À la demande générale, je vous rappelle quelques unes des méthodes à connaître pour déterminer une équation de droite dans un repère.
D'abord un rappel : une équation de droite est une égalité liant les coordonnées de tous les points de la droite. Une équation de droite d peut toujours s'écrire sous la forme $ax+by+c=0$. Cela signifie :

À retenir

$$M(x;y) \in d \iff ax+by+c=0$$

Ainsi, si $M \in d$ alors $ax+by+c=0$ et réciproquement si un point M a des coordonnées qui vérifient $ax+by+c=0$ alors il est sur d.

1 Droite passant par deux points

Dans cette partie $(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère du plan. A et B sont deux points de coordonnées respectives $(x_A;y_A)$ et $(x_B;y_B)$ dans le repère. On cherche à déterminer une équation de la droite (AB).

1.1 Équation réduite : méthode 1

Si les deux points n'ont pas la même abscisse, la droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées ; elle admet donc une équation du type $y=mx+p$. Vous devez retenir ceci :

À retenir

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

Puis en remarquant que $y_A=mx_A+p$ (car $A \in (AB)$) on obtient :

$$p=y_A-mx_A$$

Exercice :
On donne $A(2;3)$ et $B(-3;-1)$. Déterminer une équation de (AB).

Solution

La droite (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées donc son équation réduite est de la forme $y=mx+p$.
On a $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-1-3}{-3-2}=\frac{-4}{-5}=\frac{4}{5}$. Donc $(AB) : y=\frac{4}{5}x+p$.
Le point $A \in (AB)$ donc $y_A=\frac{4}{5}x_A+p$ et donc $p=3-\frac{4}{5}\times 2=\frac{7}{5}$. Ainsi, l'équation réduite de (AB) est : $y=\frac{4}{5}x+\frac{7}{5}$.

À retenir

Si les deux points ont la même abscisse c alors l'équation réduite de la droite (AB) est $x=c$.

Exemple : si on donne $A(2;5)$ et $B(2;-3)$ alors l'équation réduite de la droite (AB) est $x=2$.

1.2 Équation du type $ax + by + c = 0$: méthode 2

Avec la méthode précédente on a deux cas à distinguer. Voyons maintenant la méthode la plus générale ; d'abord un rappel :

À retenir

Deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$.

Un point $M(x; y)$ appartient à (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires (car alors (AM) et (AB) sont parallèles avec un point commun donc confondues).
On écrit alors les coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$ et $\overrightarrow{AM}(x - x_A; y - y_A)$ et on a :

À retenir

$$\begin{aligned} M(x; y) \in d &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff (x - x_A)(y_B - y_A) - (x_B - x_A)(y - y_A) = 0 \end{aligned}$$

Il reste alors à développer cette dernière expression pour obtenir l'équation de d sous la forme $ax + by + c = 0$.

Exercice :

On donne $A(2; 3)$ et $B(-3; -1)$. Déterminer une équation de (AB).

Solution

On obtient $\overrightarrow{AB}(-5; -4)$ et pour $M(x; y)$, $\overrightarrow{AM}(x - 2; y - 3)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} M(x; y) \in (AB) &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff (x - 2) \times (-4) - (-5)(y - 3) = 0 \\ &\iff -4x + 8 + 5y - 15 = 0 \\ &\iff -4x + 5y - 7 = 0 \end{aligned}$$

Donc $(AB) : -4x + 5y - 7 = 0$.

2 Avec un vecteur normal

Dans cette partie on se place dans un repère **orthonormal** du plan.

À retenir

d est une droite d'équation $ax + by + c = 0$ si et seulement si le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(a; b)$ est normal à d.

Exercice :

On donne $A(-2; 1)$ et $B(3; -5)$. Déterminer une équation de la droite d perpendiculaire à (AB) passant par A.

Solution

Un vecteur normal à d est $\overrightarrow{AB}(5; -6)$ donc une équation de d est $5x - 6y + c = 0$ où $c \in \mathbf{R}$. De plus $A \in d$ donc ses coordonnées vérifient l'équation de d : $5 \times (-2) - 6 \times 1 + c = 0$ donc $c = 16$ et $d : 5x - 6y + 16 = 0$.