Chapitre 3

Généralités sur les fonctions

3.1 Fonction numérique

Définition 3.1
Si à chaque valeur de x d'un ensemble $\mathscr{D}$ on associe un autre nombre noté $f(x)$ déterminé par une relation algébrique, géométrique, ... on dit qu'on définit une *fonction numérique* f. On dit que f est la fonction définie par $f(x) = \ldots$. On note :

$$f : x \longmapsto f(x)$$

– Pour chaque x de $\mathscr{D}$, le nombre $f(x)$ est appelé *image* de x par la fonction f. L'image d'un nombre x est unique.
– Si $y = f(x)$, le nombre x est appelé un *antécédent* de y par la fonction f.

Exemple 3.1
La balance du rayon fruits et légumes du supermarché « Letrègran » est une fonction numérique : elle associe à une masse de tomates (par exemple) un autre nombre qui est le prix à payer. C'est même une fonction *linéaire* que vous avez rencontrée en classe de troisième.

Exemple 3.2
La fonction f est définie sur l'intervalle $[-5\,;7]$ par $f(x) = x^2 - 2x - 1$ signifie que si on se donne une valeur de x dans l'intervalle $[-5\,;7]$, on peut calculer son image par la fonction f grâce à l'expression donnée :
– on a : $f(-3) = (-3)^2 - 2 \times (-3) - 1 = 9 + 6 - 1 = 14$,
– on peut dire aussi que l'image par f de 0 est -1 (car $f(0) = 0^2 - 2 \times 0 - 1 = -1$),
– on dit aussi 5 est un antécédent de 14 car $f(5) = 5^2 - 2 \times 5 - 1 = 14$.

Remarque 3.1 (Attention !)
Soit f une fonction numérique définie sur un ensemble $\mathscr{D}$:
– pour chaque $x \in \mathscr{D}$, il n'existe qu'une seule image de x par f ;
– par contre un nombre y peut avoir plusieurs antécédents par la fonction f.

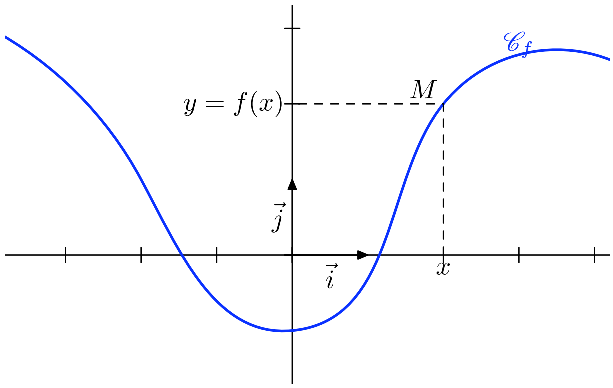
Exemple 3.3
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = (x + 1)^2 + 2$.
Pour tout réel x, il existe une seule image de x par f : c'est le nombre qu'on obtient en calculant $(x + 1)^2 + 2$.
Par contre on a :

d'une part $f(2) = (2+1)^2 + 2 = 3^2 + 2 = 11$;

d'autre part $f(-4) = (-4+1)^2 + 2 = (-3)^2 + 2 = 9 + 2 = 11$

Ainsi 2 et -4 sont deux antécédents de 11.
On peut remarquer aussi que certains nombres n'ont pas d'antécédent. En reprenant la fonction f, le nombre 0 n'a pas d'antécédent.
En effet, $(x+1)^2$ est toujours positif ou nul donc $(x+1)^2 + 2$ est toujours supérieur ou égal à 2 : il ne peut pas valoir 0.

Définition 3.2 (Représentation graphique)
Une fonction f permet d'associer à chaque nombre x d'un ensemble $\mathscr{D}$ un autre nombre noté $f(x)$. En écrivant $y = f(x)$ on obtient un couple $(x; y)$ auquel on peut associer le point $M(x; y)$ dans un repère.
Ainsi, pour tout $x \in \mathscr{D}$ on obtient un point M dans le repère. L'ensemble des points M ainsi obtenus est appelé *courbe représentative de la fonction f*. On la note généralement $\mathscr{C}_f$.

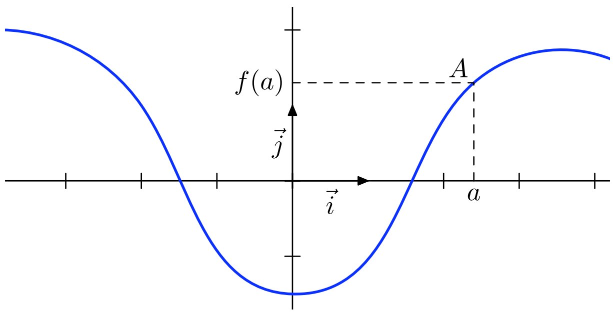


3.2 Lectures graphiques

Dans cette partie, f est une fonction numérique définie sur un ensemble $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}_f$ est sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

3.2.1 Image d'un nombre

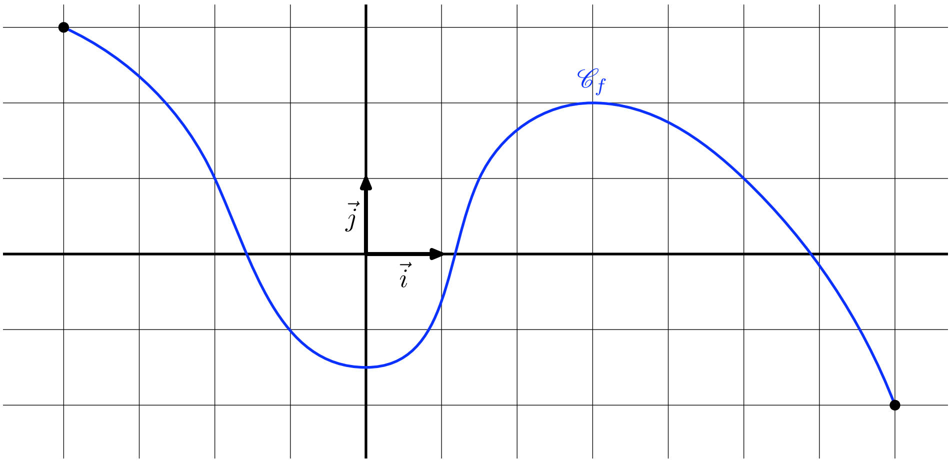
L'image $f(a)$ d'un nombre $a \in \mathscr{D}$ par la fonction f est l'ordonnée du point de la courbe $\mathscr{C}_f$ qui a pour abscisse a.



3.2.2 Résolution graphique d'équations. Recherche d'antécédents

Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = m$ c'est trouver les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ qui ont pour ordonnée m. Cela revient à rechercher les *antécédents* de m par la fonction f.
Pour déterminer graphiquement les solutions d'une telle équation on cherche les abscisses des points communs entre $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y = m$.

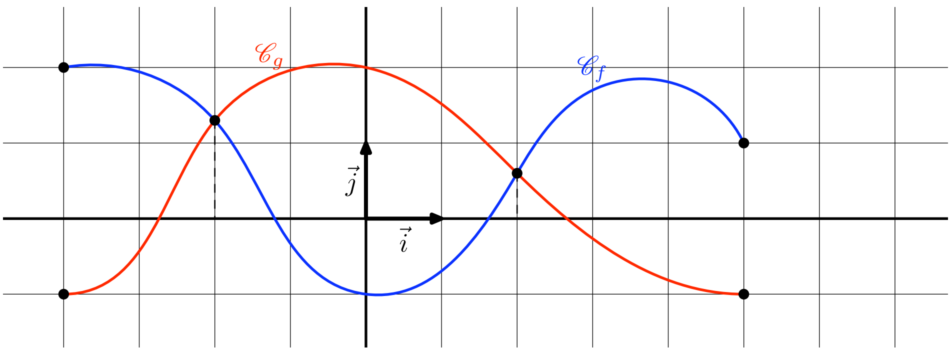
Exemple 3.4
Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;\,7]$.



- l'équation $f(x) = 2{,}5$ a une unique solution sur $[-4\,;\,7]$ car un seul point de $\mathscr{C}_f$ a pour ordonnée 2,5 : il s'agit du point qui a pour abscisse environ $-3{,}3$. On écrit $\mathscr{S} = \{-3{,}3\}$;
- l'équation $f(x) = 1$ a trois solutions car il y a trois points de $\mathscr{C}_f$ qui ont pour ordonnée 1 : les points d'abscisses -2 ; 1,5 et 5. On écrit $\mathscr{S} = \{-2\,;\,1{,}5\,;\,5\}$;
- l'équation $f(x) = -3$ n'a pas de solution car la courbe $\mathscr{C}_f$ n'a pas de point ayant -3 pour ordonnée ;
- les équations $f(x) = 2$ et $f(x) = -1{,}5$ ont chacune deux solutions.

Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ c'est trouver les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exemple 3.5
Dans le repère ci-dessous, on a tracé les représentations graphiques de deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-4\,;\,5]$.

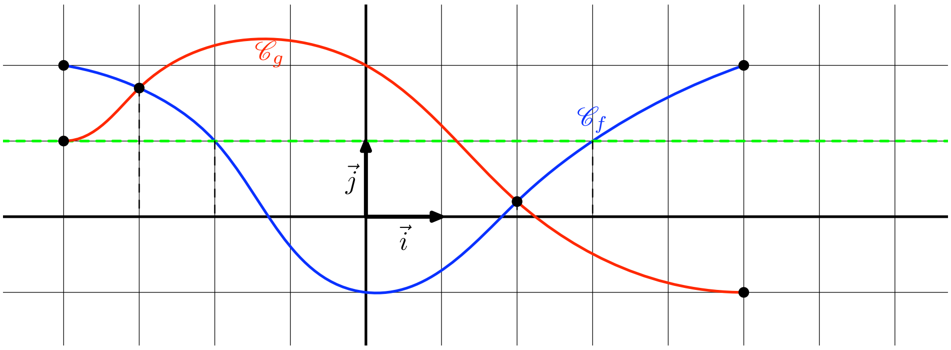


Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$: $\mathscr{S} = \{-2\,;\,2\}$

3.2.3 Résolution graphique d'inéquations

Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$ c'est trouver les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés en dessous de $\mathscr{C}_g$.

Exemple 3.6
Dans le repère ci-dessous, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les représentations graphiques de deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-4\,;\,5]$.

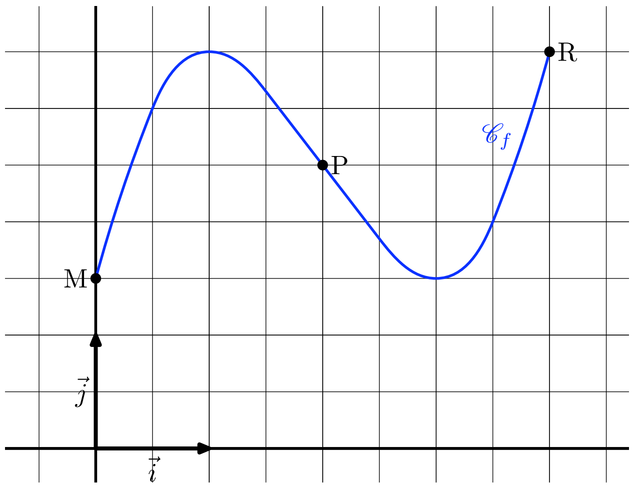


- Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés en dessous (ou sur) $\mathscr{C}_g$: $\mathscr{S} = [-3\,;\,2]$.
- Les solutions de l'inéquation $f(x) > 1$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés strictement au dessus de la droite d'équation $y = 1$: $\mathscr{S} = [-4\,;\,-2[\,\cup\,]3\,;\,5]$.

3.2.4 Exercice de synthèse

Sur la figure ci-contre, on a tracé la courbe représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.
Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,4]$ par $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

1. Tracer la représentation graphique de g.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 2{,}5$.
3. Résoudre l'équation $g(x) = f(x)$.
4. Résoudre l'inéquation $f(x) < g(x)$.
5. Résoudre l'inéquation $g(x) \geq 2$.



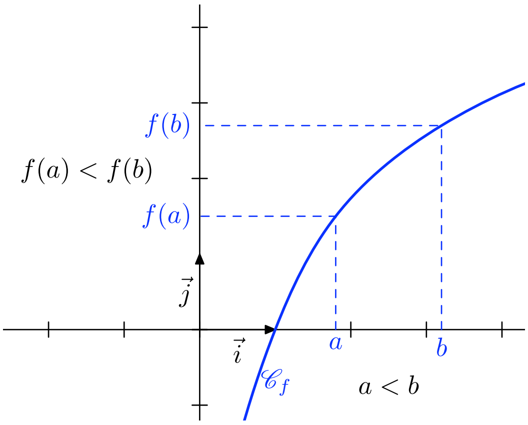
3.3 Variations

3.3.1 Sens de variation

Définition 3.3
Soit f une fonction définie sur un intervalle I :
- on dit que f est *strictement croissante* sur I lorsque pour tous réels a et b de I, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$;
- on dit que f est *strictement décroissante* sur I lorsque pour tous réels a et b de I, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.

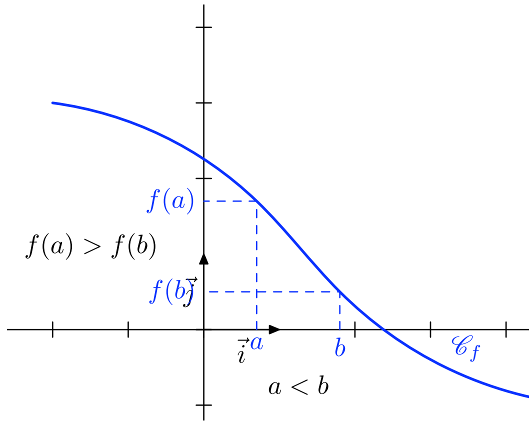
Interprétation graphique :

Fonction strictement croissante :



Pour tous les réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) < f(b)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ « monte » lorsqu'on se déplace vers la droite.

Fonction strictement décroissante :

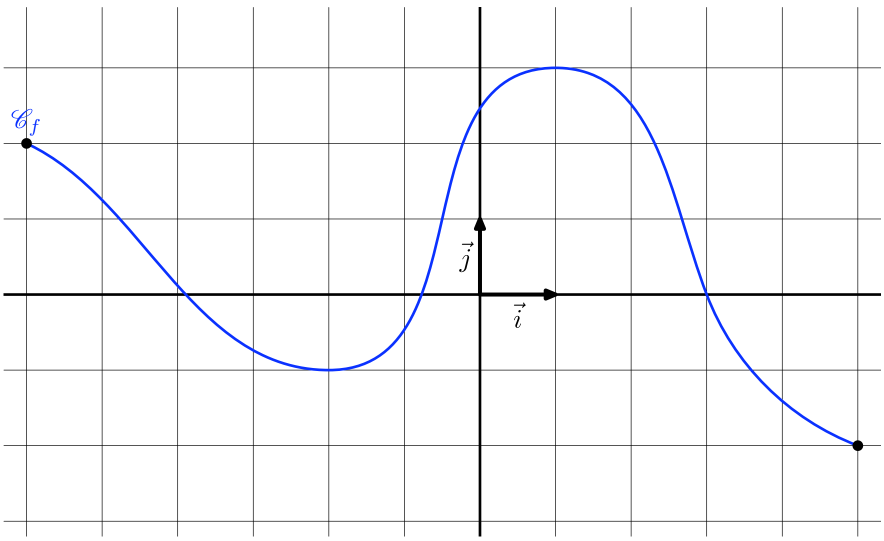


Pour tous les réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) > f(b)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ « descend » lorsqu'on se déplace vers la droite.

3.3.2 Tableau de variation

Définition 3.4
Étudier les variations d'une fonction, c'est déterminer les intervalles sur lesquels la fonction est strictement croissante et ceux sur lesquels elle est strictement décroissante. On regroupe ces résultats dans un tableau appelé *tableau de variation*.

Exemple 3.7
On a tracé ci-dessous la courbe représentant une fonction f définie sur l'intervalle $I = [-6\,;\,5]$. En observant cette courbe, dresser le tableau de variation de f sur I.



En observant le graphique on remarque que :
– sur l'intervalle $[-6\,;\,-2]$, la courbe « descend » losqu'on se déplace de la gauche vers la droite : sur cet intervalle la fonction f est strictement décroissante ;
– sur l'intervalle $[-2\,;\,1]$, la courbe « monte » losqu'on se déplace de la gauche vers la droite : sur cet intervalle la fonction f est strictement croissante ;

– sur l'intervalle [1 ; 5], la courbe « descend » losqu'on se déplace de la gauche vers la droite : sur cet intervalle la fonction f est strictement décroissante.

On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	-6		-2		1		5
f	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2

Les valeurs 2, -1, 3 et -2 placées dans le tableau sont les images respectives de -6, -2, 1 et 5. On les obtient ici par lecture graphique. Dans le cas où on connait l'expression de $f(x)$ en fonction de x, on les calcule.

Par convention, dans un tableau de variation, une flèche vers le bas signifie que la fonction est strictement décroissante sur l'intervalle considéré et une flèche vers le haut signifie qu'elle est strictement croissante.

Remarque 3.2
Lorsqu'une fonction a une (ou plusieurs) valeur(s) interdite(s), on l'indique dans le tableau de variation par une double barre verticale :
prenons par exemple la fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. La fonction f a une valeur interdite : $x = 0$ et on a vu en seconde qu'elle est décroissante sur $\mathbf{R}_-^*$ et sur $\mathbf{R}_+^*$.
On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

3.3.3 Extremums

Définition 3.5
Soit f une fonction définie sur un intervalle I ; et soit $a \in I$:
– on dit que $f(a)$ est le maximum de f sur I si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$. On dit aussi que f atteint son maximum sur I pour $x = a$;
– on dit que $f(a)$ est le minimum de f sur I si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(a)$. On dit aussi que f atteint son minimum sur I pour $x = a$.
Dans les deux cas on dit que $f(a)$ est un extremum.

Exemple 3.8
Dans l'exemple 3.7, le maximum de f sur $[-6 ; 3]$ est 3 ; il est atteint pour $x = 1$. Le minimum de f sur ce même intervalle est -2 ; il est atteint pour $x = 5$.
Toujours dans cet exemple, $f(-2) = -1$ est un minimum pour f sur l'intervalle $[-6 ; 1]$.