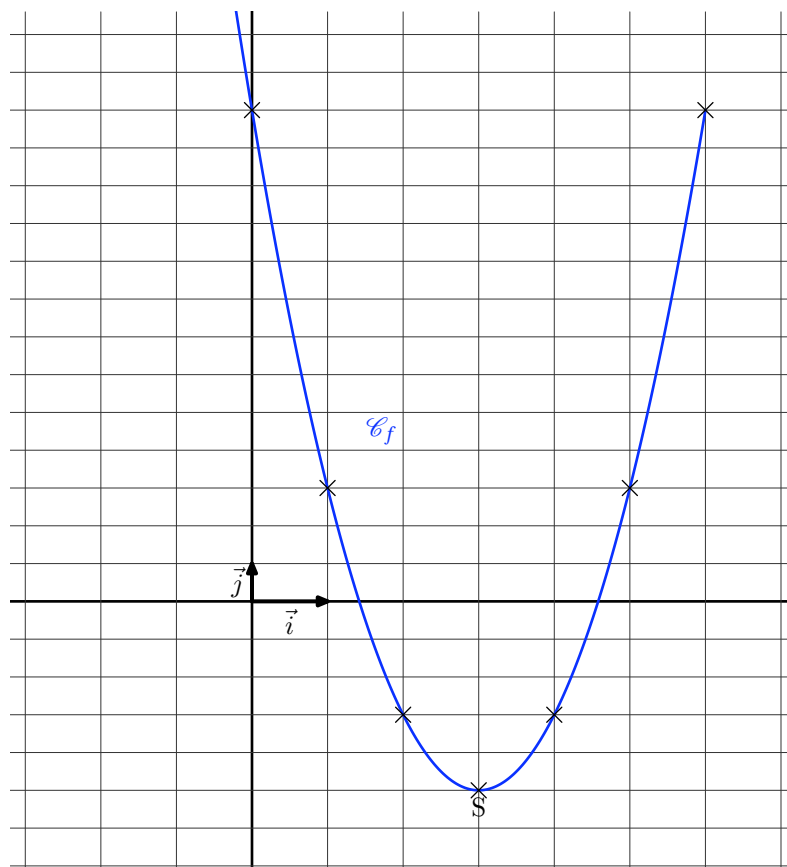
Soit f la fonction définie sur $[-1; 6]$ par $f(x) = 2x^2 - 12x + 13$. On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère.

1. Dresser un tableau de valeurs de la fonction f pour x entier entre -1 et 6 .
2. Placer ces points dans un repère puis tracer l'allure de \mathcal{C}_f .
3. Quel semble être le minimum atteint par f ? Pour quelle valeur de x ?
4. Montrer que $f(x) = 2(x - 3)^2 - 5$.
5. Déterminer les variations de f sur $[-1; 3]$ puis sur $[3; 6]$.
6. Dresser le tableau de variations de f pour $x \in [-1; 6]$.
7. Démontrer le résultat constaté à la question 3.

1. On dresse un tableau de valeurs :

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	27	13	3	-3	-5	-3	3	13

2. On trace alors la courbe représentative de f dans le repère ci-dessous :



3. La fonction f semble admettre pour minimum la valeur -5 pour $x = 3$.
4. On a : $2(x - 3)^2 - 5 = 2(x^2 - 6x + 9) - 5 = 2x^2 - 12x + 13 = f(x)$.
5. Soit a et b deux réels tels que $a < b \leq 3$.

On a : $a < b \leq 3$

Donc : $a - 3 < b - 3 \leq 0$

Donc : $(a - 3)^2 > (b - 3)^2$

Donc : $2(a - 3)^2 > 2(b - 3)^2$

Donc : $2(a - 3)^2 - 5 > 2(b - 3)^2 - 5$

D'où : $f(a) > f(b)$

Donc la fonction f est décroissante sur $[-1; 3]$.

De même sur $[3; 6]$, soit a et b tels que $3 \leq a < b$:

On a : $3 \leq a < b$

Donc : $0 \leq a - 3 < b - 3$

Donc : $(a - 3)^2 < (b - 3)^2$

Donc : $2(a - 3)^2 < 2(b - 3)^2$

Donc : $2(a - 3)^2 - 5 < 2(b - 3)^2 - 5$

D'où : $f(a) < f(b)$

Donc la fonction f est croissante sur $[3; 6]$.

6. On en déduit le tableau de variations de f sur $[-1; 6]$:

x	-1	3	6
f	27	-5	13

$$f(-1) = 2 \times (-1)^2 - 12 \times (-1) + 13 = 27 \text{ et } f(6) = 2 \times 6^2 - 12 \times 6 + 13 = 13.$$

4.6.3 Fonction homographique

Exemple 4.2

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3x-5}{x-2}$. On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Montrer que pour $x \in \mathcal{D}_f$, on a $f(x) = 3 + \frac{1}{x-2}$.
- Déterminer les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{C}_f avec les axes du repère.
- Étudier les variations de f sur $] -\infty; 2[$ puis sur $]2; +\infty[$.
- En se limitant à l'ensemble $[-3; 2[\cup]2; 7]$, dresser le tableau de variations de f , puis un tableau de valeurs et enfin tracer la courbe représentative de f dans un repère.

- $f(x)$ existe pour $x - 2 \neq 0$ soit $x \neq 2$: $x = 2$ est une valeur interdite pour f .

Donc $\mathcal{D}_f =] -\infty; 2[\cup]2; +\infty[$.

- On a : $3 + \frac{1}{x-2} = \frac{3(x-2)}{x-2} + \frac{1}{x-2} = \frac{3x-6+1}{x-2} = \frac{3x-5}{x-2} = f(x)$.

- Le point d'intersection A de \mathcal{C}_f avec l'axe des ordonnées a pour abscisse $x_A = 0$ et donc pour ordonnée $y_A = f(0) = \frac{5}{2}$. Donc $A(0; \frac{5}{2})$.

Les points d'intersection de \mathcal{C}_f avec l'axe des abscisses ont pour ordonnée 0. On résout donc l'équation $f(x) = 0$. Un quotient est nul si et seulement si son dénominateur n'est pas nul et son numérateur est nul. Donc pour $x \neq 2$, $f(x) = 0$ si et seulement si $3x - 5 = 0$ soit $x = \frac{5}{3}$. Donc \mathcal{C}_f coupe (Ox) en un seul point : $B(\frac{5}{3}; 0)$.