Chapitre 1

Proportions. Pourcentages

1.1 Calcul d'une proportion

Définition 1.1 (Vocabulaire)
Une *population* est un ensemble d'*individus* qui peuvent être des personnes, des animaux, des objets, ...
L'*effectif* d'une population est le nombre d'individus de la population.
Une *sous-population* est un ensemble d'individus appartenant tous à une même population plus grande.

Définition 1.2
Dans une population E d'effectif n_E on définit une sous-population A d'effectif n_A. La *proportion* (ou *fréquence*) de la sous-population A dans la population E est le rapport des effectifs :

$$p = \frac{n_A}{n_E}$$

Remarque 1.1
Une proportion p est souvent exprimée en pourcentage.

Remarque 1.2
A étant une sous-population de E, on a : $n_A \leq n_E$, donc nécessairement, on a : $0 \leq p \leq 1$.

Exemple 1.1
En juillet 2005, le nombre de demandeurs d'emploi en France était d'environ 2 423 300, et la population active était d'environ 24 478 000. La proportion de demandeurs d'emploi dans la population active (ou taux de chômage) était donc de :

$$p = \frac{\text{nombre de demandeurs d'emploi}}{\text{population active}} = \frac{2\,423\,300}{24\,478\,000} \approx 0{,}099 = 9{,}9\%$$

Remarque 1.3 (Pourcentages)
Attention aux écritures en pourcentages ! Dans une classe de 25 élèves 18 sont des filles.
On peut écrire : « La proportion de filles est $\frac{18}{25} = 0{,}72 = \frac{72}{100} = 72\%$ »
Ou encore : « La proportion de filles en pourcentages est $\frac{18}{25} \times 100 = 0{,}72 \times 100 = 72$ »
Mais : $\frac{18}{25} \times 100 \neq 72\%$

1.2 Comparaisons, additions, multiplications

1.2.1 Comparaison

Propriété 1.1
On ne peut comparer deux proportions que si elles représentent deux sous-populations d'une *même* population.

Exemple 1.2
Hier, entre 20 h et 20 h 30, 7 400 000 français étaient devant leur télévision (population E). Parmi eux, 2 300 000 regardaient France 2 (population A), et 1 300 000 regardaient France 3 (population B). Les populations A et B sont deux sous-populations de E, donc sans faire de calculs, on peut affirmer que $p_B \leq p_A$. ($p_B \approx 0{,}176$, et $p_A \approx 0{,}311$).

Exemple 1.3
Entre 23 h et 23 h 30, seuls 2 100 000 regardaient encore la télé (population F). Parmi eux, 420 000 regardaient Arte (population C). On a $p_C = \frac{420\ 000}{2\ 100\ 000} = 0{,}2$. Donc $p_B < p_C$ pourtant $n_B > n_C$. (la proportion des téléspectateurs d'Arte à 23 h était plus importante que celle de France 3 à 20 h, néanmoins, France 3 avait plus de téléspectateurs.)

1.2.2 Proportion et réunion

Définition 1.3
Soit A et B deux sous-populations d'une population E. Alors :
- l'ensemble des individus qui appartiennent à A *et* à B est noté $A \cap B$ (on lit A *inter* B) ;
- l'ensemble des individus qui appartiennent à A *ou* à B ou aux deux est noté $A \cup B$ (on lit A *union* B).

Exemple 1.4
Dans une classe de 33 élèves, on a regroupé les effectifs dans un tableau :

	externes pop B	demi-pensionnaires pop $\overline{B}$
garçons : pop A	6	8
filles : pop $\overline{A}$	4	15
total	10	23

Dans cet exemple, la population E est l'ensemble de la classe, A représente les garçons, B les externes. On a alors :
- l'ensemble $A \cap B$ représente la population des garçons externes ;
- l'ensemble $A \cap \overline{B}$ représente la population des garçons demi-pensionnaires ;
- $\ldots$;
- l'ensemble $A \cup B$ représente la population des élèves qui sont soit des garçons soit des externes, c'est-à-dire tous les garçons plus les filles externes ;
- dots.

Propriété 1.2
Si A et B sont deux sous-populations d'une même population E, alors la proportion de la

sous-population $A \cup B$ est la somme des proportions de A et de B diminuée de la proportion de $A \cap B$. On écrit :

$$p_{A\cup B} = p_A + p_B - p_{A\cap B}$$

Exemple 1.5
En reprenant les données de l'exemple 1.4, on a :
- $p(A) = \frac{19}{33}$, $p(B) = \frac{10}{33}$;
- $p(A \cap B) = \frac{6}{33}$ et $p(A \cup B) = \frac{8+6+10}{33} = \frac{18}{33}$.

On a bien $p(A \cup B) = p(A) + p(B) + p(A \cap B)$.

Exemple 1.6
Dans une classe de 35 élèves (population E), on a fait un contrôle en maths et un en français. Voici les résultats :
- 23 ont eu la moyenne en maths (population A),
- 13 ont eu la moyenne en français (population B), et parmi eux,
- 8 ont eu la moyenne aux deux contrôles (population $A \cap B$).

La population des élèves ayant eu la moyenne à l'une au moins des deux épreuves est $A \cup B$. On a donc :

$$p_{A\cup B} = p_A + p_B - p_{A\cap B} = \frac{23}{35} + \frac{13}{35} - \frac{8}{35} = \frac{28}{35} = 0{,}8$$

1.2.3 Proportions échelonnées

Propriété 1.3
Si p est la proportion d'une population A dans une population E, et p' est la proportion de cette population E dans une population F, alors, la proportion de A dans F est $p \times p'$.

Exemple 1.7
La proportion des angliscistes (population A) dans l'ensemble des classes de seconde d'un lycée (population E) est $p_1 = 0{,}6$. La proportion des élèves de seconde dans l'ensemble des élèves du lycée (population F) est $p_2 = 0{,}4$. On peut en déduire que la proportion des élèves de seconde angliscistes dans la population du lycée est : $p = p_1 \times p_2 = 0{,}24$.

Remarque 1.4
Dans un exercice, pour utiliser la formule « $P = p \times p'$ » de la propriété 1.3, il faut commencer par écrire ce que sont P, p, et p' avec :
- P la proportion de plus petit ensemble considéré dans le plus grand ;
- p et p' étant les deux autres proportions.

1.3 Variation absolue. Taux d'évolution

Définition 1.4
On considère deux nombres réels strictement positifs y_1 et y_2.
On appelle *variation absolue* entre y_1 et y_2 le nombre $y_2 - y_1$.
On appelle *taux d'évolution* (ou variation relative) entre y_1 et y_2 le nombre $r = \dfrac{y_2 - y_1}{y_1}$.
En pourcentage la variation est de t % avec $t = 100 \times r$.

Exemple 1.8
Le PIB de la France en 2003 était de 24 743 € par habitant. En 2002, il était de 21 984 € par habitant.
La variation absolue du PIB par habitant entre 2002 et 2003 est : 24 743 − 21 984 = 2 759 €.
Le taux d'évolution du PIB par habitant entre 2002 et 2003 est :

$$t = \frac{24\,743 - 21\,984}{21\,984} \approx 0{,}126 \text{ soit environ } 12{,}6\%.$$

Remarque 1.5
Si le taux d'évolution est positif, il s'agit d'une augmentation, s'il est négatif, il s'agit d'une diminution.

Exemple 1.9
Dans un village, la population était de 2 150 habitants en 2000. En 2005 elle était de 1 847 habitants. Le taux de variation de la population de ce village entre 2000 et 2005 est égal à :

$$\frac{1\,847 - 2\,150}{2\,150} = \frac{-303}{2\,150} \approx -0{,}141.$$

La population a donc *diminué* d'environ 14 %.

Remarque 1.6 (Vocabulaire)
En mai 2005, 35 % des Belges étaient satisfaits de leur premier ministre ; en juin 2005 ils étaient 42 %. On dit que la côte de popularité du premier ministre belge a augmenté de 7 *points* et non pas de 7 % : le % n'est pas une unité de mesure.

1.4 Coefficient multiplicateur

Propriété 1.4
Si le taux d'évolution entre y_1 et y_2 est de t% alors :

$$y_2 = \left(1 + \frac{t}{100}\right) \times y_1$$

Le nombre $(1 + \frac{t}{100})$ est appelé *coefficient multiplicateur* de l'évolution, on le note souvent CM.
De plus :
- si $(1 + \frac{t}{100}) < 1$, il traduit une baisse ;
- si $(1 + \frac{t}{100}) > 1$, il traduit une hausse.

Exemple 1.10
Pendant les soldes, un commerçant baisse les prix de 25 %. Puisque c'est une baisse, le taux d'évolution est négatif ; on a donc : $r = -\frac{25}{100} = -0{,}25$. Le coefficient multiplicateur vaut donc $CM = 1 + (-0{,}25) = 0{,}75$.
Si un article coûtait 154 €, son prix soldé est $154 \times 0{,}75 = 115{,}50$ €.
Plus généralement, si un article coûtait x euros, pour trouver son nouveau prix y, on va multiplier l'ancien par le coefficient multiplicateur. Ainsi on a : $y = 0{,}75 \times x$.

Exemple 1.11
En trois ans, le prix des composants électroniques a été divisé par 4. Quel est le pourcentage de baisse des composants électroniques ?

Le coefficient multiplicateur est $\frac{1}{4} = 0{,}25$; on appelle t le taux d'évolution du prix des composants électroniques. On a : $1 + t = 0,25$, donc $t = 0{,}25 - 1 = -0{,}75$. Donc le prix des composants électroniques a baissé de 75 % en trois ans.

Remarque 1.7
On peut résumer tous les types de questions sur les taux d'évolution dans le tableau suivant (à compléter) :

Valeur de départ	Valeur d'arrivée	Variation relative	Évolution de t%	Coefficient multiplicateur	augmentation ou réduction
V_D	$V_A = V_D \times CM$	$r = \frac{t}{100}$	t	$CM = 1 + \frac{t}{100}$	$\uparrow$ ou $\downarrow$
12	13,56				
14,5	11,6				
54			-45		
	158,40	0,32			
	54,60			0,65	
87		-12%			
125				1,24	

1.5 Évolutions successives. Évolutions réciproques

1.5.1 Évolutions successives

Propriété 1.5
Lorsqu'un nombre subit plusieurs évolutions successives, le coefficient multiplicateur de l'évolution totale est le produit des coefficients multiplicateurs de chaque évolution.
Autrement dit, si on a trois nombres y_1, y_2, et y_3, on note t_{12} le pourcentage d'évolution de y_1 à y_2, t_{23} le pourcentage d'évolution de y_2 à y_3 et t_{13} le pourcentage d'évolution de y_1 à y_3.
On a alors :

$$1 + \frac{t_{13}}{100} = \left(1 + \frac{t_{12}}{100}\right)\left(1 + \frac{t_{23}}{100}\right)$$

Exemple 1.12
Après avoir augmenté ses prix de 10 %, un commerçant décide de solder ses articles à -25 %.
L'augmentation a un coefficient multiplicateur de $(1 + \frac{10}{100}) = 1{,}10$; le coefficient multiplicateur de la baisse vaut : $(1 - \frac{25}{100}) = 0{,}75$. Au total, le coefficient multiplicateur de l'évolution totale est donc égal à : $1{,}10 \times 0{,}75 = 0{,}825$.
En notant r le taux d'évolution correspondant on a $1 + r = 0{,}825$. Donc $r = -0{,}175$; soit une baisse de 17,5 %.

Exemple 1.13
Entre 2002 et 2004, la population d'un village a baissé de 44 %. Entre 2002 et 2003, elle avait baissé de 30 %. De combien a-t-elle baissé entre 2003 et 2004 ?
Soit t le taux de baisse entre 2003 et 2004.

$$\begin{array}{rl} \text{On a :} & \left(1-\frac{30}{100}\right)\times(1-t)=\left(1-\frac{44}{100}\right) \\ \text{donc :} & (1+\frac{t}{100})=\frac{0{,}56}{0{,}7}=0{,}8 \\ \text{donc :} & \frac{t}{100}=0{,}8-1=-0{,}20 \end{array}$$

Ainsi, entre 2003 et 2004 la population a baissé de 20 %.

1.5.2 Évolutions réciproques

Remarque 1.8
Si le prix d'un produit augmente de p %, puis qu'il baisse de p %, il ne reviendra pas au prix d'origine :
un article coûte 50 €. Il augmente de 10 %, puis baisse de 10 %. Son prix définitif est : $50\times(1+0{,}10)\times(1-0{,}10)=50\times1{,}1\times0{,}9=49{,}50$ €.

Propriété 1.6
Soit y_1 et y_2 deux réels positifs. On note r le taux d'évolution de y_1 à y_2 ($r=\frac{y_2-y_1}{y_1}\times$). Le taux d'évolution *reciproque* r' est le taux d'évolution de y_2 à y_1. On a alors :

$$1+r'=\frac{1}{1+r}$$

Exemple 1.14
Le prix d'un article augmente de 25 %. Quel doit être le taux r de baisse pour revenir au prix initial ?
On a : $1+r=\dfrac{1}{1+0{,}25}$ donc $r=\dfrac{1}{1{,}25}-1=-0{,}20$. Il faut donc appliquer une baisse de 20 % pour que l'aricle revienne au prix initial.