Cours de mathématiques

Thomas Rey

Classe de première S
13 mai 2009

« *Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve.* »
Euclide d'Alexandrie

Table des matières

1. Leonhard EULER (1707-1783) : mathématicien suisse. Un des mathématiciens les plus productifs de tous les temps. Il a travaillé dans beaucoup de domaines (notre trigonométrie moderne provient essentiellement de son *Introductio* de 1748). Il est aussi l'inventeur de beaucoup de notations que nous utilisons encore aujourd'hui (π, Σ pour les sommes, r pour les rayons, A, B, . . . pour les sommets d'un polygone, cos et sin, . . .)

« *Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve.* »
Euclide d'Alexandrie

Chapitre 1

Fonctions

Dans la vie courante, on rencontre souvent des situations où une chose dépend d'une autre : prendre son parapluie ou non le matin dépend du temps qu'il fait ; l'heure à laquelle on programme son réveil dépend de la durée de transport pour se rendre au lycée, le prix à payer pour mon sachet de pommes dépend de la masse de pommes qu'il contient. Dans ce dernier exemple on dit aussi que le prix est *fonction* de la masse. C'est ce même mot qu'on utilise en mathématiques pour signifier qu'une quantité *dépend* d'une autre.
C'est LEIBNIZ qui, à la fin du XVII^e siècle, écrit le premier dans un de ses textes « x est fonction de y ». Quelques années plus tard, JEAN BERNOULLI emploie la notation fx pour désigner une fonction de la *variable* x : l'acte de naissance des *fonctions*, nouveaux objets mathématiques [1] était signé, nous allons en commencer ici l'étude.

1.1 Fonction numérique

1.1.1 Définitions et vocabulaire

Définition 1.1
Une fonction numérique permet d'associer à chaque nombre x d'un ensemble D un autre nombre que l'on note $f(x)$. On note :

$$\begin{array}{rccc} f: & D & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Le nombre $f(x)$ est appelé *image* de x par la fonction f. L'image d'un nombre par une fonction numérique est unique.
x est appelé *antécédent* de $f(x)$ par f. Un nombre peut avoir plusieurs antécédents ; il peut aussi ne pas en avoir.

Exemple 1.1
On définit la fonction f sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 - 5$. On a :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 - 5 \\ & 1 & \longmapsto & 1^2 - 5 = -4 \\ & -5 & \longmapsto & (-5)^2 - 5 = 20 \\ & \frac{5}{2} & \longmapsto & \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 = \frac{25}{4} - 5 = \frac{5}{4} \\ & \pi & \longmapsto & \pi^2 - 5 \approx 4{,}87 \end{array}$$

1. Qui allaient faire souffrir bon nombre de lycéens...

Dans cet exemple 20 a deux antécédents car l'équation $x^2 - 5 = 20$ a deux solutions : $x = 5$ et $x = -5$.
Par contre -6 n'a pas d'antécédent car $x^2 - 5 = -6$ n'a pas de solution. (car $x^2 = -1$ n'en a pas.)

Définition 1.2
Soit f une fonction numérique. On appelle *ensemble de définition* de f et on note généralement $\mathscr{D}_f$ l'ensemble des nombres pour lesquels $f(x)$ existe.

Exemple 1.2
On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3x+2}{x-1}$. Le nombre $f(x)$ existe pour tout $x \neq 1$. En effet si $x = 1$, pour calculer $f(x)$, il faudrait diviser par 0 ce qui est impossible. Donc $\mathscr{D}_f = \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

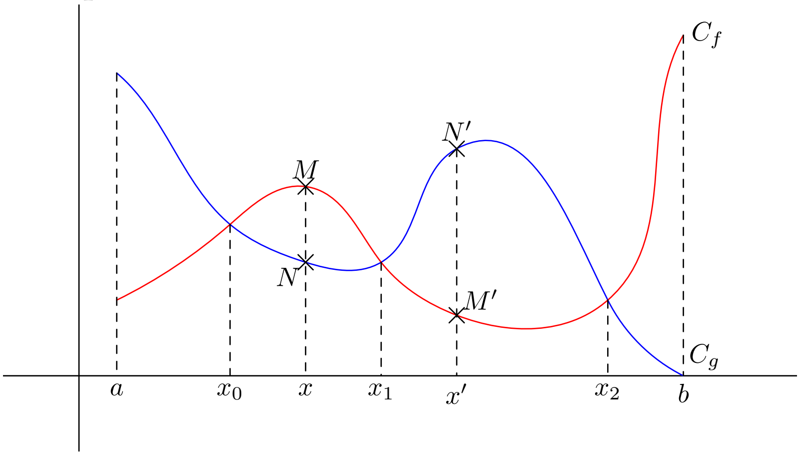
1.1.2 Représentation graphique

Définition 1.3
Soit f une fonction numérique. Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on pose $y = f(x)$. À chaque couple $(x; y)$ on peut donc associer un point dans un repère. L'ensemble de ces points est appelé *courbe représentative* de la fonction f. On la note généralement $\mathscr{C}_f$.

1.1.3 Résolutions graphiques d'équations et d'inéquations

Soit f et g deux fonctions numériques définies sur un intervalle $[a; b]$.
- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ c'est trouver les *abscisses* des points d'intersections de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
- Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$, c'est trouver les *abscisses* des points $M(x; f(x))$ et $N(x; g(x))$ tels que M est au dessus de N.

Exemple 1.3



Sur la figure ci-dessus, on a tracé les représentations graphiques de deux fonctions f et g définies sur $[a; b]$.
L'équation $f(x) = g(x)$ admet trois solutions : $\mathscr{S} = \{x_0; x_1; x_2\}$.
La solution de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ est $S = [x_0; x_1] \cup [x_2; b]$.
Par exemple, pour $x \in [x_0; x_1]$, on a bien $M(x; f(x))$ qui est au dessus de $N(x; g(x))$. Par contre pour $x' \in [x_1; x_2]$, on a $M(x'; f(x'))$ qui est en dessous de $N(x'; g(x'))$.

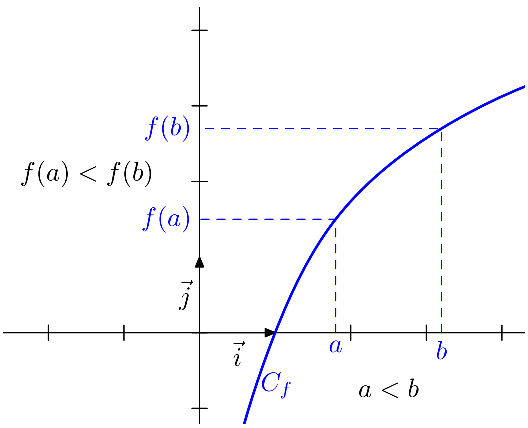
1.1.4 Variations

Définition 1.4
On dit qu'une fonction f est *strictement croissante* sur un intervalle I si pour tout a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) < f(b)$.

On dit qu'une fonction f est *strictement décroissante* sur un intervalle I si pour tout a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) > f(b)$.

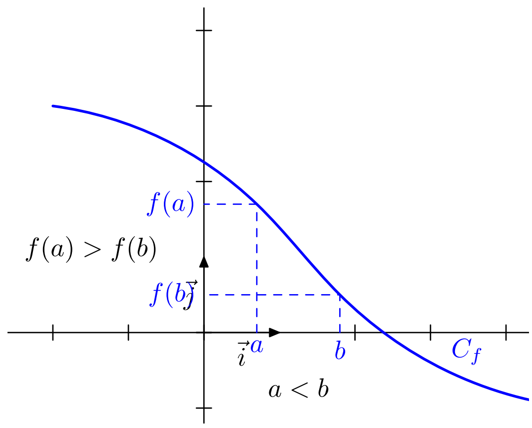
Remarque 1.1
Graphiquement, une fonction est croissante si sa courbe « monte » lorsqu'on se déplace de la gauche vers la droite ; Et une fonction est décroissante si sa courbe « descend » lorsqu'on se déplace de la gauche vers la droite.

Fonction strictement croissante :



Pour tous les réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) < f(b)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ « monte » lorsqu'on se déplace vers la droite.

Fonction strictement décroissante :



Pour tous les réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) > f(b)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ « descend » lorsqu'on se déplace vers la droite.

1.2 Opérations sur les fonctions

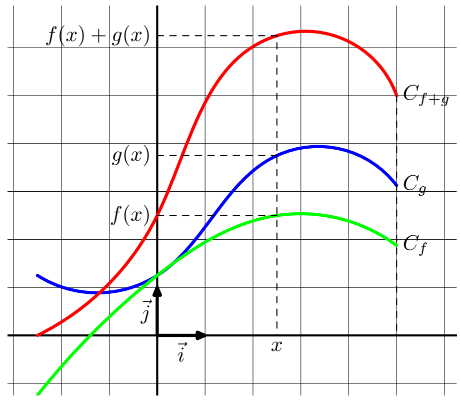
1.2.1 Égalité

Définition 1.5
Deux fonctions f et g sont dites *égales* si :

- elles ont le même ensemble de définition ;
- pour tout x de cet ensemble on a $f(x) = g(x)$.

Dans ce cas, leurs courbes représentatives sont bien entendu confondues.

1.2.2 Opérations simples



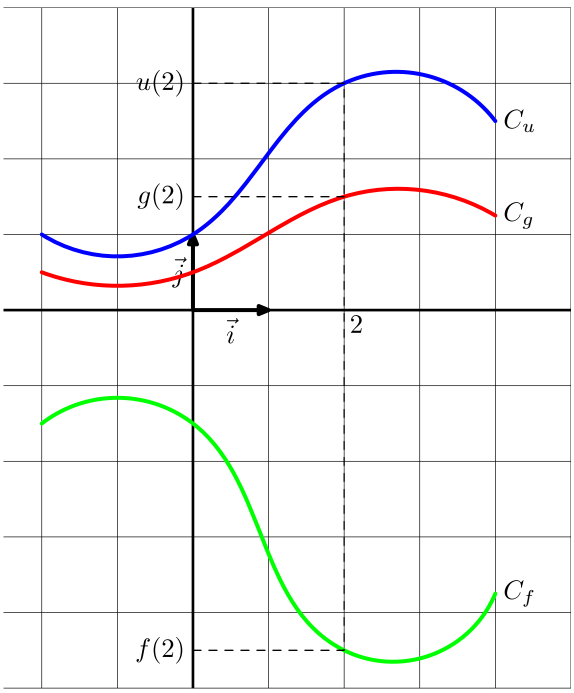
Définition 1.6
Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I. On dit que la fonction h est la *somme* des fonctions f et g, si pour tout $x \in I$, $h(x) = f(x) + g(x)$.

Propriété 1.1
Si f et g sont deux fonctions strictement croissantes (resp. décroissantes) sur un intervalle I, alors la fonction $h = f + g$ est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.

Démonstration :
Soit f et g deux fonctions strictement croissantes sur I. Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$. On a alors :
$f(a) < f(b)$ car f est croissante sur I ; et de même, $g(a) < g(b)$. En ajoutant membres à membres ces deux inégalités, on obtient :
$f(a) + g(a) < f(b) + g(b)$ et donc $(f + g)(a) < (f + g)(b)$.
Ainsi la fonction $f + g$ est croissante sur I. La démonstration pour f et g décroissantes est analogue.

Définition 1.7
Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et k un réel. On dit que la fonction g est le produit de f par k si pour tout $x \in I$, $g(x) = k \times f(x)$.

Exemple 1.4
Sur le graphique ci-dessous, la fonction f définie sur $I = [-2; 4]$ est le produit de la fonction u par $-1{,}5$, et la fonction g définie sur $I = [-2; 4]$ est le produit de la fonction u par $\frac{1}{2}$: pour tout $x \in I$, on a : $f(x) = -1{,}5u(x)$ et $g(x) = \frac{1}{2}u(x)$.



Propriété 1.2
Si $k > 0$, les fonctions f et kf ont le même sens de variation.
Si $k < 0$, les fonctions f et kf ont des sens de variation contraires.

Démonstration :
Soit f une fonction croissante sur I et k un réel strictement négatif. Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$.
On a $f(a) < f(b)$ car f est croissante sur I. On multiplie les deux membres de l'inégalité par $k < 0$ pour obtenir :
$k \times f(a) > k \times f(b)$ soit $(k \cdot f)(a) > (k \cdot f)(b)$.
Ainsi, la fonction kf est décroissante sur I. Les autres cas se démontrent de la même manière.

1.2.3 Composition

Définition 1.8
Soit g une fonction, et $\mathscr{D}_g$ son ensemble de définition. Soit u une fonction définie sur I telle que pour tout $x \in I, u(x) \in \mathscr{D}_g$.
La fonction f *composée* de u suivie de g définie sur I est la fonction qui à tout x de I associe le nombre $f(x) = g\,(u(x))$.
On la note $f = g \circ u$. On dit aussi que f est la composée de g par u.

$$\begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{u} & \mathscr{D}_g & \xrightarrow{g} & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & u(x) & \longmapsto & g(u(x)) \end{array}$$
$$\underrightarrow{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{f}$$

Exemple 1.5
Soit u la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $u(x) = x^2 + 3$, et g la fonction définie sur $\mathbf{R}^+$ par $g(x) = \sqrt{x}$.
Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $u(x) > 0$, on peut donc calculer $g\,(u(x))$.
La fonction f définie par $f(x) = g\,(u(x))$, est la fonction *composée* u suivie de g. C'est à dire $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$.

Propriété 1.3
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et monotone sur I. Soit g une fonction définie sur un intervalle J contenant[2] $f(I)$ et monotone sur J.
– Si f et g ont les *mêmes* sens de variation sur I et J respectivement, alors la fonction $g \circ f$ est *croissante* sur I ;
– Si f et g ont des sens de variation *contraires* sur I et J respectivement, alors la fonction $g \circ f$ est *décroissante* sur I ;

Démonstration :
Démontrons le cas où f et g sont croissantes sur les intervalles où elles sont définies :
Soit a et b dans I tels que $a < b$. La fonction f est croissante donc $f(a) < f(b)$.
$f(a)$ et $f(b)$ sont deux réels de J et la fonction g est croissante sur J donc $g\,(f(a)) < g\,(f(b))$.
Ainsi, on a donc montré que si $a < b$ alors $g \circ f(a) < g \circ f(b)$. Donc la fonction $g \circ f$ est croissante sur I.
Démontrons le cas où f est croissante et g décroissante sur les intervalles où elles sont définies :

2. $f(I)$ est l'ensemble des réels $f(x)$ tels que $x \in I$.

Soit a et b dans I tels que $a < b$. La fonction f est croissante donc $f(a) < f(b)$.

$f(a)$ et $f(b)$ sont deux réels de J et la fonction g est décroissante sur J donc $g(f(a)) > g(f(b))$.

Ainsi, on a donc montré que si $a < b$ alors $g \circ f(a) > g \circ f(b)$. Donc la fonction $g \circ f$ est décroissante sur I.

Remarque 1.2 (Attention)
L'ordre des fonctions a un sens : dans l'exemple précédent, on appelle h la fonction composée g suivie de u. Pour $x \geq 0$, on a : $h(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2 + 3 = x + 3$. Et pour $x \geq 0$, $h(x) \neq f(x)$.

Exemple 1.6
Soit u et g les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par $u(x) = 2x+3$ et $g(x) = x^2$. On note f et h les fonctions définies par : $f = g \circ u$ et $h = u \circ g$. On a :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{R} & \xrightarrow{u} & \mathbf{R} & \xrightarrow{g} & \mathbf{R} \\
x & \longmapsto & u(x) & \longmapsto & g(u(x)) \\
2 & \longmapsto & 7 & \longmapsto & 49 \\
0 & \longmapsto & 3 & \longmapsto & 9 \\
x & \longmapsto & 2x+3 & \longmapsto & (2x+3)^2 \\
 & \multicolumn{3}{c}{\xrightarrow[f]{\qquad\qquad\qquad}} &
\end{array}$$

Finalement f est définie par $f(x) = (2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$.

De même, on a :

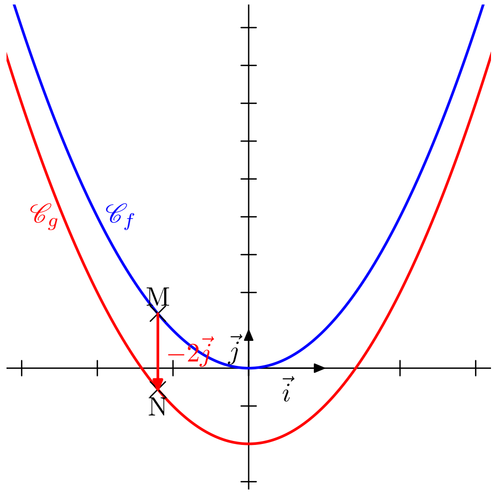
$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{R} & \xrightarrow{g} & \mathbf{R} & \xrightarrow{u} & \mathbf{R} \\
x & \longmapsto & g(x) & \longmapsto & u(g(x)) \\
2 & \longmapsto & 4 & \longmapsto & 11 \\
0 & \longmapsto & 0 & \longmapsto & 3 \\
x & \longmapsto & x^2 & \longmapsto & 2x^2+3 \\
 & \multicolumn{3}{c}{\xrightarrow[h]{\qquad\qquad\qquad}} &
\end{array}$$

Finalement, g est définie par $g(x) = 2x^2 + 3$.

Exemple 1.7
Tracer la représentation graphique de la fonction f qui est la composée de la fonction g suivie de h définies par $g(x) = x + 2$, et $h(x) = |x|$.

1.3 Fonctions associées

1.3.1 Fonction $x \mapsto f(x) + \beta$

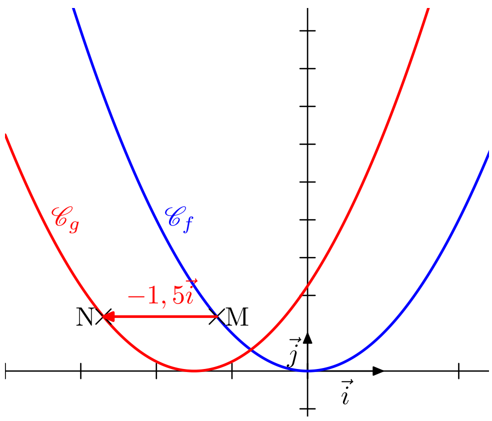


Propriété 1.4
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit β un réel quelconque. On considère la fonction g définie sur I par $g(x) = f(x) + \beta$.
La courbe représentative de la fonction g est l'image de la courbe représentative de la fonction f par la translation de vecteur $\beta\vec{j}$.

Exemple 1.8
Sur la figure ci-contre on a tracé la fonction f définie par $f(x) = x^2$ et la fonction g définie par $g(x) = f(x) - 2$. On a $\mathscr{C}_g$ qui est l'image de $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $-2\vec{j}$.

Démonstration de la propriété 1.4 :
Soit $x \in \mathscr{D}_f$ et soit $M(x; f(x))$ le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x. Le point M' de $\mathscr{C}_g$ qui a pour abscisse x a pour ordonnée $g(x) = f(x) + \beta$.
Les coordonnées de $\overrightarrow{MM'}$ sont donc $(x - x; f(x) + \beta - f(x))$ soit $(0; \beta)$.
Ainsi pour tout x on a $\overrightarrow{MM'} = \beta\vec{j}$. M' est donc l'image de M par la translation de vecteur $\beta\vec{j}$ et donc $\mathscr{C}_g$ est l'image de $\mathscr{C}_f$ par cette même translation.

1.3.2 Fonction $x \mapsto f(x + \alpha)$



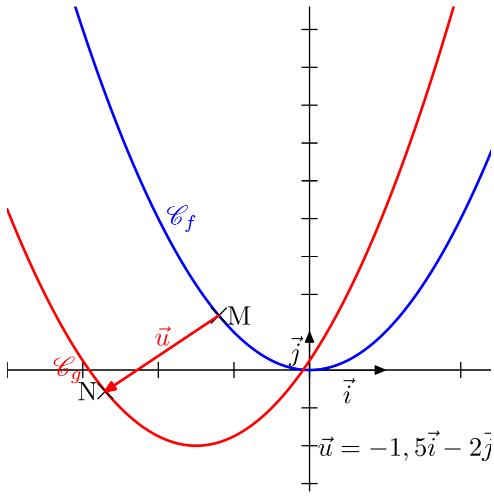
Propriété 1.5
Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]a\,;b[$. Soit α un réel quelconque. On considère la fonction g définie sur $]a - \alpha\,; b - \alpha[$ par $g(x) = f(x + \alpha)$.
La courbe représentative de la fonction g est l'image de la courbe représentative de la fonction f par la translation de vecteur $-\alpha\vec{i}$.

Exemple 1.9
Sur la figure ci-contre on a tracé la fonction f définie par $f(x) = x^2$ et la fonction g définie par $g(x) = f(x + 1{,}5)$. On a $\mathscr{C}_g$ qui est l'image de $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $-1{,}5\vec{i}$.

Démonstration de la propriété 1.5 :
Soit $x \in \mathscr{D}_f$ et soit $M(x; f(x))$ le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x. Le point M' de $\mathscr{C}_g$ qui a pour abscisse $x - \alpha$ a pour ordonnée $g(x - \alpha) = f(x - \alpha + \alpha) = f(x)$.
Les coordonnées de $\overrightarrow{MM'}$ sont donc $(x - \alpha - x; f(x) - f(x))$ soit $(-\alpha; 0)$.
Ainsi pour tout x on a $\overrightarrow{MM'} = -\alpha\vec{i}$. M' est donc l'image de M par la translation de vecteur $-\alpha\vec{i}$ et donc $\mathscr{C}_g$ est l'image de $\mathscr{C}_f$ par cette même translation.

1.3.3 Fonction $x \mapsto f(x+\alpha)+\beta$

Propriété 1.6
Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]a\,;\,b[$. Soit α et β deux réels quelconques. On considère la fonction g définie sur $]a-\alpha\,;\,b-\alpha[$ par $g(x) = f(x+\alpha)+\beta$.
La courbe représentative de la fonction g est l'image de la courbe représentative de la fonction f par la translation de vecteur $-\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}$.



Exemple 1.10
Sur la figure ci-contre on a tracé la fonction f définie par $f(x) = x^2$ et la fonction g définie par $g(x) = f(x+1{,}5)-2$. On a $\mathscr{C}_g$ qui est l'image de $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $-1{,}5\vec{i}-2\vec{j}$.

1.3.4 Variations des fonctions associées

Propriété 1.7
Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]a\,;\,b[$ et strictement monotone sur I. Soit α et β deux réels quelconques.
- La fonction g définie sur I par $g(x) = f(x)+\beta$ a les mêmes variations que f sur I.
- La fonction h définie sur $I' =]a-\alpha\,;\,b-\alpha[$ par $h(x) = f(x+\alpha)$ a les mêmes variations sur I' que f sur I (mais « décalées » de $-\alpha$ unités).

Exemple 1.11
Soit f une fonction définie sur $[-5\,;\,5]$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	-5		-2		3		5
f	4	↘	0	↗	2	↘	-3

Soit g, h et p les fonctions définies par :

$$g(x) = f(x)-3; \qquad h(x) = f(x+2); \qquad p(x) = f(x-3)+4$$

La fonction g est définie sur $[-5\,;\,5]$ et son tableau de variation est :

x	-5		-2		3		5
g	1	↘	-3	↗	-1	↘	-6

Pour que $h(x)$ existe il faut que $f(x+2)$ existe soit $-5 \leq x+2 \leq 5$ ou encore $-7 \leq x \leq 3$. Ainsi $\mathscr{D}_h = [-7\,;\,3]$. De même, on obtient facilement que $\mathscr{D}_p = [-2\,;\,8]$.
Les tableaux de variations des fonctions h et p sont alors :

x	-7		-4		1		3
h	4	↘	0	↗	2	↘	-3

x	-2		1		6		8
p	8	↘	4	↗	6	↘	1

Chapitre 2

Barycentres

« Donnez-moi un levier, un point d'appui, et je soulèverai le monde ».

Par cette phrase, Archimède (IIIe s. av. J.-C.) suggère qu'en positionnant correctement un levier sur un point d'appui, une force quelconque peut soulever n'importe quelle masse. Derrière cette affirmation, se cache la notion de *barycentre* (*barus* : lourd en grec). Cette notion est d'abord une invention de mécanique et de physique : recherche de centre de gravité, ... Archimède est le premier mathématicien a avoir cherché des centres de gravité de surfaces telles qu'un demi-disque ou une parabole.

Les études d'Archimède sur ce sujet seront poursuivies par les physiciens Guldin et König au début du XVIIIe sciècle puis formalisée par le mathématicien Möbius (1790-1868).

Le calcul barycentrique est très utile en physique et mécanique mais se retrouve aussi en géométrie pour repérer des points par rapport à d'autres (on parle de coordonnées barycentriques), c'est également un très bon outil pour résoudre des problèmes d'alignement ou de points de concours.

On le retrouve également en statistiques (moyennes pondérées) et en probabilité (calculs d'espérances).

2.1 Vecteurs du plan

2.1.1 Définition

Définition 2.1

Soit A et B deux points distincts du plan. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un objet mathématique caractérisé par la *direction* (AB), le *sens* (de A vers B) et la *norme* (notée $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$).

Si les points A et B sont confondus, $\overrightarrow{AA}$ est appelé *vecteur nul*. On le note $\overrightarrow{0}$.

L'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que ces deux vecteurs ont la même direction, le même sens et la même norme. Elle est équivalente à dire que $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement « aplati »).

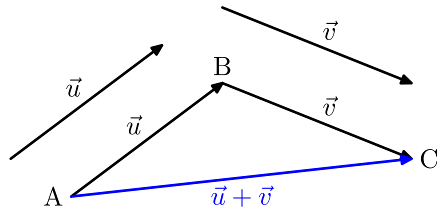
Remarque 2.1

Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan et tout point A, il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.

2.1.2 Opérations sur les vecteurs

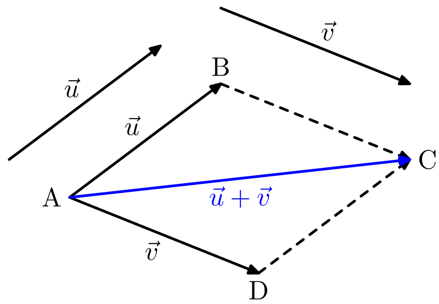
Définition 2.2 (Addition vectorielle)
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. La somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ peut s'obtenir de deux façons :

par la relation de Chasles : on trace des représentants des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ « bout à bout ».



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

par la règle du parallélogramme : on trace des représentants des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de même origine.



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

Définition 2.3 (Produit par un réel)
Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan et λ un réel. On définit le vecteur $\lambda\vec{u}$ dans les deux cas suivants :
- si $\lambda = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$, alors $\lambda\vec{u} = \vec{0}$;
- dans les autres cas, le vecteur $\lambda\vec{u}$ est le vecteur du plan ayant la même direction que $\vec{u}$, étant de même sens que $\vec{u}$ si $\lambda > 0$ et de sens contraire si $\lambda < 0$ et enfin, de norme $|\lambda| \times \|\vec{u}\|$.

Propriété 2.1
Pour tous les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan et tous les réels λ et μ, on a :

$$(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}; \quad \lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}; \quad \lambda(\mu\vec{u}) = \lambda\mu\vec{u}$$

Définition 2.4
Deux vecteurs non nuls sont dits *colinéaires* s'ils ont la même direction. Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs du plan.

Propriété 2.2
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

2.1.3 Coordonnées d'un vecteur

Dans cette partie, on munit le plan d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Définition 2.5
Les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ sont formés de l'unique couple de réel $(x; y)$ tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
Les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

Propriété 2.3
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$. On a :
- $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$;

– les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ sont $(x+x';y+y')$;
– pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, les coordonnées de $\lambda\vec{u}$ sont $(\lambda x;\lambda y)$;
– les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulemnt si $xy'-x'y=0$.

2.2 Barycentre de deux points pondérés

2.2.1 Définition

Propriété 2.4
Soit A et B deux points du plan et soit α et β deux réels tels que $\alpha+\beta\neq 0$.
Il existe un unique point G du plan tel que $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$.

Démonstration :
On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0} &\iff \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{0}\\ &\iff (\alpha+\beta)\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}\\ &\iff \overrightarrow{AG}=\tfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

Par ailleurs, les points A et B sont fixés, le réel $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ aussi ($\alpha+\beta\neq 0$), donc le point G existe et il est unique.

Remarque 2.2
En observant la dernière égalité obtenue dans la démonstration, on déduit même aisément que G est un point de la droite (AB).

Définition 2.6
Dans les conditions de la propriété 2.4, le point G est appelé *barycentre* des points *pondérés* (A,α) et (B,β).

Remarque 2.3
Si $\alpha+\beta=0$ avec $\alpha\neq 0$, l'égalité $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$ équivaut à $\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{GB}$ soit $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}$. Le point G n'existe donc pas si $A\neq B$ et il peut être n'importe quel point du plan si $A=B$.
Le cas $\alpha=\beta=0$ n'a aucun intérêt car le point G peut alors être n'importe quel point du plan.

2.2.2 Propriétés

Propriété 2.5
Si G est le barycentre des points pondérés (A,α) et (B,β), alors pour tout réel $k\neq 0$, G est aussi le barycentre des points pondérés $(A,k\alpha)$ et $(B,k\beta)$.

Propriété 2.6
Soit A et B deux points du plan et soit α un réel non nul.
Alors le barycentre de (A,α) et (B,α) est le milieu de $[AB]$.

Démonstration :
On reprend la dernière égalité vectorielle obtenue dans la démonstration de la propriété 2.4 et on obtient :

$\overrightarrow{AG} = \frac{\alpha}{\alpha+\alpha}\overrightarrow{AB}$; soit $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
Ainsi, G est le milieu de $[AB]$.

Définition 2.7
Dans les conditions de la propriété 2.6, le barycentre de (A, α) et (B, α) est appelé *isobarycentre* de ces points pondérés.

Propriété 2.7
Soit G le barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β) tels que $\alpha + \beta \neq 0$. Alors, pour tout point M du plan, on a :

$$\alpha\overrightarrow{AM} + \beta\overrightarrow{BM} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{GM}$$

Démonstration :
G est le barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β), donc :

$$\begin{array}{rc}
 & \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \\
\text{Alors :} & \alpha\left(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA}\right) + \beta\left(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MB}\right) = \overrightarrow{0} \\
\text{Donc :} & (\alpha + \beta)\overrightarrow{GM} + \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0} \\
\text{Et donc :} & (\alpha + \beta)\overrightarrow{GM} = \alpha\overrightarrow{AM} + \beta\overrightarrow{BM}
\end{array}$$

2.2.3 Avec des coordonnées

Dans cette partie, on se place dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On note $(x_A; y_A)$ les coordonnées d'un point A dans ce repère.

Propriété 2.8
Soit G le barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β) où $\alpha + \beta \neq 0$. Alors les coordonnées de G sont données par :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \text{ et } y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}$$

Démonstration :
On utilise la propriété 2.7 en prenant $M = O$, l'origine du repère. On obtient :
$(\alpha + \beta)\overrightarrow{GO} = \alpha\overrightarrow{AO} + \beta\overrightarrow{BO}$ et donc $\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}$.
Une égalité vectorielle est également vraie sur les coordonnées donc :
$x_G = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}x_A + \frac{\beta}{\alpha+\beta}x_B$ et $y_G = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}y_A + \frac{\beta}{\alpha+\beta}y_B$. D'où le résultat.

2.3 Barycentre de trois ou quatre points pondérés

2.3.1 Définition

Propriété 2.9
Soit (A, α), (B, β) et (C, γ) trois points pondérés tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.
Il existe un unique point G tel que $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

Démonstration :
On a :

$$\begin{aligned}
\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} &\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA} + \beta(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) + \gamma(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{0} \\
&\Leftrightarrow (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{GA} + \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \tfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \tfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

Il existe un unique point G vérifiant cette égalité car les points A, B et C sont fixés ainsi que les réels α, β et γ.

Définition 2.8
Ce point G est appelé barycentre des points pondérés (A, α), (B, β) et (C, γ).

Remarque 2.4
On peut de la même façon définir le barycentre de quatre (ou plus) points pondérés dans le cas où la somme des coefficients n'est pas nulle.

Propriété 2.10
Si G est le barycentre des points pondérés (A, α), (B, β) et (C, γ) (où $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$) alors pour tout réel $k \neq 0$, G est aussi le barycentre des points pondérés $(A, k\alpha)$, $(B, k\beta)$ et $(C, k\gamma)$.

Propriété 2.11
Si G est le barycentre des points pondérés (A, α), (B, β) et (C, γ) (où $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et $\beta + \gamma \neq 0$) alors G est le barycentre des points pondérés (A, α) et $(K, \beta + \gamma)$ où K est le barycentre des points pondérés (B, β) et (C, γ).
Cette propriété est appelée propriété d'*associativité* du barycentre.

Démonstration :
On a : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ (1) et $\beta\overrightarrow{KB} + \gamma\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{0}$ (2).
En utilisant l'égalité (1) :

$$\begin{aligned}
(1) &\iff \alpha\overrightarrow{GA} + \beta(\overrightarrow{GK} + \overrightarrow{KB}) + \gamma(\overrightarrow{GK} + \overrightarrow{KC}) = \overrightarrow{0} \\
&\iff \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GK} + \beta\overrightarrow{KB} + \gamma\overrightarrow{GK} + \gamma\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{0}
\end{aligned}$$

Or, $\beta\overrightarrow{KB} + \gamma\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{0}$ (2), donc :

$$(1) \iff \alpha\overrightarrow{GA} + (\beta + \gamma)\overrightarrow{GK} = \overrightarrow{0}$$

Donc G est le barycentre des points pondérés (A, α) et $(B, \beta + \gamma)$.

Propriété 2.12
Soit G le barycentre des points pondérés (A, α), (B, β) et (C, γ) tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Alors, pour tout point M du plan, on a :

$$\alpha\overrightarrow{AM} + \beta\overrightarrow{BM} + \gamma\overrightarrow{CM} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{GM}$$

Propriété 2.13
Soit G le barycentre des points pondérés (A, α), (B, β) et (C, γ). Alors les coordonnées de G sont données par :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} \text{ et } y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

2.3.2 Applications

Exemple 2.1 (Un problème d'alignement)
Soit A, B et C trois points non-alignés. On note J le barycentre des points pondérés $(B, 1)$ et $(C, 2)$, et on note G le barycentre des points pondérés $(A, -4)$, $(B, 1)$ et $(C, 2)$.

1. Justifier l'existence des points J et G.
2. Démontrer que les points A, J et G sont alignés.

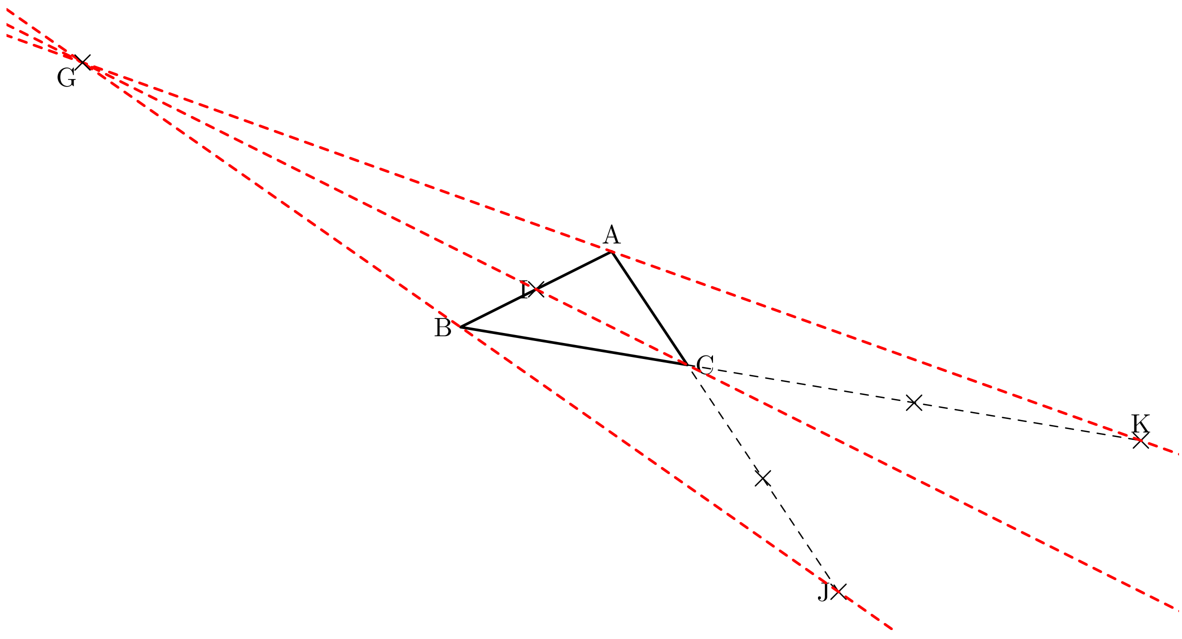
Réponses :

1. Le point J est défini car la somme des coefficients des points pondérés vaut $1+2 = 3 \neq 0$. De même la somme des coeffcients des points pondérés définissant G vaut $-4+1+2 = -1 \neq 0$.
2. G est le barycentre des points pondérés $(A, -4)$, $(B, 1)$ et $(C, 2)$. Donc d'après la propriété 2.11 d'associativité du barycentre, G est aussi le barycentre de $(A, -4)$ et $(J, 1+2)$. Donc, d'après la remarque 2.2, le point G appartient à la droite (AJ). Ainsi, les points G, A et J sont alignés.

Exemple 2.2 (Un problème de droites concourantes)
Soit ABC un triangle. On considère les points I, J et K définis par :
I est le milieu de $[AB]$; $\overrightarrow{JC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{JA}$ et $\overrightarrow{BK} = 3\overrightarrow{BC}$.

1. Faire une figure.
2. a. Déterminer des coefficients α et β pour que I soit le barycentre de (A, α) et (B, β).
   b. Déterminer des coefficients γ et δ pour que J soit le barycentre de (C, γ) et (A, δ).
   c. Déterminer des coefficients ϵ et η pour que K soit le barycentre de (B, ϵ) et (C, η).
3. Démontrer que les droites (AK), (BJ) et (CI) sont concourantes au point G barycentre des points pondérés $(A, 2)$, $(B, 2)$ et $(C, -3)$.

Réponses :

1. 

2. a. I est le milieu de $[AB]$ donc c'est l'isobarycentre de A et B. On peut donc prendre $\alpha = \beta = 1$.

b. On a $\overrightarrow{JC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{JA}$ donc $\overrightarrow{JC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{JA} = \overrightarrow{0}$. En multipliant les deux membres de cette égalité par 3 on obtient[1] : $3\overrightarrow{JC} - 2\overrightarrow{JA} = \overrightarrow{0}$. Ainsi J est le barycentre des points pondérés $(C, 3)$ et $(A, -2)$: $\gamma = 3$ et $\delta = -2$.

c. On a $\overrightarrow{BK} = 3\overrightarrow{BC}$. Par la relation de Chasles on obtient : $\overrightarrow{BK} = 3(\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KC})$. Ainsi on a : $-2\overrightarrow{BK} - 3\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{0}$. Ou encore : $2\overrightarrow{KB} - 3\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{0}$, donc K est le barycentre des points pondérés $(B, 2)$ et $(C, -3)$: $\epsilon = 2$ et $\eta = -3$.

3. Le barycentre de $(A, 2)$ et $(B, 2)$ est le point I, donc G est le barycentre de $(I, 4)$ et $(C, -3)$ et donc $G \in (CI)$.
Le barycentre de $(B, 2)$ et $(C, -3)$ est K, donc G est le barycentre de $(A, 2)$ et $(K, -1)$ et donc $G \in (AK)$.
Le barycentre de $(A, 2)$ et $(C, -3)$ est aussi le barycentre de $(A, -2)$ et $(C, 3)$ (on multiplie les coefficients par -1) et c'est donc le point J. Donc G est le barycentre de $(J, -1)$ et $(B, 2)$, et donc $G \in (BJ)$.
Ainsi, G appartient aux trois droites qui sont deux à deux distinctes, donc G est leur point de concours.

Exemple 2.3 (Un problème de lieu)
Soit ABC un triangle de centre de gravité G et K le barycentre des points pondérés $(A, 2)$, $(B, 2)$ et $(C, -1)$. Déterminer l'ensemble des points M du plan qui vérifient :

1. $2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$;
2. $\|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$;
3. $\|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$.

Réponses :

1. D'après la propriété 2.12, pour tout M, on a $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = (2 + 2 - 1)\overrightarrow{MK}$ car K est le barycentre des points pondérés $(A, 2)$, $(B, 2)$ et $(C, -1)$.

   Ainsi, la condition proposée est équivalente à $3\overrightarrow{MK}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ ou encore à dire que $M = K$ ou $(MK)//(AB)$.
   Le lieu des points M est donc la parallèle à (AB) passant par K.

2. Transformons l'écriture de $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$:

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} &= 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) - \overrightarrow{MG} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{MG} - \overrightarrow{GC} \\ &= 2\overrightarrow{GA} - \left(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) \\ &= 2\overrightarrow{GA} - \left(-\overrightarrow{GA}\right) \text{ car } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \\ &= 3\overrightarrow{GA} \end{aligned}$$

   On obtient donc :

$$\begin{aligned} \|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| &\iff \|3\overrightarrow{MK}\| = \|3\overrightarrow{GA}\| \\ &\iff \|\overrightarrow{MK}\| = \|\overrightarrow{GA}\| \\ &\iff MK = GA \end{aligned}$$

   Ainsi, le lieu des points M est le cercle de centre K et de rayon AG.

1. Cette étape n'est pas indispensable mais elle permet d'obtenir des coefficients entiers.

3. On a :

$$\begin{aligned} ||2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|| = ||\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|| &\iff ||3\overrightarrow{MK}|| = ||3\overrightarrow{MG}|| \\ &\iff MK = MG \end{aligned}$$

   Le lieu des points M est donc la médiatrice du segment $[KG]$ (l'ensemble des points équidistants des extremités K et G).

Chapitre 3

Le second degré

3.1 Fonction polynôme

Définition 3.1
On appelle *fonction polynôme* ou plus simplement *polynôme* toute fonction f qui peut s'écrire sous la forme :

$$f : x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad \text{où pour } i = 0, 1, \ldots, n, \text{ on a } a_i \in \mathbf{R}$$

Remarque 3.1
Quelques points de vocabulaire :
- si n est le plus grand entier pour lequel $a_n \neq 0$, on dit que le *degré* du polynôme est n ;
- chaque a_i est appelé *coefficient* d'ordre i du polynôme ;
- les termes $a_i x^i$ sont appelés les *monômes* ;
- un polynôme formé de trois monômes est parfois appelé trinôme et plus généralement, si $a \neq 0$, le polynôme $ax^2 + bx + c$ est appelé trinôme du second degré (même si b ou c est nul).

Exemple 3.1
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = (x^2 + 2)(3x - 5)$. La fonction f est une fonction polynôme car en développant, on peut écrire :

$$f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 6x - 10$$

Ainsi f est un polynôme de degré 3. Le coefficient de f d'ordre 2 est -5.

Exemple 3.2
Les fonctions affines non constantes sont des polynômes de degré 1.
Les fonctions constantes sont des polynômes de degré 0.
La fonction constante nulle est aussi appelé polynôme nul.

Propriété 3.1 (admise)
Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et que leurs coefficients de même ordre sont deux à deux égaux.

Exemple 3.3
Pour tout réel x on a $2x^3 - 5x^2 + 4 = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Alors la propriété 3.1 nous permet d'affirmer que :
$a_3 = 2$, $a_2 = -5$, $a_1 = 0$ et $a_0 = 4$.

3.2 Polynôme de degré 2

3.2.1 Forme canonique

Propriété 3.2
Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré (donc $a \neq 0$). Il existe des réels α et β tels que :

$$ax^2 + bx + c = a(x + \alpha)^2 - \beta$$

L'écriture $a(x + \alpha)^2 - \beta$ est appelée *forme canonique* du trinôme.

Démonstration :

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x^2 + 2 \times x \times \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} - \frac{-4ac}{4a^2}\right) \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}
\end{aligned}$$

On a alors $\alpha = \frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Exemple 3.4
Déterminer la forme canonique du trinôme du second degré f défini par $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$, puis résoudre $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned}
2x^2 - 5x + 3 &= 2\left(x^2 - \frac{5}{2}x\right) + 3 \\
&= 2\left(x^2 - 2 \times x \times \frac{5}{4} + \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2\right) + 3 \\
&= 2\left(\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right) + 3 \\
&= 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{8} + \frac{24}{8} \\
&= 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Résolvons l'équation $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned}
f(x) = 0 &\iff 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} = 0 \\
&\iff \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0 \\
&\iff \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 0 \\
&\iff \left(x - \frac{5}{4} - \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{5}{4} + \frac{1}{4}\right) = 0 \\
&\iff \left(x - \frac{3}{2}\right)(x - 1) = 0 \\
&\iff x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = 1
\end{aligned}$$

$$\mathscr{S} = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$$

3.2.2 Représentation graphique

Soit f un polynôme du second degré défini par $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$). On a vu avec la propriété 3.2 qu'il existe deux réels α et β tels que $f(x) = a(x + \alpha)^2 - \beta$.
En notant $\mathscr{C}_a$ la courbe représentative de la fonction $x \mapsto ax^2$ (qui s'obtient facilement à partir de la courbe représentant la fonction carré), on a $\mathscr{C}_f = t_{\vec{u}}(\mathscr{C}_a)$; où $\vec{u} = -\alpha\vec{i} - \beta\vec{j}$.
Ainsi, la représentation graphique d'une fonction polynôme est une parabole tournée vers le haut si $a > 0$ et tournée vers le bas si $a < 0$.

Exemple 3.5
On reprend le polynôme f de l'exemple 3.4. En notant $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $x \mapsto 2x^2$.
On a alors $\mathscr{C}_f = t(\mathscr{C})$ où $\vec{u} = \frac{5}{4}\vec{i} - \frac{1}{8}\vec{j}$.

3.3 Équation de degré 2

Définition 3.2
Un équation du second degré est une équation pouvant s'écrire sous la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ avec } a \neq 0$$

On appelle *discriminant* d'une telle équation le réel noté $\Delta = b^2 - 4ac$.

Remarque 3.2 (Vocabulaire)
Si P est un polynôme du second degré, alors l'équation $P(x) = 0$ est une équation du second degré. Les solutions de cette équation sont appelées les *racines* du polynôme P.

Théorème 3.1
Soit $ax^2 + bx + c = 0$ (où $a \neq 0$) une équation du second degré. On note Δ son discriminant.
On a trois cas possibles :
– si $\Delta < 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution ;
– si $\Delta = 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
– si $\Delta > 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Démonstration :
D'après la propriété 3.2 et sa démonstration, on sait qu'il existe α et β réels tels que :

$$ax^2 + bx + c = a(x + \alpha)^2 - \beta \text{ avec } \alpha = \frac{b}{2a} \text{ et } \beta = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Ainsi, en posant $\Delta = b^2 - 4ac$ on a :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\iff a\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{\Delta}{4a} = 0 \\ &\iff \left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{\Delta}{4a^2} = 0 \end{aligned}$$

En remarquant que $4a^2 > 0$ (car $a \neq 0$), on a alors trois cas possibles :

- si $\Delta < 0$ alors $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ et l'expression $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ est donc la somme d'un carré et d'un réel strictement positif ; elle ne peut donc pas être nulle : l'équation n'a pas de solution ;
- si $\Delta = 0$, alors l'équation de départ est équivalente à $(x+\frac{b}{2a})^2 = 0$ qui a une unique solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$;
- si $\Delta > 0$ alors $\sqrt{\Delta}$ existe et on a :

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c=0 &\iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)2 = 0 \\ &\iff \left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0 \\ &\iff \left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0 \end{aligned}$$

  Ainsi, l'équation a alors deux solutions $x_1 = -\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = -\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exemple 3.6
Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $x^2+x-1=0$.
On calcule le discriminant : $\Delta = 1^2 - 4\times 1\times(-1) = 5 > 0$.
L'équations a donc deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2\times 1} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

On a donc : $\mathscr{S} = \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$. La solution x_2 est appelée nombre d'or et souvent noté Φ.

Exemple 3.7
Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x+1}{2x^2-3x-2}$.
La fonction f est une fonction rationnelle ; elle est donc définie pour tous les x qui n'annulent pas le dénominateur. Les valeurs interdites sont donc les solutions de l'équation $2x^2-3x-2=0$.
Calculons le discriminant de cette équation du second degré : $\Delta = (-3)^2 - 4\times2\times(-2) = 25 > 0$.
L'équation a donc deux solutions : $x_1 = \frac{-(-3)+\sqrt{25}}{2\times2} = 2$ et $x_2 = \frac{-(-3)-\sqrt{25}}{2\times2} - \frac{1}{2}$.
L'ensemble de définition de f est donc $\mathbf{R}\backslash\{-\frac{1}{2}; 2\}$.

Remarque 3.3
Soit $ax^2+bx+c=0$ une équation du second degré ($a \neq 0$).
Si a et c sont de de signes contraires, alors $ac \leq 0$ et donc $-4ac \geq 0$. Dans ce cas, $\Delta \geq 0$.

Remarque 3.4
Il est parfois utile de chercher des solutions « évidentes » : par exemple si $a+b+c=0$ alors $x=1$ est une solution évidente car $a\times 1^2 + b\times 1 + c = a+b+c = 0$.
L'autre solution est alors $\frac{c}{a}$.

3.4 Signe d'un trinôme de degré 2

3.4.1 Factorisation d'un trinôme du second degré

Théorème 3.2 (admis)
Soit ax^2+bx+c un trinôme du second degré ($a \neq 0$) et Δ son discriminant. On a alors trois cas possibles :

– si $\Delta < 0$ alors $ax^2 + bx + c$ n'est pas factorisable ;
– si $\Delta = 0$ alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$ où $x_0 = -\frac{b}{2a}$;
– si $\Delta > 0$ alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ où $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exemple 3.8
Factoriser le trinôme $3x^2 - 5x - 2$.
On calcule $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 49 > 0$; donc le trinôme a deux racines :
$\alpha = \frac{-(-5)-\sqrt{49}}{2\times3} = -\frac{1}{3}$ et $\beta = \frac{-(-5)+\sqrt{49}}{2\times3} = 2$.
On a alors : $3x^2 - 5x - 2 = 3(x + \frac{1}{3})(x - 2)$.

3.4.2 Signe d'un trinôme du second degré

Théorème 3.3
Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

si $\Delta < 0$**,** alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $ax^2 + bx + c$ est du signe de a.

si $\Delta = 0$**,** alors pour tout $x \neq -\frac{b}{2a}$, $ax^2 + bx + c$ est du signe de a.

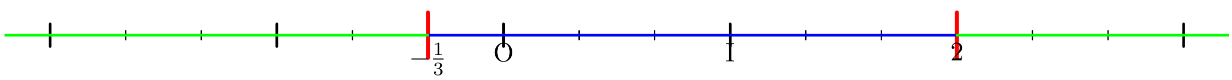
si $\Delta > 0$**,** alors $ax^2 + bx + c$
  – est du signe de a pour x « à l'extérieur des racines » de $ax^2 + bx + c$,
  – est du signe contraire de a « à l'intérieur des racines » de $ax^2 + bx + c$.

Démonstration :
Si $\Delta < 0$, on a $ax^2 + bx + c = a\left((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$ (D'après la dém de la prop 3.2.) La parenthèse est donc strictement positive pour tout $x \in \mathbf{R}$, donc $ax^2 + bx + c$ est du signe de a.
On utilise une démonstration analogue pour le cas où $\Delta = 0$.
Enfin, si $\Delta > 0$, on utilise un tableau de signes pour obtenir le résultat annoncé.

Exemple 3.9
On considère le trinôme $6x^2 - 10x - 4$. $\Delta = 10^2 - 4 \times 6 \times (-4) = 196$. Les racines du trinôme sont :

$$x_1 = \frac{10 - \sqrt{196}}{2 \times 6} = -\frac{1}{3} \text{ et } x_2 = \frac{10 + \sqrt{196}}{2 \times 6} = 2$$

Représentons sur un axe gradué « l'intérieur » et « l'extérieur » des racines :



En vert : « l'extérieur » des racines, et en bleu « l'intérieur » des racines.

– Pour $x \in \left]-\frac{1}{3}; 2\right[$ (x à l'intérieur des racines), $6x^2 - 10x - 4$ est du signe contraire de 6 soit $6x^2 - 10x - 4 < 0$
– Pour $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[\cup]2; +\infty[$ (x à l'extérieur des racines), $6x^2 - 10x - 4$ est du signe de 6 soit $6x^2 - 10x - 4 > 0$

On regroupe ces résultats dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$6x^2 - 10x - 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Un trinôme : quatre inéquations possibles

– La solution de l'inéquation $6x^2 - 10x - 4 > 0$ est : $\mathscr{S} =]-\infty\,;\,-\frac{1}{3}[\cup]2\,;\,+\infty[$.
– La solution de l'inéquation $6x^2 - 10x - 4 \geq 0$ est : $\mathscr{S} =]-\infty\,;\,-\frac{1}{3}] \cup [2\,;\,+\infty[$.
– La solution de l'inéquation $6x^2 - 10x - 4 < 0$ est : $\mathscr{S} =]-\frac{1}{3}\,;2\,[$.
– La solution de l'inéquation $6x^2 - 10x - 4 \leq 0$ est : $\mathscr{S} = [-\frac{1}{3}\,;\,2]$.

3.5 Récapitulons. . .

3.5.1 Représentation graphique d'un trinôme

Soit $\mathscr{P}$ une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ dans un repère orthogonal. On ne connait pas la position précise de $\mathscr{P}$ dans le repère, mais on peut étudier sa position par rapport à l'axe des abscisses ; en effet :

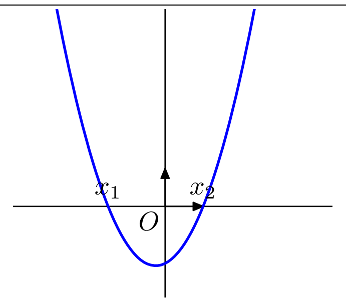
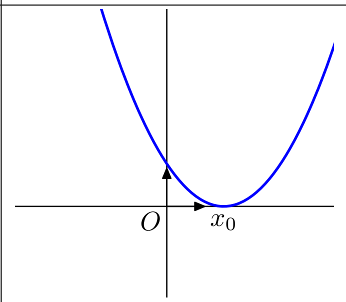
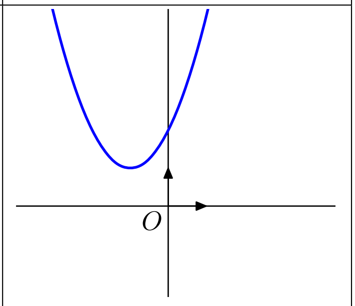
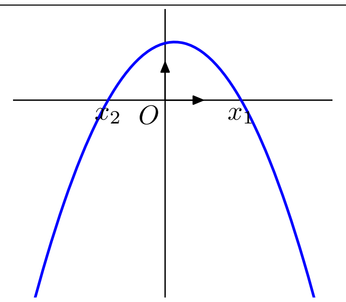
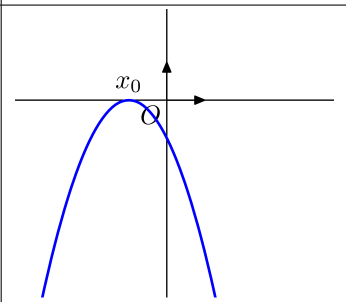
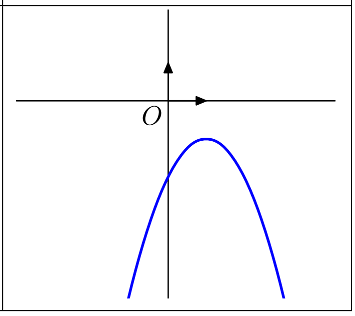
si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions donc $\mathscr{P}$ coupe l'axe des abscisses en deux points ;

si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution : on dit que $\mathscr{P}$ est *tangente* à l'axe des abscisses ;

si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution donc $\mathscr{P}$ ne rencontre pas l'axe des abscisses.

De plus, on montre facilement à l'aide du produit d'une fonction par un réel que si $a > 0$, la parabole est « tournée » vers le haut, et si $a < 0$, la parabole est « tournée » vers le bas.
Enfin, en utilisant l'écriture canonique du trinôme $ax^2 + bx + c = a(x + \alpha)^2 - \beta$, on obtient les coordonnées du sommet S de la parabole : $S(-\alpha; -\beta)$. (On avait trouvé $\alpha = \frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{b^2-4ac}{4a}$.)

On regroupe les résultats dans le tableau suivant en notant :
– $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$.
– $\Delta = b^2 - 4ac$ avec $x_0 = -\frac{b}{2a}$ si $\Delta = 0$ et $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ si $\Delta > 0$.

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

3.5.2 Programmons. . .

Voici le programme permettant à votre calculatrice de vous donner le discriminant et les éventuelles racines d'un polynôme du second degré s'écrivant sous la forme $Ax^2 + Bx + C$:

Programme pour une casio :

```
"CALCUL DISCRIMINANT :"
"AX² + BX + C"
"A" ?→A
"B" ?→B
"C" ?→C
"DELTA=" :B² − 4 × A × C → D◢
D=0⇒Goto 1
D<0⇒Goto 2
D>0⇒Goto 3
Lbl 1
"UNE SOLUTION"
−B/(2 × A)◢
Stop
Lbl 2
"AUCUNE SOLUTION"
Stop
Lbl 3
"2 SOLUTIONS"
"X1=" :(−B − √D)/(2 × A)◢
"X2=" :(−B + √D)/(2 × A)◢
Stop
```

Programme pour une TI :

```
PROGRAM :DEGRE2
Disp "CALCUL DISCRIMINANT :"
Disp "AX² + BX + C"
Prompt A,B,C
ClrHome
B² − 4 × A × C → D
Disp "DISCRIMINANT",D
If abs(D)=0
Then
Disp "1 SOLUTION",−B/(2 × A)◢
Else
If D > 0
Then
Disp "2 SOLUTIONS"
Disp (−B − √(D))/(2 × A)◢
Disp (−B + √(D))/(2 × A)◢
Else
Disp "AUCUNE SOLUTION"
End
End
```

« *He who cans, does. He who cannot, teaches.* »
G.B. Shaw

Chapitre 4

Trigonométrie et repérage

Lorsque qu'on cherche une rue sur un plan de ville, on *repère* le rectangle où se trouve cette rue grâce à une lettre qui définit une colonne et un nombre qui définit une ligne du quadrillage sur le plan. Les marins ou les géographes *repèrent* un point sur la Terre grâce à sa longitude et sa latitude. Les astronomes ont besoin, eux, de trois mesures pour *repérer* un objet spatial, par exemple deux angles définissant une direction et une distance caractérisant l'éloignement de l'objet sur la direction.
Le *repérage* est donc indispensable dès lors qu'on cherche à définir la position d'un objet dans un espace. Les repères que nous avons utilisé jusqu'à présent sont dit *cartésiens*, adjectif créé en hommage à Descartes (1596 - 1650) mathématicien et philosophe français qui inventa en même temps que Fermat (1601 - 1665) mais indépendamment de lui, le système de coordonnées que nous utilisons couramment. Les repères cartésiens utilisés jusqu'à présent permettent de positionner des points dans un plan. Ils peuvent être complétés par une troisième coordonnée permettant de se repérer dans l'espace à trois dimensions [1]. Ces repères ne sont pourtant pas les seuls permettant de positionner des objets, nous allons découvrir dans ce chapitre comment se repérer sur un plan avec un angle et un rayon : grâce aux *coordonnées polaires*.

4.1 Trigonométrie

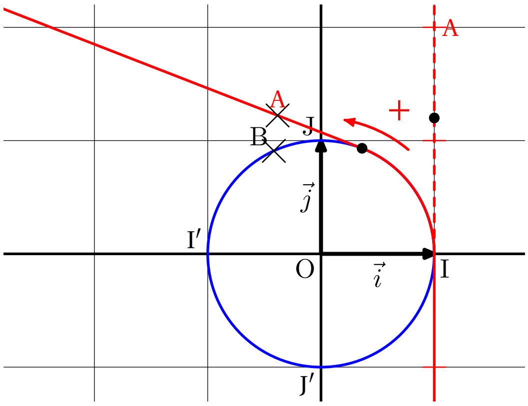
4.1.1 Enroulement de R sur le cercle trigonométrique

Définition 4.1
Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, le cercle de centre O et de rayon 1 est appelé *cercle trigonométrique*.
Sur ce cercle, le *sens direct* est contraire au sens de rotation des aiguilles d'une montre et le *sens indirect* est le sens de rotation des aiguilles d'une montre.

Sur la figure ci-après, on a tracé le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ ainsi qu'une droite graduée d d'origine I, parallèle à $(O;\vec{j})$ et de même unité que le repère.
La droite d représente l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels : à chaque réel x correspond le point de d qui a pour abscisse x sur la droite d. En « enroulant » cette droite d autour du cercle trigonométrique, à chaque point de d va correspondre un unique point de $\mathscr{C}$.
On dit que le point de $\mathscr{C}$ qui correspond au réel x est l'image de x sur le cercle trigonométrique.

1. Et même par plus de coordonnées si on travaille, et c'est courant en mathématiques, dans des espaces ayant plus de trois dimensions.

Ainsi le point A d'abscisse 2 sur la droite d se retrouve sur le point B du cercle $\mathscr{C}$; 2 est alors une mesure de l'arc orienté IB et B est l'image du réel 2 sur le cercle trigonométrique.



On peut remarquer que A' d'abscisse $2+2\pi$ sur d se retrouve aussi en B après l'enroulement de d sur le cercle[2].

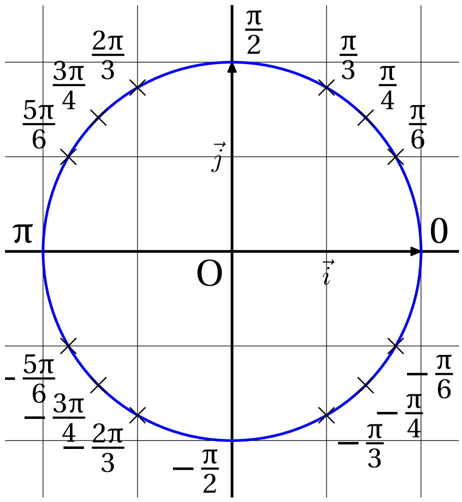
Définition 4.2
Le *radian* est une unité de mesure des angles. On note cette unité rad.
Un angle de centre O a pour mesure 1 rad s'il intercepte sur le cercle trigonométrique un arc de mesure 1.

Remarque 4.1
Les mesures d'un angle en degrés et en radians sont proportionnelles. On donne dans le tableau ci-dessous quelques correspondances :

mesure en degrés	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°	≈ 57°
mesure en radians	0 rad	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\pi}{2}$ rad	π rad	2π rad	1 rad

Remarque 4.2
On a vu que plusieurs points de la droite d qu'on enroule autour du cercle trigonométrique peuvent se retrouver sur le même point de ce cercle. Ainsi, un point du cercle trigonométrique peut être associé à plusieurs mesures d'angles différant d'un multiple de 2π.
On appelle *mesure principale* d'un angle exprimée en radians la mesure de cet angle qui est comprise dans l'intervalle $]-\pi\,;+\pi]$.

Ci-contre, quelques mesures principales d'angles (en radians) sur le cercle trigonométrique :



Exemple 4.1
Le point A correspond sur le cercle trigonométrique au réel $x=\frac{7\pi}{4}$. En plaçant A, on peut facilement trouver la mesure principale de l'angle correspondant : il s'agit de $-\frac{\pi}{4}$.
On remarque que $\frac{7\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2\pi$.

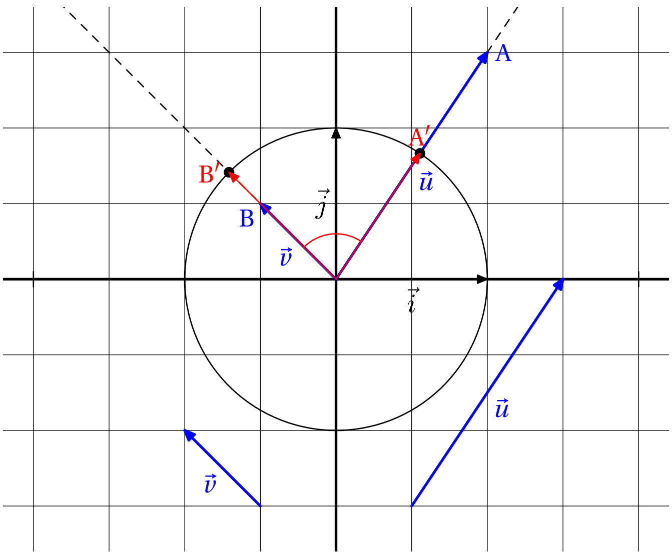
2. Mais après avoir effectué un tour complet du cercle...

4.1.2 Angle de vecteurs non-nuls

Définition 4.3
Soit x et y deux réels quelconques. Soit M et N les images respectives de x et y sur le cercle trigonométrique du repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. *Les mesures* en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON})$ sont les réels $y-x+2k\pi$ où $k\in\mathbf{Z}$.
On note $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}) = y-x+2k\pi$, où $k\in\mathbf{Z}$.

Propriété 4.1
Soit M et N deux points du cercle trigonométrique du repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Il existe une unique mesure en radian α de l'angle $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON})$ appartenant à l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.
Cette mesure α est appelée *mesure principale* de l'angle orienté $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON})$.
On a alors $\widehat{MON} = |\alpha|$.

Définition 4.4
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Soit A et B les points du plan tels que $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$.
On note respectivement A' et B' les intersections des demi-droites $[OA)$ et $[OB)$ avec le cercle trigonométrique du repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Les mesures en radians de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$ sont alors les mesures en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB'})$.

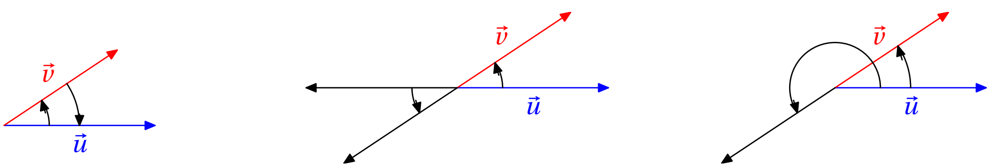


Propriété 4.2 (Relation de Chasles (admise))
Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls. On a :

$$(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u},\vec{w})+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$$

Propriété 4.3 (Conséquences)
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On a :

$$(\vec{v},\vec{u}) = -(\vec{u},\vec{v});\qquad (-\vec{u},-\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v});\qquad (\vec{u},-\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v})+\pi$$



Ces égalités sont vraies

à un multiple de 2π près, on dit « à $2k\pi$-près ».

4.1.3 Lignes trigonométriques

Une *ligne trigonométrique* est une expression désignant une des fonctions trigonométriques étudiées en classe de seconde : cosinus, sinus et tangente. Cette expression vient du fait que cosinus, sinus et tangente d'un réel sont les longueurs de segments (de lignes) sur une figure.

Définition 4.5
Soit x un réel et M son image sur le cercle trigonométrique du repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Le cosinus de x est le réel noté $\cos(x)$ égal à l'abscisse de M. Le sinus de x est le réel noté $\sin(x)$ égal à l'ordonnée de M.

Propriété 4.4 (déjà vue en seconde)
Pour tout réel x et tout entier relatif k on a :

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \qquad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \qquad \sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$$
$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \qquad \cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$$

On a vu que si x est un réel et k un entier relatif, les images de x et $x + 2k\pi$ sur le cercle trigonométrique sont confondues. On a alors la définition suivante :

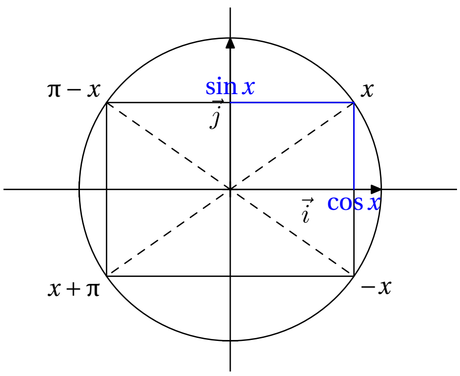
Définition 4.6
Le cosinus (resp. sinus) d'un angle orienté est le cosinus (resp. le sinus) d'une mesure en radians de cet angle orienté.

Propriété 4.5 (Angles associés)
Soit x un réel. On a :

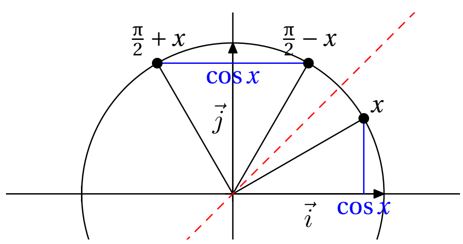
$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \cos(\pi - x) = -\cos(x) \qquad \cos(x+\pi) = -\cos(x)$$
$$\sin(-x) = -\sin(x) \qquad \sin(\pi - x) = \sin(x) \qquad \sin(x+\pi) = -\sin(x)$$
$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$
$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

Idée de la démonstration :

Les images des réels x, $\pi - x$, $\pi + x$ et $-x$ sur le cercle trigonométrique sont les sommets d'un rectangle de centre O et dont les axes de symétrie sont les axes du repère :



Les images des réels x et $\frac{\pi}{2} - x$ sur le cercle trigonométrique sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. Les images sur le cercle trigonométrique des réels $\frac{\pi}{2} - x$ et $\frac{\pi}{2} + x$ sont symétriques par rapport à $(O;\vec{j})$:

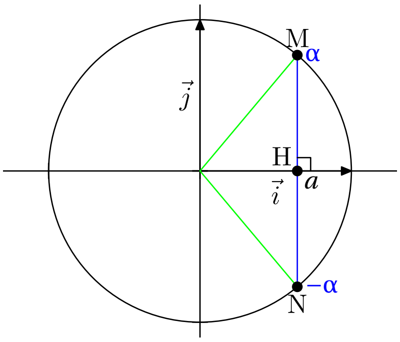


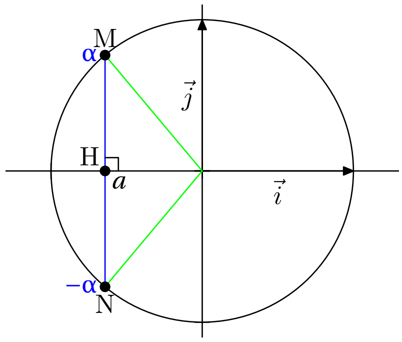
4.1.4 Équations

4.1.4.1 Résolution de l'équation $\cos x = a$

Distinguons plusieurs cas :

- si $|a| > 1$, l'équation n'a pas de solution car pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\cos x \leq 1$;
- si $|a| < 1$, la perpendiculaire à $(O;\vec{i})$ passant par $H(a;0)$ coupe le cercle trigonométrique en deux points ; il existe donc deux points du cercle trigonométrique ayant pour abscisse a : les points M et N images des réels α et $-\alpha$ où $\alpha \in]0\,;\,\pi[$. L'équation $\cos x = a$ a donc deux solutions dans $]-\pi\,;\,\pi]$ et les solutions dans $\mathbf{R}$ sont les réels s'écrivant sous la forme $\alpha + 2k\pi$ et $-\alpha + 2k\pi$ où $k \in \mathbf{Z}$;



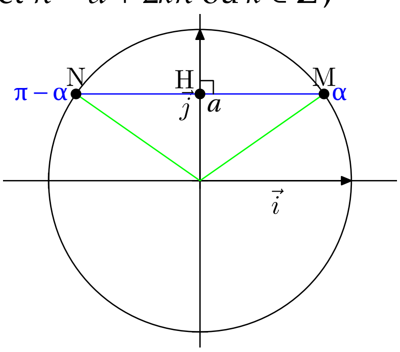


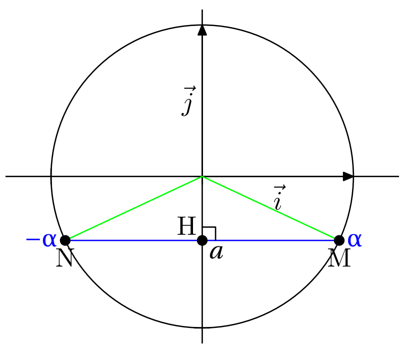
- si $a = 1$, les points M et N définis précédemment sont confondus et ont pour abscisse 1. L'équation $\cos x = a$ admet une unique solution dans $]-\pi\,;\,\pi]$: $x = 0$. Dans $\mathbf{R}$ les solutions sont les réels s'écrivant $2k\pi$ où $k \in \mathbf{Z}$;
- si $a = -1$, les points M et N définis précédemment sont confondus et ont pour abscisse -1. L'équation $\cos x = a$ admet une unique solution dans $]-\pi\,;\,\pi]$: $x = \pi$. Dans $\mathbf{R}$ les solutions sont les réels s'écrivant $\pi + 2k\pi$ où $k \in \mathbf{Z}$.

4.1.4.2 Résolution de l'équation $\sin x = a$

Distinguons plusieurs cas :

- si $|a| > 1$, l'équation n'a pas de solution car pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\sin x \leq 1$;
- si $|a| < 1$, la perpendiculaire à $(O;\vec{j})$ passant par $H(0;a)$ coupe le cercle trigonométrique en deux points ; il existe donc deux points du cercle trigonométrique ayant pour ordonnée a : les points M et N images des réels α et $\pi - \alpha$ où $\alpha \in]-\pi\,;\,\pi]$. L'équation $\sin x = a$ a donc deux solutions dans $]-\pi\,;\,\pi]$ [3] et les solutions dans $\mathbf{R}$ sont les réels s'écrivant sous la forme $\alpha + 2k\pi$ et $\pi - \alpha + 2k\pi$ où $k \in \mathbf{Z}$;





- si $a = 1$, les points M et N définis précédemment sont confondus et ont pour ordonnée 1. L'équation $\sin x = a$ admet une unique solution dans $]-\pi\,;\,\pi]$: $x = \frac{\pi}{2}$. Dans $\mathbf{R}$ les solutions

3. Attention : une solution est α, l'autre est la mesure principale de $\pi - \alpha$ qui peut éventuellement être différente de $\pi - \alpha$.

sont les réels s'écrivant $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbf{Z}$;
- si $a = -1$, les points M et N définis précédemment sont confondus et ont pour ordonnée -1. L'équation $\sin x = a$ admet une unique solution dans $]-\pi\,;\,\pi]$: $x = -\frac{\pi}{2}$. Dans $\mathbf{R}$ les solutions sont les réels s'écrivant $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbf{Z}$.

Propriété 4.6 (Synthèse)
Soit x et y deux réels quelconques :
- l'égalité $\cos x = \cos y$ équivant à $x = \pm y + 2k\pi$;
- l'égalité $\sin x = \sin y$ équivaut à $x = y + 2k\pi$ ou $x = \pi - y + 2k\pi$.

Exemple 4.2
On considère l'équation (E) : $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{3})$.

1. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation (E).
2. Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi]$ l'équation (E).

1. En utilisant la propriété 4.5, on remarque que $\cos(\frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3})$.
   L'équation (E) est donc équivalente à $\sin(x) = \sin(\frac{\pi}{6})$. Les solutions sont donc :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. , k \in \mathbf{Z}$$

2. Parmi les solutions précédentes, cherchons celles qui sont dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.
   On obtient deux solutions : $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.

4.2 Repérages du plan

4.2.1 Repérage cartésien

Définition 4.7
Un repère cartésien du plan est constitué d'un point O appelé origine du repère et de deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ non colinéaires. On le note $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Les coordonnées d'un point M du plan sont l'unique couple $(x; y)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
Les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ du plan sont l'unique couple $(x; y)$ tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

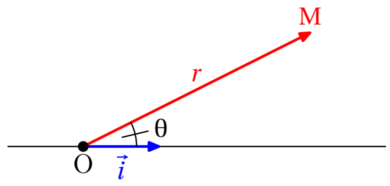
Remarque 4.3
Les droites $(O; \vec{i})$ et $(O; \vec{j})$ sont appelées les axes du repère. Si les axes sont perpendiculaires, on dit que le repère est orthogonal et si de plus les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont de même norme, on dit que le repère est orthonormal ou orthonormé.

Propriété 4.7
Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points et leurs coordonnées dans un repère.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.
Si le repère est orthonormé, on a $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

4.2.2 Repérage polaire

Pour se repérer dans le plan avec des coordonnées polaires, on a besoin d'un point origine O et d'un vecteur unitaire $\vec{i}$. Ce couple $(O;\vec{i})$ est appelé *repère polaire* du plan. O est le *pôle* et la demi-droite $[O;\vec{i})$ l'*axe polaire*.

Définition 4.8
Soit M un point du plan distinct de O. Un couple [1] de coordonnées polaires du point M est un couple $(r;\theta)$ où $r = OM \in \mathbf{R}_+$ et $\theta \in \mathbf{R}$ une mesure de l'angle orienté $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$. Ces coordonnées polaires sont relatives au *repère polaire* $(O;\vec{i})$



Remarque 4.4
Le repérage polaire consiste donc à donner un « cap » : l'angle formé avec le vecteur $\vec{i}$ et une distance appelée aussi rayon.

Remarque 4.5
Les coordonnées polaires d'un point du plan ne sont pas uniques : les coordonnées polaires $(2;\frac{\pi}{4})$ et $(2;\frac{9\pi}{4})$ sont celles d'un unique et même point du plan.
En imposant à θ une valeur dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ les coordonnées polaires sont alors uniques [4].

Remarque 4.6
Le repérage en coordonnées polaires permet de donner l'équation de certaines lignes très facilement. Par exemple l'équation $r = 3$ caractérise le cercle de centre O et de rayon 3.
Par contre l'équation caractérisant une parabole ou une droite quelconque est beaucoup plus difficile à écrire...

4.2.3 Changements de type de repérage

Soit M un point du plan. On note $(x;y)$ ses coordonnées cartésiennes et $(r;\theta)$ ses coordonnées polaires.
Passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires :
On a vu que dans le repérage polaire r est la distance OM, ainsi on a $r = \sqrt{x^2+y^2}$.
θ est alors une mesure de l'angle tel que $\cos\theta = \frac{x}{r}$ et $\sin\theta = \frac{y}{r}$.

Passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes :
Les propriétés du cosinus et du sinus nous permettent d'obtenir : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

Exemple 4.3
Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormal du plan. Soit $A(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2})$ et $B(-5;5)$ dans ce repère. Soit $C(2;\frac{2\pi}{3})$ dans le repère polaire $(O;\vec{i})$.

1. Déterminer les coordonnées polaires de A et B dans le repère polaire $(O;\vec{i})$.

1. Attention : il n'est pas unique !
4. C'est aussi le cas si on impose à θ d'être dans un intervalle du type $]\alpha\,;\,\alpha+2\pi]$, où α est un réel quelconque.

2. Déterminer les coordonnées cartésiennes de C dans $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Chapitre 5

Dérivation

La notion de nombre dérivé, puis de fonction dérivée sont nées au XVIIe siècle (presque) simultanément chez deux scientifiques LEIBNIZ (1646-1716) et NEWTON (1642-1727) à partir de deux problèmes très différents.
On a vu dans le chapitre 1 que LEIBNIZ avait le premier parlé de fonction numérique. Il s'est aussi intéressé aux courbes représentatives de ces fonctions et en particulier aux droites joignant deux points d'une telle courbe. Les points $A(a; f(a))$ et $M(a+h; f(a+h))$ sont sur la courbe représentative d'une fonction f. Le coefficient directeur de la droite (AM) est $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Qu'advient-il de ce coefficient directeur lorsque les deux points A et M sont très proches l'un de l'autre, « infiniment proches » ?
NEWTON s'est intéressé aux mouvements et en particulier aux vitesses d'objets en déplacement : à un instant t, un objet a parcouru une distance d_1, à l'instant $t+h$ ($h > 0$), il a parcouru la distance d_2. Sa vitesse moyenne entre les instants t et $t+h$ est donc $V_m = \frac{d_2-d_1}{h}$. Que devient cette vitesse lorsque les instants t et $t+h$ sont très proches, « infiniment » proches ?
Dans les deux cas, on est amené à travailler sur des nombres « infiniment proches » et donc à devoir calculer des quotients de nombres « infiniment proches de 0 ». Pour cela, nous allons définir [1] la notion de *limite* qui a posé de nombreux soucis aux mathématiciens d'avant NEWTON et LEIBNIZ (Voir par exemple les paradoxes de ZÉNON D'ALEXANDRIE).

5.1 Taux de variation

Dans cette partie, f est une fonction numérique définie sur un intervalle I, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère. a et x sont deux réels distincts dans l'intervalle I privé de ses bornes. On note h le réel non nul tel que $x = a + h$.

5.1.1 Taux de variation

Définition 5.1
Le *taux de variation* de la fonction f entre a et x est le quotient :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

1. Dans un premier temps de manière « intuitive » ...

Exemple 5.1
Pour f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2$, le taux de variation de f entre a et $a + h$ est :

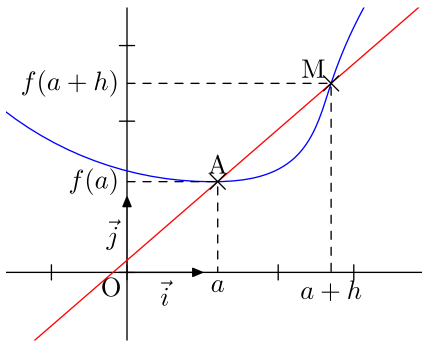
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = 2a + h$$

Exemple 5.2
Pour f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 4$, calculer le taux de variation de f entre a et $a + h$.

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 2a - 2h + 4 - (a^2 - 2a + 4)}{h} = \frac{2ah + h^2 - 2h}{h} = 2a - 2 + h$$

5.1.2 Interprétation graphique

On note A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a, et M celui d'abscisse x.
Le taux de variation de la fonction f entre a et x, $\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$ est le coefficient directeur de la droite (AM).



5.2 Nombre dérivé

f est une fonction numérique définie sur un intervalle I, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère. a et x sont deux réels distincts dans l'intervalle I privé de ses bornes. On note h le réel non nul tel que $x = a + h$.

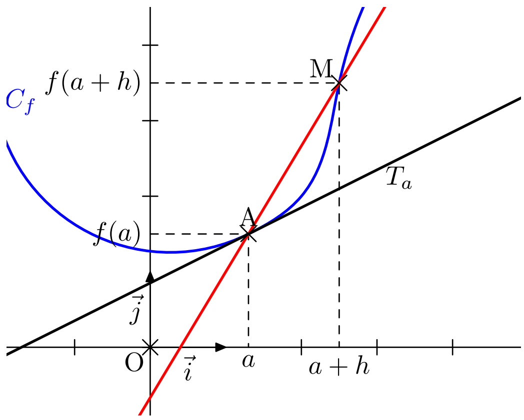
5.2.1 Nombre dérivé

Définition 5.2
Lorsque h se rapproche de plus en plus de 0 (soit quand x se rapproche de a), si le taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ devient de plus en plus proche d'un nombre réel l fixe, on dit que la limite lorsque h tend vers 0 de ce taux de variation vaut l. Dans ce cas on dit que f est *dérivable* en a et cette limite est appelée *nombre dérivé* de f en a. On note :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$$

5.2.2 Interprétation graphique

Lorsque h se rapproche de 0, le point M se rapproche de A, et la droite (AM) se rapproche d'une « position limite » appelée *tangente* à $\mathscr{C}$ au point A ; son coefficient directeur est alors $f'(a)$.



Propriété 5.1
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et dérivable en $a \in I$. La tangente T_a à la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour équation :

$$T_a : y = f'(a)\,(x-a) + f(a)$$

5.2.3 Interprétation cinématique

On considère un objet en mouvement. On note t la durée en secondes de son parcours, et $y(t)$ la distance en mètres, parcourue après t secondes.

Le taux de variation de y entre deux instants t_1 et t_2 : $\frac{y(t_2)-y(t_1)}{t_2-t_1}$ est la vitesse moyenne de l'objet entre les instants t_1 et t_2.

Définition 5.3
Dans les conditions précédentes, la limite quand t_2 se rapproche de t_1 du taux de variation (c'est à dire le nombre dérivé de y en t_1) est appelée *vitesse instantanée* de l'objet à l'instant t_1.

$$V(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{y(t_2)-y(t_1)}{t_2-t_1} = \lim_{h \to 0} \frac{y(t_1+h)-y(t_1)}{h}$$

Exemple 5.3
On lache un objet en chute libre. On note $x(t)$ la distance parcourue (en m) après t secondes. On admet que la distance parcourue s'exprime en fonction du temps de parcours par $x(t) = 4{,}9x^2$.
Calculer la vitesse instantanée de l'objet après une chute de t secondes.
On exprime le taux de variation de x entre les instants t et $t+h$:

$$v = \frac{x(t+h)-x(t)}{h} = \frac{4{,}9(t+h)^2 - 4{,}9t^2}{h}$$

En développant, réduisant et simplifiant, on obtient :

$$v = \frac{4{,}9(t^2+2th+h^2) - 4{,}9t^2}{h} = \frac{9,8th + 4{,}9h^2}{h} = 9,8t + 4{,}9h$$

Lorsque h tend vers 0, ce taux de variation se rapproche de $9{,}8t$: $\lim\limits_{h\to 0}(9{,}8t + 4{,}9t) = 9,8t$.
Donc la vitesse instantanée de l'objet en chute libre est donnée par l'expression $v(t) = x'(t) = 9{,}8t$.
Après 5 secondes de chute libre, la vitesse est de $9{,}8 \times 5 = 49$ m/s. (soit 179,4 km/h).

5.3 Fonction dérivée

5.3.1 Fonction dérivée

Soit f une fonction définie et dérivable en tout a d'un intervalle I. On a vu que pour $a \in I$, $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et on l'a appelée « nombre dérivé de f en a » et noté $f'(a)$.

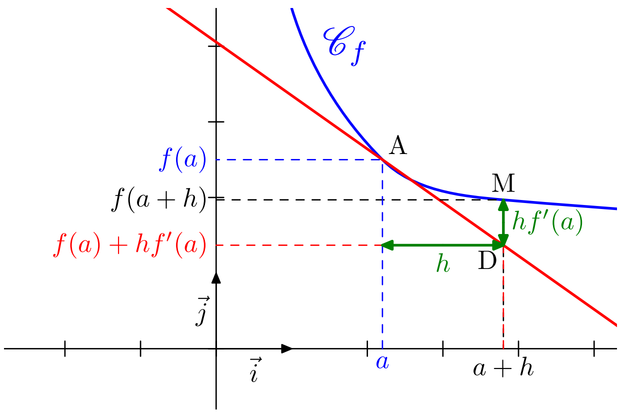
Définition 5.4
Soit f une fonction dérivable en tout x d'un intervalle I, alors la fonction qui à x associe $f'(x)$ est appelée *fonction dérivée* de f sur I. On la note f'.

5.3.2 Approximation affine

On a vu que si f est une fonction dérivable en a alors au point $A(a; f(a))$, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente T_a. On pourrait montrer[2] que la tangente est la droite passant par A qui s'approche le plus de $\mathscr{C}_f$ « au voisinage » du point A.
La tangente T_a est la droite d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. Elle est aussi la représentation graphique d'une fonction affine $x \mapsto f'(a)(x-a) + f(a)$. Cette fonction est appelée *meilleure approximation affine de f au voisinage de a.*
Depuis le début du chapitre (voir partie 5.1, page 41), on note h le réel tel que $x = a + h$; avec cette notation on peut écrire que la fonction $h \mapsto f'(a)\times h + f(a)$ est la meilleure approximation affine de la fonction $h \mapsto f(a+h)$ au voisinage de 0. Ceci s'écrit :

si f est dérivable en a alors $f(a+h) \approx f'(a)\times h + f(a)$ lorsque $h \approx 0$

Lorsqu'on calcule par une approximation on commet une erreur[3]. Il est intéressant de connaitre un ordre de grandeur[4] de l'erreur commise.



Dans le cas qui nous intéresse, l'erreur commise en remplaçant $f(a+h)$ par $f'(a)\times h + f(a)$ est :

$$\begin{aligned} DM &= \left|f(a+h) - (f'(a)\times h + f(a))\right| \\ &= \left|h \times \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)\times h\right| \\ &= |h\times \epsilon(h)| \end{aligned}$$

2. Rassurez-vous, l'emploi du conditionnel vous indique qu'on ne le fera pas ici. . ..
3. Erreur qu'on commet volontairement, pour se simplifier les calculs, car on n'a pas toutes les informations nécessaires pour effectuer un calcul exact, . . .
4. Nous aurons l'occasion lors d'une séance de module ultérieure de préciser la notion d'ordre de grandeur.

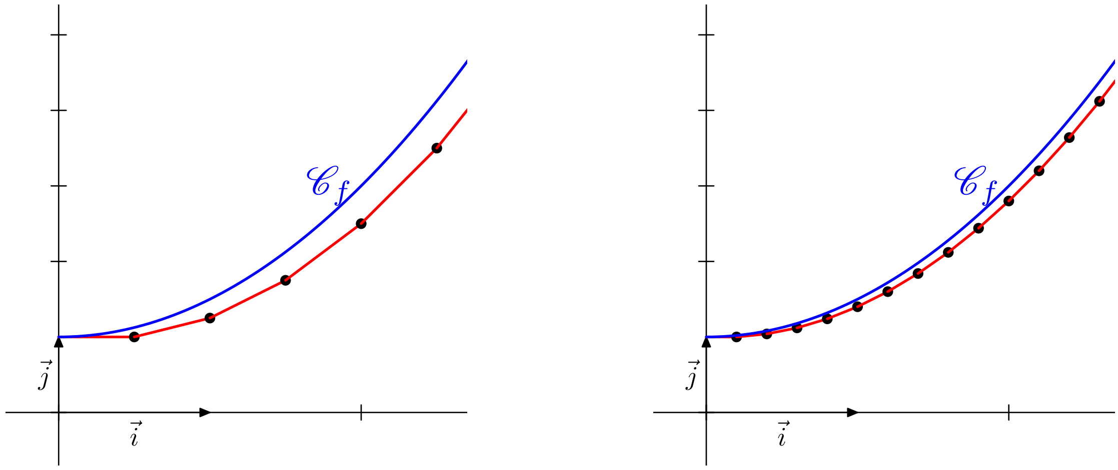
où $\epsilon(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)$.
Or si h tend vers 0 alors $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers $f'(a)$ donc $\epsilon(h)$ tend vers 0.
Donc, lorsque h est proche de 0, $|\epsilon(h)|$ est aussi proche de 0 et donc l'ordre de grandeur de $|h| \times |\epsilon(h)|$ est inférieur à celui de $|h|$.

5.3.3 Méthode d'Euler [5]

Soit f une fonction numérique dont on ne connait que la dérivée f' et un point de la courbe représentative. Pour tracer une courbe approchée de $\mathscr{C}_f$, nous allons effectuer plusieurs approximations affines successives.
Soit $A(a; f(a))$ le point connu de $\mathscr{C}_f$; la meilleure approximation affine de f au voisinage de a est $f(a+h) \approx f'(a) \times h + f(a)$ lorsque $h \approx 0$.
On se fixe une valeur de h « proche » de 0 : on a alors $y_1 = f'(a) \times h + f(a)$ qui est proche de $f(a+h)$; donc le point $M_1(a+h; y_1)$ est proche du point A_1 de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $a+h$.
En considérant que $f(a+h) \approx y_1$, on peut réitérer le procédé et donner la meilleure approximation affine de $f(a+h+h')$ au voisinage de 0 : $f(a+h+h') \approx f'(a+h) \times h' + y_1$ lorsque $h' \approx 0$.
En prenant $h' = h$, on pose alors $y_2 = f'(a+h) \times h + y_1$; donc le point $M_2(a+2h; y_2)$ est proche du point A_2 de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $a+2h$.
On recommence en posant $y_3 = f'(a+2h) \times h + y_2$ qui est proche de $f(a+3h)$ donc $M_3(a+3h; y_3)$ est proche de $A_3 \in \mathscr{C}_f$ d'abscisse $a+3h$...

Exemple 5.4
Soit f la fonction telle que $f'(x) = x$ pour tout $x \in \mathbf{R}_+$ et dont la courbe passe par $A(0; 1)$.
On pose $h = 0{,}2$ et on applique la méthode d'Euler :
$y_1 = f'(0) \times h + f(0) = 0 \times h + 1 = 1$: on place $M_1(0{,}2; 1)$.
$y_2 = f'(h) \times h + y_1 = h^2 + 1 = 1{,}04$: on place $M_2(0{,}4; 1{,}04)$.
$y_3 = f'(2h) \times h + y_2 = 2h^2 + 1{,}04 = 1{,}12$: on place $M_3(0{,}6; 1{,}12)$.

Méthode d'Euler avec $h = 0{,}5$: Méthode d'Euler avec $h = 0{,}2$:



5. Leonhard Euler (1707-1783) : mathématicien suisse. Un des mathématiciens les plus productifs de tous les temps. Il a travaillé dans beaucoup de domaines (notre trigonométrie moderne provient essentiellement de son *Introductio* de 1748). Il est aussi l'inventeur de beaucoup de notations que nous utilisons encore aujourd'hui (π, Σ pour les sommes, r pour les rayons, A, B, ... pour les sommets d'un polygone, cos et sin, ...)

5.3.4 Dérivées des fonctions usuelles

5.3.4.1 Fonction constante

Soit $k \in \mathbf{R}$ et $f : x \mapsto k$, pour $x \in \mathbf{R}$.
pour $h \neq 0$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{k-k}{h} = 0$.
Donc f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = 0$.
La dérivée d'une fonction constante est la fonction nulle.

5.3.4.2 La fonction $x \mapsto x^n, n \in \mathbf{N}^*$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^n$. Alors f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour $x \in \mathbf{R}$, on a $f'(x) = nx^{n-1}$.

Idée de la démonstration :
Soit $x \in \mathbf{R}$ et h un réel non nul. Calculons le taux de variation de f entre x et $x+h$.
On a d'abord $f(x+h) = (x+h)^n$. En développant cette expression on va obtenir des termes en x^n, en $x^{n-1} \times h$, en $x^{n-2} \times h^2, \dots$ et en h^n. En observant attentivement la manière de développer le produit $(x+h)(x+h)\dots(x+h)$, on remarque que le terme x^n apparaîtra une seule fois et le terme $x^{n-1} \times h$ apparaîtra n fois. On a donc :

$$(x+h)^n = x^n + n \times x^{n-1}h + \dots x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n$$

Donc :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{n \times x^{n-1}h + \dots x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n}{h} = nx^{n-1} + hQ(x,h)$$

avec $Q(x,h)$ une expression polynomiale dépendant de x et de h : sa limite lorsque h tend vers 0 existe donc.
Ainsi, on obtient :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{x \to 0} \left(nx^{n-1} + hQ(x,h)\right) = nx^{n-1}$$

Remarque 5.1
On a donc les résultats suivants :
- si $f(x) = x$ alors pour $x \in \mathbf{R}$, on a $f'(x) = 1$;
- si $f(x) = x^2$ alors pour $x \in \mathbf{R}$, on a $f'(x) = 2x$;
- si $f(x) = x^3$ alors pour $x \in \mathbf{R}$, on a $f'(x) = 3x^2$;
- ....

Exemple 5.5
Soi f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^3$. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 de $\mathscr{C}$ est $f'(1)$. Pour calculer $f'(1)$ on peut utiliser deux méthodes :
- la définition du nombre dérivé : c'est la limite lorsque h tend vers 0 du taux de variation $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$;
- ou, et c'est plus rapide, la fonction dérivée de f : on a pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = 3x^2$; donc $f'(1) = 3 \times 1^2 = 3$.

De plus, on a $f(1) = 1^3 = 1$. L'équation de T_1 est donc : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$, soit $y = 3(x-1)+1$ ou encore, en réduisant : $T_1 : y = 3x - 2$.

5.3.4.3 Fonction inverse

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. Alors f est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ et pour $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Démonstration :
Pour $x \neq 0$ et $h \neq 0$ tels que $x + h \neq 0$, on a :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \frac{-h}{x(x+h)h} = -\frac{1}{x(x+h)}$$

On a donc :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(-\frac{1}{x(x+h)}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

Exemple 5.6
Soit f la fonction inverse : pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
Cette tangente T_1 a pour équation $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$.
Pour la déterminer nous avons besoin de $f'(1)$ et de $f(1) = \frac{1}{1} = 1$.
On a pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ donc $f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$.
Ainsi T_1 a pour équation $y = -1 \times (x - 1) + 1$ soit $T_1 : y = -x + 2$.

5.3.4.4 Fonction racine carrée

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$. Alors f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et pour $x \in \mathbf{R}_+^*$, on a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Attention : f n'est pas dérivable en 0
Démonstation :

Pour $x \in \mathbf{R}_+^*$ et $h \in \mathbf{R}_+^*$ on a :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{\sqrt{x+h}^2 - \sqrt{x}^2}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

On a donc :

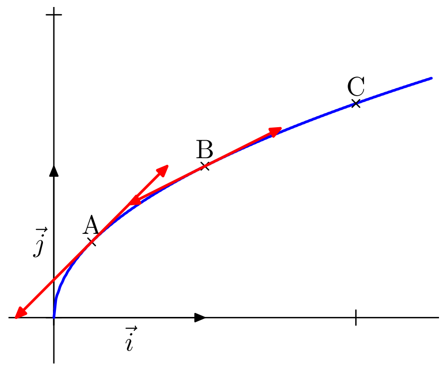
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Si $x = 0$, pour $h > 0$, on a $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$. Ainsi, lorsque h tend vers 0, $\sqrt{h}$ aussi donc $\frac{1}{\sqrt{h}}$ prend des valeurs de plus en plus grandes. Donc la limite lorsque h tend vers 0 de ce taux de variation n'existe pas : la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

Application au tracé de la courbe :
Pour tracer la courbe représentant la fonction racine carrée on dresse un tableau de valeurs et pour chaque point de ce tableau on calcule le coefficient directeur de la tangente à la courbe en ce point, puis on détermine l'équation de la tangente :

a	$\frac{1}{4}$	1	2
$f(a)$	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$
$f'(a)$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$

- en $a = \frac{1}{4}$, l'équation de la tangente est : $y = 1 \times (x - \frac{1}{4}) + \frac{1}{2}$ soit $y = x + \frac{1}{4}$;
- en $a = 1$, l'équation de la tangente est : $y = \frac{1}{2}(x-1) + 1$ soit $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$;
- en $a = 2$, l'équation de la tangente est : $y = \frac{1}{2\sqrt{2}}(x-2) + \sqrt{2}$ soit $y = \frac{x\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}$.



5.3.4.5 Fonctions trigonométriques

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbf{R}$ et on a pour $x \in \mathbf{R}$, $\cos'(x) = -\sin(x)$ et $\sin'(x) = \cos(x)$.

5.4 Opérations sur les fonctions dérivables

5.4.1 Dérivée d'une somme

Propriété 5.2
Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. On note f la fonction définie sur I par $f(x) = u(x) + v(x)$ (on note aussi $f = u + v$ sur I). Alors la fonction f est dérivable sur I et pour $x \in I$, $f'(x) = u'(x) + v'(x)$. On note $f' = u' + v'$.

Exemple 5.7
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 + 3$.
f est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$, et pour $x \in \mathbf{R}$, on a : $f'(x) = 3x^2 + 2x$

5.4.2 Produit par un réel

Propriété 5.3
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, et λ un réel quelconque. On note f la fonction définie sur I par $f(x) = \lambda u(x)$ (on note $f = \lambda u$ sur I). Alors la fonction f est dérivable sur I et pour $x \in I$, $f'(x) = \lambda u'(x)$. On note $f' = \lambda u'$.

Exemple 5.8
Soit f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 2x^2$, et g définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = 4x^3 - 2x$.
Alors, $f'(x) = 2 \times 2x$ et $g'(x) = 4 \times 3x^2 - 2$.

Conséquence :
Les fonctions polynômes sont donc dérivables sur leur ensemble de définition.

5.4.3 Dérivée d'un produit

Propriété 5.4
Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Soit f la fonction définie sur I par

$f(x) = u(x)v(x)$. Alors, f est dérivable sur I et pour $x \in I$, $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. On note $f' = u'v + uv'$.

Exemple 5.9
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f(x) = x^3\sqrt{x}$.
f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables : f s'écrit $u \times v$ avec $\begin{cases} u(x) = x^3 \\ v(x) = \sqrt{x} \end{cases}$,
où u est dérivable sur $\mathbf{R}$ et v dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$.
On a donc : $\begin{cases} u'(x) = 3x^2 \\ v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$.
Avec ces notations, on a $f' = u'v + uv'$ donc :

$$\text{Pour } x > 0,\ f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (3x^2)\sqrt{x} + x^3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 3x^2\sqrt{x} + \frac{x^3}{2\sqrt{x}}.$$

En simplifiant, on obtient même :

$$f'(x) = 3x^2\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^3 \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = x^2\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2\sqrt{x} = \frac{7}{2}x^2\sqrt{x}$$

Propriété 5.5 (Conséquence)
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = (u(x))^2$. Alors la fonction f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on a $f'(x) = 2 \times u(x) \times u'(x)$.
On écrit :

$$\left(u^2\right)' = 2uu'$$

5.4.4 Dérivée d'un quotient

Propriété 5.6
Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, avec $v(x) \neq 0$ pour $x \in I$. Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Alors, f est dérivable sur I et pour $x \in I$, $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$.
On note $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Exemple 5.10
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$, par $f(x) = \frac{3x-4}{x^2+3}$.
f est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas : on a $f = \frac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = 3x - 4 \\ v(x) = x^2 + 3 \end{cases}$.
On a donc : $\begin{cases} u'(x) = 3 \\ v'(x) = 2x \end{cases}$. Et ainsi, $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. Donc :

$$\text{Pour } x \in \mathbf{R},\ f'(x) = \frac{3 \times (x^2 + 3) - (3x - 4) \times (2x)}{(x^2 + 3)^2} = \frac{-3x^2 + 8x + 9}{(x^2 + 3)^2}.$$

Conséquence :
Les fonction rationnelles (quotients de deux polynômes) sont dérivables sur leur ensemble de définition.

Propriété 5.7 (Conséquence)
Soit u une fonction définie, dérivable et qui ne s'annule pas sur un intervalle I. Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = \frac{1}{u(x)}$. Alors f est dérivable sur I et pour $x \in I$ on a $f'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2}$.
On écrit :

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

5.4.5 Composée avec une fonction affine

Propriété 5.8
Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Soit m et p deux réels quelconques. Soit J l'intervalle tel que $mx + p \in I$ et soit f la fonction définie sur J par $f(x) = u(mx + p)$. Alors f est dérivable sur J et pour $x \in J$ on a : $f'(x) = m \times u'(mx + p)$.

Exemple 5.11
Soit f la fonction définie par $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{4})$ et g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{2x+3}$.
La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbf{R}$ et on a pour $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = -2\sin(2x + \frac{\pi}{4})$.
La fonction g est définie sur $[-\frac{3}{2}\,;+\infty[$ et dérivable sur $]-\frac{3}{2}\,;+\infty[$.
Pour $x > -\frac{3}{2}$, on a $f'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2x+3}} = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$.

Propriété 5.9 (Conséquence)
Si a et b sont deux réels quelconques et $n \in \mathbf{N}^*$, alors $f : x \mapsto (ax + b)^n$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour $x \in \mathbf{R}$, on a :

$$f'(x) = na(ax + b)^{(n-1)}$$

On pourra se référer à l'annexe B de la page 113 pour un tableau récapitulatif des dérivées de fonctions usuelles.

« Les mathématiques sont un jeu qu'on exerce selon des règles simples en manipulant des symboles et des concepts qui n'ont en soi, aucune importance particulière »
Hilbert

Chapitre 6

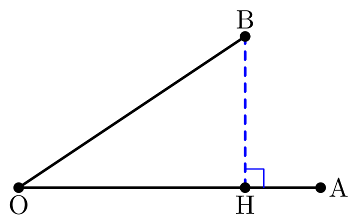
Produit scalaire

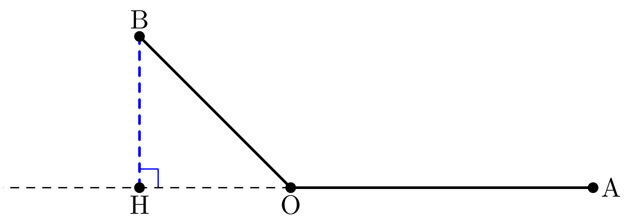
Le produit scalaire [1] (vient du latin *scolaris : escalier, échelle*) est une opération s'appliquant à deux vecteurs. Il a été inventé par deux physiciens Grassmann et Gibbs et a été baptisé ainsi par le mathématicien irlandais Hamilton (1805-1865).
En mathématiques, il permet d'utiliser les notions euclidiennes de distances, angles, orthogonalité dans des espaces de dimension quelconque. Il est aussi utilisé dans des notions beaucoup plus complexes qu'on ne détaillera pas ici.
En physique, il caractérise la notion de travail d'une force sur un déplacement mais est aussi utile en hydrodynamique, électromagnétisme, ...
Les vecteurs pouvant être vus sous plusieurs « aspects » (géométrique et algébrique), on retrouve plusieurs définitions équivalentes du produit scalaire. Nous allons les étudier dans ce chapitre et nous reviendrons sur ses applications dans le chapitre 8.

6.1 Produit scalaire de deux vecteurs

6.1.1 Projection orthogonale

Définition 6.1
Soit O, A et B trois points non-alignés du plan. Le projeté orthogonal de B sur la droite (OA) est le pied de la hauteur issue de B dans le triangle OAB. Sur les figures ci-dessous, H est le projeté orthogonal de B sur (OA) :



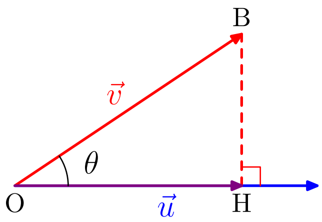


6.1.2 Produit scalaire

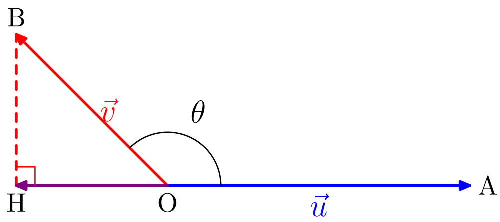
Définition 6.2
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Soit O un point du plan.
On note A et B les points du plan tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.
On appelle *produit scalaire* de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ tel que :

1. Un scalaire est un « numérique » donc un nombre réel pour nous. C'est aussi un poisson, mais là, ça n'a plus rien à voir avec les maths ; pour plus de détails, parlez-en à votre prof de SVT préféré. . .

– si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;
– si $\vec{u} \neq 0$ et $\vec{v} \neq 0$ alors, en notant H le projeté orthogonal de B sur (OA),
  – si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de même sens, $\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OH$;
  – si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de sens contraire, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -OA \times OH$.



$\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OH$



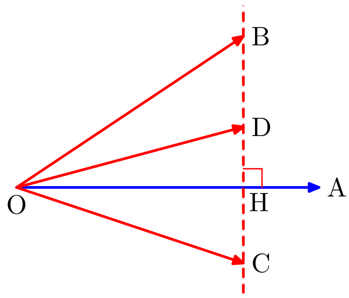
$\vec{u} \cdot \vec{v} = -OA \times OH$

Remarque 6.1
En notant θ l'angle (géométrique) formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on remarque que si θ est aigu, le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est positif et si θ est obtu, le produit scalaire est négatif.

Remarque 6.2
Le produit scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ par lui-même est noté $\vec{u}^2$. Il est égal à $||\vec{u}||^2$ et on l'appelle *carré scalaire* de $\vec{u}$.

Remarque 6.3
Sur la figure ci-contre, en appliquant la définition, on obtient facilement les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = OA \times OH$$



6.1.3 Vecteurs orthogonaux

Définition 6.3
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Soit O un point du plan et soit A et B les points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits *orthogonaux* si l'une des deux situations suivantes est réalisée :
– $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$;
– les droites (OA) et (OB) sont perpendiculaires.

Propriété 6.1
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Démonstration :
– Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux, on a deux cas :
  – si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors le produit scalaire est évidemment nul ;
  – si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non-nuls, avec les notations de la définition 6.2, on a $(OA) \perp (OB)$, le projeté orthogonal de B sur (OA) est O donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OO = 0$.

- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Par définition, on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \pm OA \times OH$. On a deux cas possibles :
  - soit $OA = 0$ c'est-à-dire que $\vec{u} = \vec{0}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ;
  - soit $OH = 0$ c'est-à-dire que $\vec{v} = \vec{0}$ ou B appartient à la perpendiculaire à (OA) passant par O donc dans les deux cas, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

6.2 Autres expressions du produit scalaire

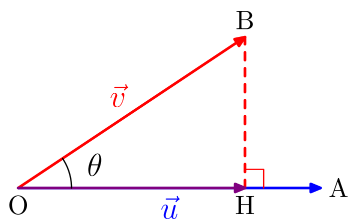
6.2.1 Géométriquement

Propriété 6.2
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. On note θ l'angle (géométrique) formé par ces vecteurs. Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\theta)$$

Démonstration :
Soit O un point du plan. On note A et B les points du plan tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$. Soit H le projeté orthogonal de B sur (OA). On note θ l'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\theta = \widehat{AOB}$.

Premier cas : $\theta \in [0\,;\,\frac{\pi}{2}]$.

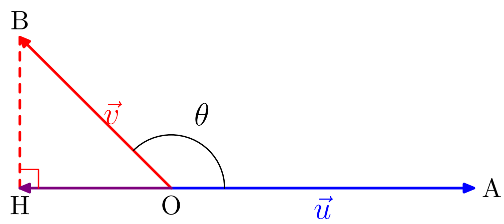


$$\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OH$$

Dans le triangle OBH rectangle en H on a $OH = OB\cos(\theta)$. Donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OB\cos(\theta) = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||\cos(\theta)$$

Deuxième cas : $\theta \in [\frac{\pi}{2}\,;\,\pi]$.



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -OA \times OH$$

Dans le triangle OBH rectangle en H on a $OH = OB\cos(\pi - \theta) = -OB\cos(\theta)$. Donc :

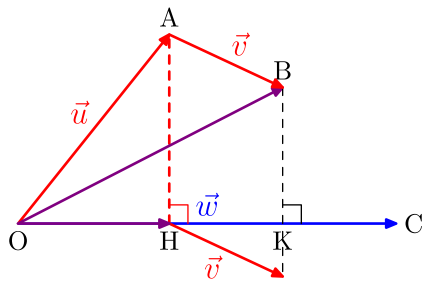
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -OA \times (-OB\cos(\theta)) = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||\cos(\theta)$$

6.2.2 Propriétés algébriques

Propriété 6.3
Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan. Soit $k \in \mathbf{R}$. On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}; \quad (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}; \quad (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

Démonstration :
- les première et troisième égalités se démontrent aisément avec la propriété 6.2 car $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$;
- pour la deuxième : soit O un point du plan, on note A, B et C les points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$.



En utilisant la remarque 6.3, on a dans le cas de la figure ci-dessus :
$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = OK \times OC$ et :
$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = OH \times OC + HK \times OC = (OH + HK) \times OC = OK \times OC$.
Donc : $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC}$.

6.2.3 Dans un repère orthonormal

Propriété 6.4
Soit $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Démonstration :
On utilise la propriété 6.3.
On a $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j}) \\
&= (x\vec{i}) \cdot (x'\vec{i}) + (x\vec{i}) \cdot (y'\vec{j}) + (y\vec{j}) \cdot (x'\vec{j}) + (y\vec{j}) \cdot (y'\vec{j}) \\
&= xx'\vec{i} \cdot \vec{i} + (xy' + x'y)\vec{i} \cdot \vec{j} + yy'\vec{j} \cdot \vec{j} \\
&= xx' + yy'
\end{aligned}$$

En effet, en appliquant la propriété 6.2, le repère étant orthonormal, on a :

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = ||\vec{i}||^2 \cos(0) = 1 \text{ et } \vec{i} \cdot \vec{j} = ||\vec{i}|| \times ||\vec{j}|| \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

6.2.4 Avec les normes

Propriété 6.5
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Alors on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$$

Démonstration :
Développons $||\vec{u} + \vec{v}||^2$:

$$\begin{array}{rcl} ||\vec{u} + \vec{v}||^2 & = & (\vec{u} + \vec{v})^2 \\ & = & \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \\ & = & ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} \end{array}$$

On a donc : $2\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2$ d'où le résultat.

« Il y a trois sortes de mathématiciens : ceux qui savent compter et ceux qui ne savent pas »
Benjamin Dereca

Chapitre 7

Dérivation : applications

7.1 Variations d'une fonction

7.1.1 Des variations au signe de la dérivée

Propriété 7.1
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, alors :
- si f est *strictement croissante* sur I, alors f' est *positive* (ou nulle) sur I ;
- si f est *constante* sur I, alors f' est *nulle* sur I ;
- si f est *strictement décroissante* sur I, alors f' est *négative* (ou nulle) sur I.

Démonstration du premier cas : on considère une fonction f strictement croissante sur I ; soit $x \in I$ et $h \in \mathbf{R}^*$ tel que $x + h \in I$. Étudions le signe du taux de variation de f entre x et $x + h$. On a deux cas possibles :
- si $h > 0$, on a $x < x + h$ or f est strictement croissante sur I donc $f(x) < f(x + h)$ et donc $f(x + h) - f(x) > 0$;
- si $h < 0$, on a $x + h < x$ or f est strictement croissante sur I donc $f(x + h) < f(x)$ et donc $f(x + h) - f(x) < 0$.

Dans les deux cas, on a montré que $f(x + h) - f(x)$ et h sont de même signe ; donc la quotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ est strictement positif. Si on donne à h des valeurs de plus en plus proches de 0, le taux de variation restera strictement positif. On admet alors que dans ce cas, la limite du taux de variation (donc le nombre dérivé) est positive ou nulle ;
Les autres cas se démontrent de la même manière [1].

7.1.2 Du signe de la dérivée aux variations

Théorème 7.1 (admis)
Soit f une fonction dérivable sur une intervalle I, alors :
- si pour $x \in I$ on a $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I ;
- si pour $x \in I$ on a $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I ;
- si pour $x \in I$ on a $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I.

Exemple 7.1 (trivial)
Soit f la fonction carré. On a donc pour $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$ et donc $f'(x) = 2x$. Pour tout $x \in \mathbf{R}_-$, $f'(x) \leq 0$ donc f est décroissante sur $\mathbf{R}_-$. De même, sur $\mathbf{R}_+$, $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur $\mathbf{R}_+$.

1. Ceux qui ne me croient pas le font ; ils verront que c'est vrai !

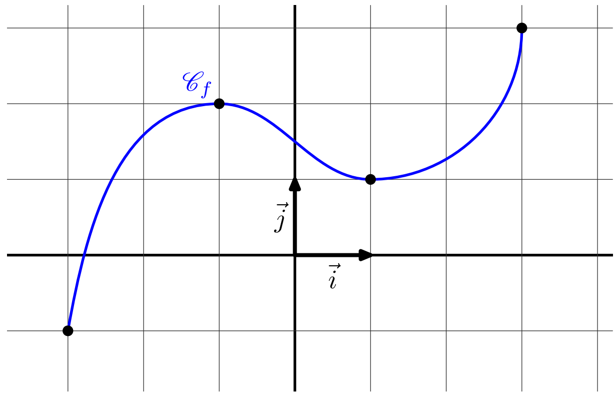
7.2 Extrema d'une fonction

7.2.1 Définitions

Définition 7.1
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit c un réel de I :
- dire que $f(c)$ est un maximum de f signifie que pour $x \in I$, $f(x) \leq f(c)$;
- dire que $f(c)$ est un minimum de f signifie que pour $x \in I$, $f(x) \geq f(c)$.

Définition 7.2
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit c un réel de I. Dire que $f(c)$ est un maximum local (resp. minimum local) de f signifie qu'il existe un intervalle ouvert J contenant c tel que $f(c)$ soit un maximum (resp. minimum) de f sur J ;

Exemple 7.2
Sur la figure ci-contre, on a tracé la représentation graphique d'un fonction f définie sur $I = [-3\,;4]$:
- sur I, $f(-3) = -1$ est le minimum de f ;
- sur I, $f(-1) = 2$ est un maximum local de f ;
- sur I, $f(1) = 1$ est un minimum local de f ;
- sur I, $f(4) = 3$ est le maximum de f.



Définition 7.3
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit m et M deux réels. Alors :
- on dit que m est un *minorant* de f sur I si pour tout $x \in I$ on a $f(x) \geq m$;
- on dit que M est un *majorant* de f sur I si pour tout $x \in I$ on a $f(x) \leq M$;
- si f admet à la fois un majorant et un minorant sur I, on dit que f est *bornée* sur I.

Remarque 7.1
Si m est un minorant de f sur I, alors tout réel $m' < m$ est aussi un minorant de f sur I. De même, Si M est un majorant de f sur I, alors tout réel $M' > M$ est aussi un majorant de f sur I.

7.2.2 Propriétés

Propriété 7.2 (admise)
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si $f(c)$ est un extremum local de f alors $f'(c) = 0$.

Remarque 7.2
Attention la réciproque est fausse ! En effet considérons la fonction cube : $f(x) = x^3$. La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et on a $f'(x) = 3x^2$ donc $f'(0) = 0$. Pourtant $f(0)$ n'est pas un extremum local de f.

Propriété 7.3
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit $c \in I$ tel que f' s'annule en c en

changeant de signe (c'est-à-dire par exemple que pour $a < x < c$, $f'(x) > 0$ et pour $c < x < b$, $f'(x) < 0$) alors $f(c)$ est un extremum local de f.

Remarque 7.3
On peut facilement observer le résultat de la propriété précédente dans des tableaux de variations :

x		c	
f	$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$

$f(c)$ est un minimum local de f.

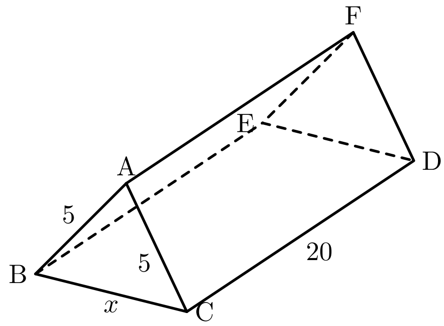
x		c	
f	$\nearrow$	$f(c)$	$\searrow$

$f(c)$ est un maximum local de f.

7.3 Résolution d'un problème

Exemple 7.3

Une boîte a la forme d'un prisme droit à base triangle isocèle comme sur la figure ci-contre. Les rectangles $ACDF$ et $ABEF$ ont des dimensions fixes : $AB = 5$ et $AF = 20$ (en centimètres). On note x la distance BC et l'objet du problème est de déterminer x pour que le volume de la boîte soit maximal.



On peut commencer par remarquer que $x \in [0; 10]$ (pour que le triangle ABC existe).

Notons $\mathscr{V}$ le volume de la boîte. On a $\mathscr{V} = \mathscr{A}_{ABC} \times CD$.

Soit H le pied de la hauteur issue de A dans ABC. Ce dernier étant isocèle, H est le milieu de $[BC]$.

On a donc $AH = \sqrt{25 - \frac{1}{4}x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{100 - x^2}$. Ainsi, $\mathscr{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times x \times \frac{1}{2}\sqrt{100 - x^2}$ et donc $\mathscr{V} = 5x\sqrt{100 - x^2} = 5\sqrt{100x^2 - x^4}$.

Soit f la fonction définie sur $[0; 10]$ par $f(x) = 100x^2 - x^4$. Sur $[0; 10]$, la fonction f a les mêmes variations que $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$. De plus, en multipliant une fonction par 5 ($5 > 0$) on ne change pas ses variations donc f et $\mathscr{V}$ admettent les mêmes variations sur $[0; 10]$. Étudions les variations de f sur $[0; 10]$:

f est définie et dérivable sur $[0; 10]$ et pour $x \in [0; 10]$, on a :

$$f'(x) = 200x - 4x^3 = 4x(50 - x^2) = 4x(\sqrt{50} - x)(\sqrt{50} + x) = 4x(5\sqrt{2} - x)(5\sqrt{2} + x)$$

Étudions le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x :

x	0		$5\sqrt{2}$		10
$4x$		$+$		$+$	
$5\sqrt{2}-x$		$+$	0	$-$	
$5\sqrt{2}+x$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$2\,500$	$\searrow$	0

Ainsi f admet un maximum pour $x = 5\sqrt{2}$ donc $\mathscr{V}$ sera maximum pour $x = 5\sqrt{2}$ aussi. On a alors $\mathscr{V} = 250$ cm^3.

Chapitre 8

Produit scalaire : applications

8.1 Équations cartésiennes dans le plan

8.1.1 Projeté orthogonal d'un vecteur sur une droite

Définition 8.1
Soit d une droite munie d'un repère $(O;\vec{i})$. Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan de représentant $\overrightarrow{AB}$. On note respectivement C et D les projetés orthogonaux de A et B sur d.
Le projeté orthogonal du vecteur $\vec{u}$ sur d est le vecteur $\overrightarrow{CD}$.

Propriété 8.1
Soit d une droite munie d'un repère $(O;\vec{i})$. Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. Le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur d est le vecteur $\vec{v} = (\vec{i} \cdot \vec{u})\vec{i}$.
Attention : $(\vec{i} \cdot \vec{u})$ est un produit scalaire donc un réel, ainsi, $(\vec{i} \cdot \vec{u})\vec{i}$ est bien un vecteur.

Démonstration :
En utilisant les notations de la définition précédente, on a $\vec{v} = \overrightarrow{CD} = \pm CD \cdot \vec{i}$ suivant si $\overrightarrow{CD}$ et $\vec{i}$ sont de même sens ou pas.
De plus, $\vec{i} \cdot \vec{u} = \vec{i} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{i} \cdot \overrightarrow{CD} = \pm CD \times \|\vec{i}\|$ suivant si $\overrightarrow{CD}$ et $\vec{i}$ sont de même sens ou pas. Or $\vec{i}$ est le vecteur unitaire de d donc $\|\vec{i}\| = 1$; ainsi, $\vec{i} \cdot \vec{u} = \pm CD$ et donc $(\vec{i} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{i} = \pm CD \cdot \vec{i}$.

8.1.2 Équation de droite

Définition 8.2
Soit d une droite du plan et $\vec{n}$ un vecteur du plan. On dit que $\vec{n}$ est un *vecteur normal* à d si la direction de $\vec{n}$ et celle de d sont orthogonales.

Remarque 8.1
Dans les conditions de la définition, si A et B sont deux points distincts sur d, $\vec{n}$ est un vecteur normal à d si $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Propriété 8.2
Le plan est muni d'un repère orthonormal. Soit d une droite du plan de vecteur normal $\vec{n}(a;b)$. Alors, il existe $c \in \mathbf{R}$ tel qu'une équation de d est $ax + by + c = 0$.

Démonstration :
Soit $A(x_A; y_A)$ un point de d. Un point $M(x; y)$ appartient à d si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux. Ainsi :

$$\begin{aligned} M(x;y) \in d &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - x_A) \times a + (y - y_A) \times b = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by + (-ax_A - bx_B) = 0 \end{aligned}$$

En prenant $c = -ax_A - by_A$, on obtient l'équation voulue.

Exemple 8.1
Soit $A(2; -3)$, $B(-1; 2)$ et $C(3; 5)$ dans un repère orthonormal. Déterminer une équation de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
On note h cette hauteur ; elle admet $\overrightarrow{BC}$ pour vecteur normal et passe par A. On a $\overrightarrow{BC}(4; 3)$ donc une équation de h est de la forme $4x + 3y + c = 0$. Or h passe A donc les coordonnées de A vérifient l'équation de h, on a donc $4 \times 2 + 3 \times (-3) + c = 0$ donc $c = 1$; une équation de h est $4x + 3y = 1$.

Propriété 8.3 (Réciproque)
Le plan est muni d'un repère orthonormal. Soit $\vec{n}(a; b)$ un vecteur non nul du plan et c un réel.
L'ensemble des points M dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient l'équation $ax + by + c = 0$ est une droite de vecteur normal $\vec{n}$.

Démonstration :
On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $ax + by + c = 0$.
Le vecteur $\vec{n}$ est non nul donc a et b ne peuvent-être simultanément nuls. Si $a \neq 0$, le point $A(-\frac{c}{a}; 0) \in \mathscr{D}$ car ses coordonnées vérifient $ax+by+c = 0$. Si $a = 0$ alors $b \neq 0$ donc $A(0; \frac{c}{b}) \in \mathscr{D}$. Ainsi, l'ensemble $\mathscr{D}$ contient au moins un point ; dans la suite on considèrera que A est un point fixé de $\mathscr{D}$. On a alors $ax_A + by_A + c = 0$.
Un point $M(x; y) \in \mathscr{D}$ si et seulement si $ax + by + c = 0$ en soustrayant membre à membre avec l'égalité précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} M(x;y) \in \mathscr{D} &\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \\ &\Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \end{aligned}$$

Avec $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(a; b)$. Ainsi $M \in \mathscr{D}$ si et seulement si M est sur la droite passant par A et normale à $\vec{n}$. Donc $\mathscr{D}$ est une droite de vecteur normal $\vec{n}$.
Conséquence :
un vecteur directeur de la droite d est $\vec{u}(-b; a)$.

8.1.3 Équation d'un cercle

Propriété 8.4
Le plan est muni d'un repère orthonormal. Le cercle de centre A et de rayon R a pour équation cartésienne :

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$$

Démonstration :
Un point $M(x;y) \in \mathscr{C}_{A,R}$ si et seulement si $AM = R$. Or AM et R sont des distances donc des réels positifs ; d'où $M(x;y) \in \mathscr{C}_{A,R}$ si et seulement si $AM^2 = R^2$.

Cette dernière égalité est équivalente à l'équation proposée dans la propriété.

Propriété 8.5
Soit A et B deux points distincts dans le plan. L'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Démonstration :
On a $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ si et seulement si $M = A$ ou $M = B$ ou ABM est rectangle en M.

Le dernier cas nous donne le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B ; les deux premiers cas « complètent » le cercle.

Exemple 8.2
Dans un repère orthonormé, on donne $A(3;2)$ et $B(-1;4)$. Déterminons l'équation du cercle de diamètre $[AB]$:

$$\begin{array}{rcl}
M(x;y) \in \mathscr{C}_{[AB]} & \Leftrightarrow & \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \\
& \Leftrightarrow & (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0 \\
& \Leftrightarrow & (x-3)(x+1) + (y-2)(y-4) = 0 \\
& \Leftrightarrow & x^2 - 2x - 3 + y^2 - 6x + 8 = 0 \\
& \Leftrightarrow & (x-1)^2 - 1 - 3 + (y-3)^2 - 9 + 8 = 0 \quad \text{(Mise sous forme canonique)} \\
& \Leftrightarrow & (x-1)^2 + (y-3)^2 = 5
\end{array}$$

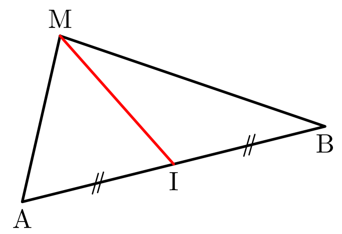
Donc le cercle de diamètre $[AB]$ a pour centre $\Omega(1;3)$ et pour rayon $r = \sqrt{5}$.

8.2 Relations dans le triangle

8.2.1 Théorème de la médiane

Théorème 8.1 (de la médiane)
Soit ABM un triangle et I le milieu de $[AB]$. Alors on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$



Démonstration :
L'idée de la démonstration[1] est d'écrire les distances au carré comme des carrés scalaires et ensuite de décomposer le vecteur par la relation de Chasles ; il reste alors à développer en

1. Idée qu'il faudra savoir utiliser par vous même en exercices. . .

utilisant les identités remarquables. On a :

$$\begin{aligned}
MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 \\
&= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 \\
&= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 \\
&= 2MI^2 + IA^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) \\
&= 2MI^2 + \tfrac{1}{4}AB^2 + \tfrac{1}{4}AB^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{0} \\
&= 2MI^2 + \tfrac{1}{2}AB^2
\end{aligned}$$

Exemple 8.3
ABCD est un parallélogramme de centre *I*. On donne $AB = 7$, $AD = 5$ et $BD = 8$.
Calculer *AC*.
Dans *ABC*, *I* est le milieu de $[AC]$. On a donc : $BA^2 + BC^2 = 2BI^2 + \frac{1}{2}AC^2$. Or $BI = \frac{1}{2}BD$; en remplaçant, on obtient :

$$AC^2 = 2\left(BA^2 + BC^2 - 2\left(\frac{1}{2}BD\right)^2\right) = 2(7^2 + 5^2 - 2 \times 4^2) = 84$$

Donc $AC = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$.

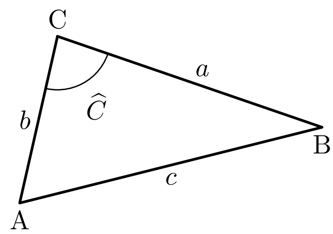
Exemple 8.4
En utilisant une démonstration analogue à celle du théorème de la médiane, montrer que si *ABM* est un triangle avec *I* milieu de $[AB]$ on a les deux égalités suivantes :

$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA}; \qquad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$$

8.2.2 Théorème d'Al-Kashi

Théorème 8.2 (d'Al-Kashi [2])
Soit *ABC* un triangle quelconque. On note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. Alors :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(\widehat{C}\right)$$



Démonstration :
Il suffit d'écrire :

$$c^2 = AB^2 = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right)^2 = \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB}^2 = b^2 + a^2 - 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(\widehat{C}\right)$$

Remarque 8.2
On obtient de la même façon :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\left(\widehat{B}\right) \text{ et } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\left(\widehat{A}\right)$$

2. Al-Kashi de son nom complet Ghiyath ad-Din Jamshid Mas'ud al-Kashi : mathématicien et astronome perse du XVe siècle. Il réussit à déterminer une valeur de π avec 15 décimales ; il faudra attendre deux siècles pour battre ce record.

8.2.3 Trigonométrie dans le triangle

Propriété 8.6 (Aire d'un triangle)
Soit ABC un triangle. En utilisant les notations du théorème d'AL-KASHI on a :

$$\mathscr{A}_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin(\widehat{A}) = \frac{1}{2}ac\sin(\widehat{B}) = \frac{1}{2}ab\sin(\widehat{C})$$

Démonstration :
Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB). Alors $\mathscr{A} = AB \times CH$ et $CH = AC\sin(\widehat{A})$ ou $CH = AC\sin(\pi - \widehat{A}) = AC\sin(\widehat{A})$ (suivant si $\widehat{A}$ est aigu ou obtu). D'où le premier résultat ; les autres s'obtiennent de la même manière.

Propriété 8.7 (des sinus)
Soit ABC un triangle. En utilisant les notations du théorème d'AL-KASHI on a :

$$\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})}$$

Démonstration :
On utilise l'égalité de la propriété 8.6 et on divise chaque membre par $\frac{1}{2}abc$. On obtient :

$$\frac{2\mathscr{A}_{ABC}}{abc} = \frac{\sin(\widehat{A})}{a} = \frac{\sin(\widehat{B})}{b} = \frac{\sin(\widehat{C})}{c}$$

Par passage à l'inverse, on obtient le résultat annoncé.

8.3 Trigonométrie

8.3.1 Formules d'addition

Propriété 8.8
Soit a et b deux réels. Alors :

$$\begin{array}{rcl}
\cos(a+b) & = & \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\
\cos(a-b) & = & \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\
\sin(a+b) & = & \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \\
\sin(a-b) & = & \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)
\end{array}$$

Démonstration :
Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormal et $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique associé. Si a et b sont deux réels, on note A et B les points de $\mathscr{C}$ correspondants. Leurs coordonnées sont alors $A(\cos(a);\sin(a))$ et $B(\cos(b);\sin(b))$.
On a $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(a-b) = \cos(a-b)$.
En utilisant l'expression du produit scalaire dans un repère orthnormal ($\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ont les mêmes coordonnées que A et B) on a : $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$. D'où la deuxième égalité.
En posant $b' = -b$ on obtient $\cos(a+b') = \cos(a)\cos(-b') + \sin(a)\sin(-b') = \cos(a)\cos(b') - \sin(a)\sin(b')$ (c'est-à-dire la première égalité).

On a :

$$\begin{aligned}\sin(a+b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-(a+b)\right)\\ &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-a\right)-b\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos(b)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin(b)\\ &= \sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)\end{aligned}$$

Enfin, en posant $b' = -b$ dans cette troisième égalité, on obtient la quatrième.

8.3.2 Formules de duplication

Propriété 8.9
Soit a un réel. Alors :

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) \text{ et } \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

8.4 Lieux de points

Les exemples qui suivent ne sont pas un « catalogue » exhaustif des méthodes à utiliser pour chercher un lieu de points mais comme leur nom l'indique de « simples » exemples !

Exemple 8.5
Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 5$.

1. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}_1$ des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$.
2. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}_2$ des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = 4$.

Réponses :

1. $$\begin{aligned}M\in\mathscr{E}_1 &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{0} \text{ ou } (AM)\perp(AB)\\ &\Leftrightarrow M\in\Delta\end{aligned}$$

   où Δ est la perpendiculaire à (AB) passant par A. Donc $\mathscr{E}_1 = \Delta$.
2. Soit I le milieu de $[AB]$. On a :

   $$\begin{aligned}M\in\mathscr{E}_2 &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 4\\ &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2 = 4\\ &\Leftrightarrow MI^2 + 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA} + IA^2 - \left(MI^2 + 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB} + IB^2\right) = 4\\ &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}\cdot\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}\right) = 4\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{BA} = 2\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB} = 2\end{aligned}$$

   En notant H le point de $[IB]$ tel que $IH = \frac{2}{5}$, on a $\overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{AB} = IH \times AB = 2$, donc $H\in\mathscr{E}_2$. Ainsi $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB} = 2$ si et seulement si $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{AB}$; c'est-à-dire si et seulement si M et H ont le même projeté orthogonal sur (AB). Donc $\mathscr{E}_2$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par H.

Exemple 8.6
Soit A, B et C trois points distincts du plan. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M du plan tels que $\left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right) = 0$.
Réponse :
Soit G le barycentre des points pondérés $(A;1)$ et $(B;2)$. Pour tout point M du plan on a alors $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MG}$ (voir propriété 2.7 page 20). On a donc :

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{E} &\Leftrightarrow \left(3\overrightarrow{MG} - 3\overrightarrow{MC}\right) \cdot 3\overrightarrow{MG} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MG}\right) \cdot \overrightarrow{MG} = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{MG} = 0 \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{E}$ est la perpendiculaire à (CG) passant par G.

« *Les mathématiques sont la seule science où on ne sait pas de quoi on parle ni si ce qu'on dit est vrai* »
Bertrand Russell

Chapitre 9

Les suites

9.1 Suite de nombres réels

9.1.1 Définition

Définition 9.1
On appelle suite de terme général u_n et on note $(u_n)_{n\geq 0}$ ou plus simplement u la liste *ordonnée* des nombres $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$. Les nombres u_i sont appelés les *termes* de la suite.
Une suite (u_n) permet donc d'associer à chaque entier n un réel qu'on note u_n.

Remarque 9.1
Parfois le premier terme d'une suite peut être u_1 ou $u_2, \ldots$ et non pas u_0.

Exemple 9.1
On définit (u_n) comme la suite des nombres pairs.
Dans ce cas, on a : $u_0 = 0$, $u_1 = 2$, $u_2 = 4, \ldots$. On peut écrire aussi $u_n = 2 \times n$.

Remarque 9.2 (Notation)
Il faut bien remarquer que, dans la notation u_n, n est un entier dont dépend la valeur de u_n. Cet entier est appelé *l'indice* du terme u_n. Il joue le même rôle que le « x » dans l'expression de $f(x)$ où f est une fonction numérique. La notation indicielle est ici plus commode et courte [1] à écrire.

Exemple 9.2
En reprenant la suite des entiers pairs définie dans l'exemple 9.1 par $u_n = 2 \times n$, on a : $u_6 = 2 \times 6 = 12$, $u_n = 2 \times n$, mais aussi $u_p = 2 \times p$ ou encore $u_t = 2 \times t$.
Si on choisit comme indice l'entier $n + 1$ on a $u_{n+1} = 2 \times (n + 1) = 2n + 2$. À ne pas confondre avec $u_n + 1 = (2 \times n) + 1 = 2n + 1$. Il est donc très important d'écrire les indices au bon endroit et à la bonne taille [2] !
Il s'agit de la même distinction qu'entre $f(x + 1)$ et $f(x) + 1$ pour les fonctions.

9.1.2 Mode de génération

Une suite (u_n) est entièrement définie si on est capable de calculer u_n pour n'importe quelle valeur de n. Il existe deux façons usuelles pour définir une suite :

1. Et je vous ai déjà dit que la « bonne paresse » est une qualité pour les mathématiciens que vous êtes !
2. Avis aux adeptes des écritures « pattes de mouches » comme . . . . . . (Oups ! j'ai failli vexer quelqu'un !)

9.1.2.1 Suite définie « en fonction de n »

Exemple 9.3
On considère la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \frac{x+3}{x^2+1} \end{array}$.
Si $x \in \mathbf{N}$, $f(x)$ est toujours défini. On peut donc considérer la suite u de terme général :

$$u_n = f(n) = \frac{n+3}{n^2+1}$$

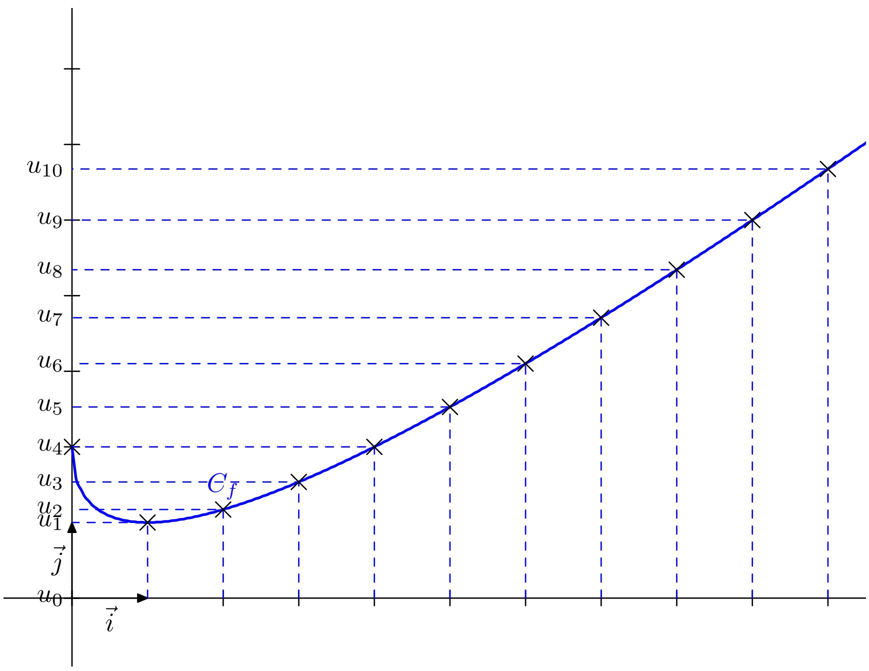
On a alors :

$$u_0 = \frac{0+3}{0^2+1} = 3,\ u_1 = \frac{1+3}{1^2+1} = 2,\ \dots$$

Dans cette situation, on est bien en mesure de calculer u_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Représentation graphique d'une suite définie « en fonction de n »
Soit u une suite définie par $u_n = f(n)$ pour $n \in \mathbf{N}$, où f est une fonction numérique définie sur $\mathbf{R}$.
On trace dans un repère la représentation graphique de f. Le terme u_i de la suite est alors l'ordonnée du point de C_f dont l'abscisse est i.

Exemple 9.4
Le graphique ci-dessous représente la suite u définie par $u_n = f(n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2$



9.1.2.2 Suite définie par récurrence

Exemple 9.5
Je possède 1 000 € sur mon livret d'épargne. Chaque année on me reverse dessus 5 % en intérêts et je rajoute 100 €. J'appelle u_n la somme dont je dispose sur mon livret après n ans.
On a donc :

– pour $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = (1 + \frac{5}{100}) \times u_n + 100 = 1{,}05u_n + 100$;
– la somme disponible sur le livret aujourd'hui est 1 000€. Donc : $u_0 = 1\,000$.

On a : $u_1 = 1{,}05 \times 1\,000 + 100 = 1\,150$, puis $u_2 = 1{,}05 \times 1\,150 + 100 = 1\,307{,}50 \ldots$. De proche en proche, on peut donc calculer u_n pour n'importe quelle valeur de n.

Définition 9.2
Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbf{R}$, et a un réel quelconque. On dit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour tout } n \in \mathbf{N} \end{cases}$ est définie par *récurrence* et on note :

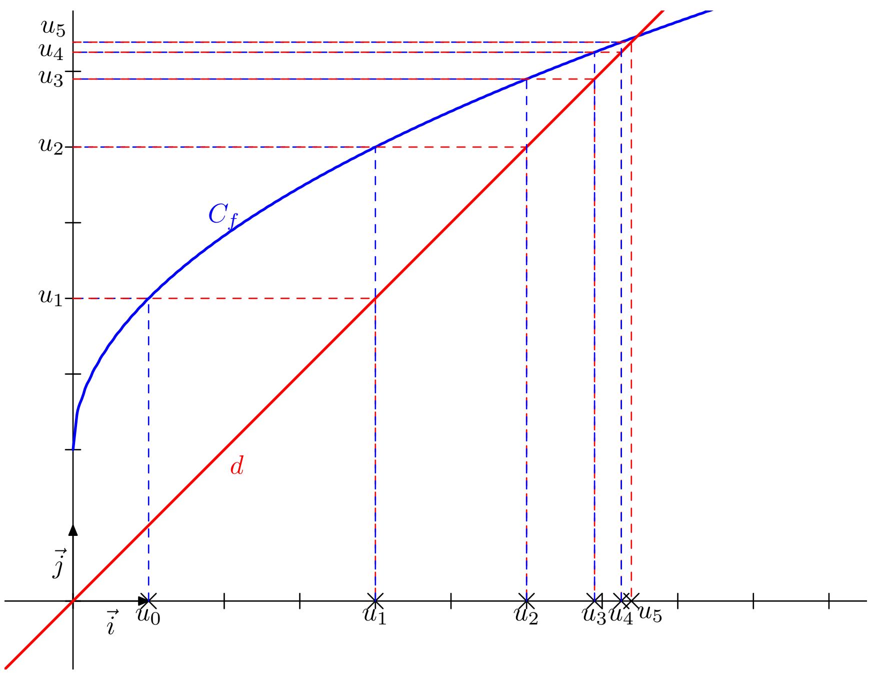
$$u : \begin{cases} u_0 = a \\ \text{pour } n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Remarque 9.3
Lorsqu'une suite est définie par récurrence, pour calculer u_n, on est obligé d'avoir calculé avant tous les termes précédents.

Représentation graphique d'une suite définie par récurrence
Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbf{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$
On trace dans un repère la droite d d'équation $y = x$ et la courbe représentative C_f de la fonction f. On place ensuite sur l'axe des abscisses u_0. On a $u_1 = f(u_0)$; on peut donc lire u_1 sur l'axe des ordonnées comme l'image de u_0 par f. On reporte alors u_1 sur l'axe des abscisses grâce à d.

Exemple 9.6
Le graphique ci-dessous est obtenu avec $f : x \mapsto 2\sqrt{x} + 2$ et $u_0 = 1$. On a donc u définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} + 2 \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$



9.2 Variations d'une suite

Définition 9.3
On dit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est :
- strictement croissante si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} > u_n$;
- strictement décroissante si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} < u_n$.

Exemple 9.7
On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = (2n+1)^2$. Pour étudier les variations de $(u_n)_{n\geq 0}$, on calcule $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (2(n+1)+1)^2 - (2n+1)^2 \\ &= (2n+3)^2 - (2n+1)^2 \\ &= 4n^2 + 12n + 9 - (4n^2 + 4n + 1) \\ &= 8n + 8 > 0, \text{ pour } n \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

Donc la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante.

Exemple 9.8
On considère la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par récurrence par : $\begin{cases} v_0 = 10 \\ v_{n+1} = (v_n)^2 + 3v_n + 1 \end{cases}$.
Pour étudier les variations de (v_n), on va calculer $v_{n+1} - v_n$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (v_n)^2 + 3v_n + 1 - v_n \\ &= (v_n)^2 + 2v_n + 1 \\ &= (v_n + 1)^2 > 0, \text{ pour } n \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

Donc la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante.

Propriété 9.1
Soit u une suite à termes strictement positifs. Alors :
- la suite u est strictement croissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$;
- la suite u est strictement décroissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

Propriété 9.2
Soit f un fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ et u la suite définie pour $n \in \mathbf{N}$ par $u_n = f(n)$. Alors :
- si f est croissante sur $\mathbf{R}_+$ alors u est croissante ;
- si f est décroissante sur $\mathbf{R}_+$ alors u est décroissante.

Attention : les réciproques de ces deux propositions sont fausses : u peut être croissante et f ne pas l'être sur $\mathbf{R}_+$ (f peut avoir des variations quelconques entre deux entiers consécutifs).

9.3 Suites arithmétiques

9.3.1 Définition

Définition 9.4
Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite *arithmétique* si la différence entre deux termes consécutifs est constante. C'est à dire qu'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$.
Le réel r est appelé *raison* de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exemple 9.9
Si u est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 3, on a :

$$\begin{aligned} &u_0 = 5 \\ &u_1 = u_0 + 3 = 5 + 3 = 8 \\ &u_2 = u_1 + 3 = 8 + 3 = 11 \end{aligned}$$

9.3.2 Calcul du terme général

Théorème 9.1
- si u est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = u_0 + nr$;
- si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = a + b \cdot n$, alors, u est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = a$ et de raison b.

Démonstration :
- On a : $u_1 = u_0 + r$,
  puis, $u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r$.
  De même, $u_3 = u_2 + r = (u_0 + 2r) + r = u_0 + 3r, \ldots$ et ainsi de suite.
  On obtient finalement $u_n = u_0 + nr$.
- Si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = a + nb$, alors $u_{n+1} - u_n = (a + (n+1)b) - (a + nb) = b$. Donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + b$, et donc u est une suite arithmétique de raison b et de premier terme $u_0 = a + 0 \cdot b = a$.

Exemple 9.10
En reprenant la suite de l'exemple 9.9, on a :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbf{N}, \quad u_n = 5 + n \times 3 = 5 + 3n$$

Remarque 9.4
Si le premier terme d'une suite arithmétique est u_1, et sa raison est r, on a :

$$\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = u_1 + (n-1)r$$

Et de façon plus générale, si u est une suite arithmétique de raison r, pour tous les entiers n et p on a :

$$u_n = u_p + (n - p) \times r$$

9.3.3 Calcul de la somme des premiers termes

Propriété 9.3
La somme S des n premiers termes d'une suite arithmétique est :

$$S = \frac{n \times (\text{premier terme } + \text{ dernier terme})}{2}$$

Dans le cas où le premier terme est u_0, on obtient : $S = \frac{n \times (u_0 + u_{n-1})}{2}$.
Dans le cas où le premier terme est u_1, on obtient : $S = \frac{n \times (u_1 + u_n)}{2}$.

Démonstration : (cas où le premier terme est u_1)
On va écrire S de deux façons différentes :

$$S = u_1 + (u_1 + r) + \cdots + (u_1 + (n-2)r) + (u_1 + (n-1)r)$$

$$S = (u_n - (n-1)r) + (u_n - (n-2)r) + \cdots + (u_n - r) + u_n$$

Donc : $2S = n \times u_1 + n \times u_n$ (les autres termes s'annulent) d'où le résultat en divisant les deux membres par 2.

Exemple 9.11
Un salarié est embauché le 1er janvier 2008 pour un salaire net mensuel de 1 000€ par mois et avec une augmentation de 5€ nets par mois dès le deuxième mois.
On note u_n le salaire perçu à l'issue du n^e mois. Ainsi u est une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 1\,000$ et de raison $r = 5$. En effet, la différence entre deux salaires consécutifs est égale à 5€.
Le salaire perçu en décembre 2008 est donc $u_{12} = 1\,000 + 11 \times 5 = 1\,055$€.
Le total des salaires perçus au cours de la première année est donc :

$$S = \frac{12 \times (u_1 + u_{12})}{2} = \frac{12 \times 2\,055}{2} = 12\,330$$

Exemple 9.12
Calculons la somme des 100 premiers entiers : $S_{100} = 1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100$.
Pour cela, on considère la suite arithmétique v de premier terme $v_1 = 1$ et de raison $r = 1$.
La somme S_{100} cherchée est donc la somme des 100 premiers termes de la suite v :

$$S_{100} = \frac{100 \times (v_1 + v_{100})}{2} = \frac{100 \times (1 + 100)}{2} = 5\,050$$

9.4 Suites géométriques

9.4.1 Définition

Définition 9.5
Une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est dite *géométrique* si chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par un même nombre q. C'est à dire qu'il existe un réel q tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le réel q est appelé *raison* de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

Remarque 9.5
Si on considère que la suite u n'est pas la suite nulle[3], u est géométrique si pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$.

Exemple 9.13
Si u est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$, et de raison $q = 2$, on a :

$$u_0 = 5, \quad u_1 = q \times u_0 = 2 \times 5 = 10, \quad u_2 = q \times u_1 = 2 \times 10 = 20, \quad u_3 = q \times u_2 = 2 \times 20 = 40, \ldots$$

3. La suite nulle est la suite dont tous les termes sont égaux à zéro.

9.4.2 Calcul du terme général

Théorème 9.2

- si u est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$;
- si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = a \times b^n$, alors, u est la suite géométrique de premier terme $u_0 = a$ et de raison b.

Exemple 9.14
En reprenant la suite géométrique de l'exemple 9.13, on a :

$$\text{pour tout } n \in \mathbf{N}, \quad u_n = u_0 \times q^n = 5 \times 2^n$$

Remarque 9.6
Si le premier terme est u_1, on a : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = u_1 \times q^{n-1}$. De façon plus générale, si u est une suite géométrique de raison q alors pour tous les entiers n et p on a :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

9.4.3 Calcul de la somme des premiers termes

Propriété 9.4
Soit q un réel différent de 0 et de 1. Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$1 + q + q^2 + \ldots \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exemple 9.15
Si $q = 2$,
$1 + q + q^2 = 1 + 2 + 4 = 7$. En appliquant la formule : $1 + q + q^2 = \frac{1-2^3}{1-2} = \frac{-7}{-1} = 7$.
$1 + 2 + \cdots + 2^{10} = \frac{1-2^{11}}{1-2} = 2\,047$.

Propriété 9.5
Soit u une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, avec q différent de 1 et de 0. On a :

$$u_0 + u_1 + \ldots\ldots u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Démonstration :
$u_0 = u_0 \times 1$, $u_1 = u_0 \times q$, $u_2 = u_0 \times q^2$,. . .. Ainsi, on a :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + \cdots + u_0 \times q^n = u_0\left(1 + q + q^2 + \cdots + q^n\right)$$

En utilisant la propriété 9.4, on obtient :

$$u_0 + u_1 + \ldots \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Remarque 9.7
Si u est une suite géométrique de raison q, la somme des premiers termes peut aussi s'écrire :

$$S = \frac{\text{premier terme} - q \times \text{dernier terme}}{1-q}$$

Exemple 9.16
Un salarié est embauché le 1^er^ janvier 2008 pour un salaire net mensuel de 1 000€ par mois et avec une augmentation de 0,4% nets par mois dès le deuxième mois.
On note u_n le salaire perçu à l'issue du n^{e} mois. Ainsi u est une suite géométrique de premier terme $u_1 = 1\,000$ et de raison $q = 1 + \frac{0,4}{100} = 1,004$. En effet, chaque salaire est obtenu en multipliant le précédent par le coefficient multiplicateur de l'augmentation soit $1 + \frac{0,4}{100} = 1,004$.
Le salaire perçu en décembre 2008 est donc $u_{12} = 1\,000 \times 1,004^{11} \approx 1\,044,89$€.
Le total des salaires perçus au cours de la première année est donc :

$$S = \frac{1^{\text{er}}\text{ terme - } q \text{ fois dernier terme}}{1-q} = \frac{1\,000 - 1,004 \times 1\,044,89}{1-1,004} = 12\,267,39$$

Chapitre 10

Géométrie spatiale

10.1 Perspective cavalière

10.1.1 Histoire

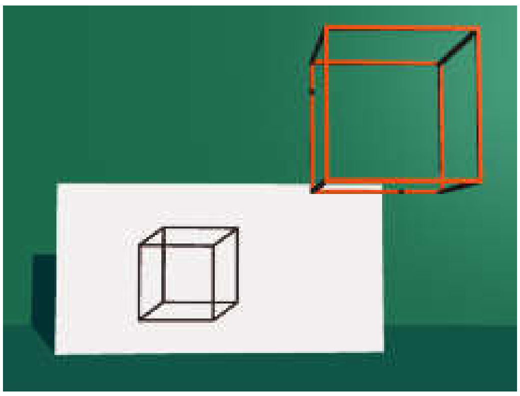
Une représentation en perspective d'un solide de l'espace (à trois dimensions) sur un plan (deux dimensions) n'est pas évidente. Il existe plusieurs types de représentations en perspective. Dans la suite, nous étudierons la perspective *cavalière*, résultat d'une projection du solide sur un plan suivant une direction donnée.
L'architecte Jacques Androuët du Cerceau (1510 - 1589) est l'un des premiers à employer la perspective cavalière de manière méthodique. Dans ses représentations, la façade du bâtiment est représentée à l'échelle. La perspective cavalière actuellement utilisée en architecture est celle dûe à Auguste Choisy (1841 - 1909). Dans cette perspective, ce sont les plans horizontaux qui sont représentés à l'échelle. L'avantage est que le plan du bâtiment n'est pas déformé : seules les lignes verticales sont réduites. L'origine de l'expression *perspective cavalière* n'est pas connue avec certitude. Deux explications sont communément admises :

- une origine serait qu'un cavalier regardant du haut de son cheval un objet posé au sol le voit quasiment en perspective parallèle ;
- une autre origine tient au mot *cavalier* qui, en vocabulaire des fortifications, est un haut monticule de terre ; ainsi un observateur situé sur ce cavalier a une vue sur la campagne environnante proche d'une représentation en perspective cavalière.

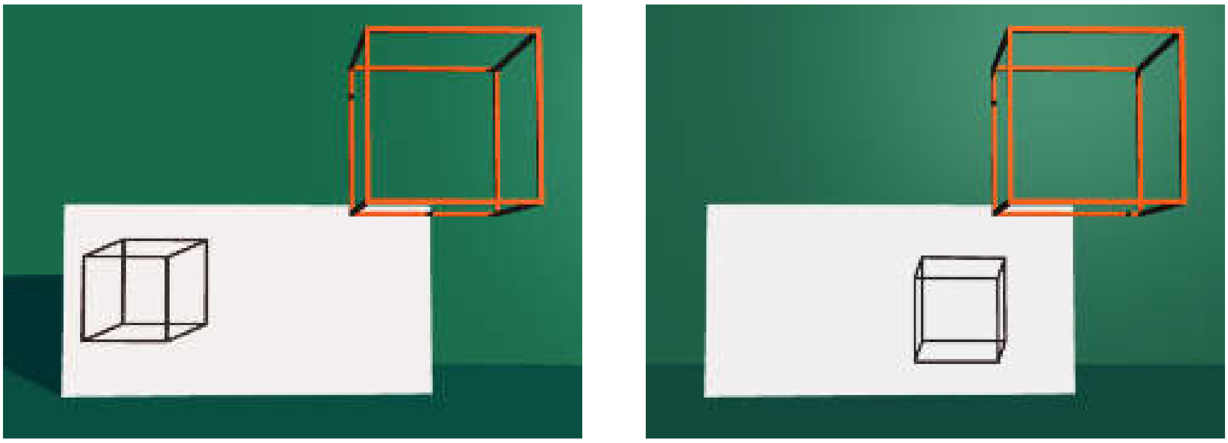
10.1.2 Un exemple

On place un cube dans l'espace, face à un écran vertical. Une source lumineuse éclaire l'écran depuis l'arrière du cube ; tous les rayons lumineux étant parallèles les uns par rapport aux autres. Le cube est placé de sorte que deux de ses faces soient parallèles à l'écran et que deux autres soient horizontales.
Si les rayons de la source lumineuse ne sont pas perpendiculaires à l'écran, on obtient sur cet écran une *représentation en perspective cavalière* du cube.
Si les rayons sont perpendiculaires à l'écran, on parle de perspective orthogonale. Dans la suite, on considèrera qu'on n'est pas dans cette situation.

Perspective cavalière :



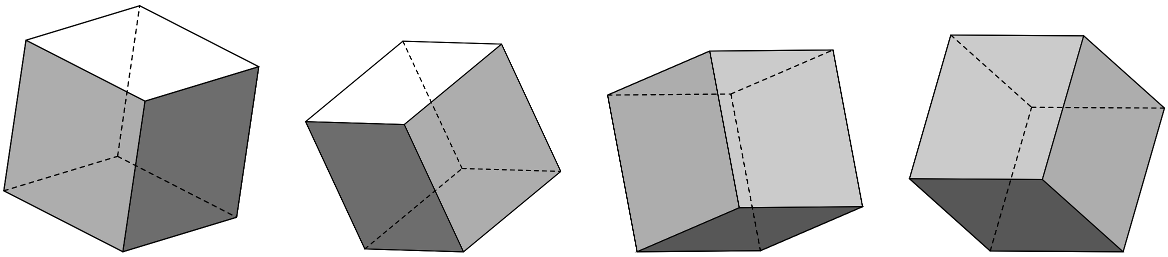
Lorsqu'on représente un solide en perpective cavalière, la figure obtenue n'est pas unique. En effet elle dépend de la position du cube et de la source de lumière par rapport à l'écran. Ainsi, un même cube peut avoir plusieurs représentations en perspective :



En fait, une représentation en perspective cavalière est l'ombre de l'objet sur un écran.

10.1.3 Vocabulaire

le point de vue : c'est la position de l'observateur. Pour que la représentation donne une impression de volume, il faut que le point de vue soit décalé horizontalement et verticalement par rapport à l'objet :



un même cube depuis différents points de vue.

les faces frontales : ce sont les faces parallèles à l'écran. Ces faces sont représentées « à l'échelle » ; c'est à dire que les rapports de longueurs et les mesures des angles sont conservés ;

une fuyante : est une droite perpendiculaire à l'écran ;

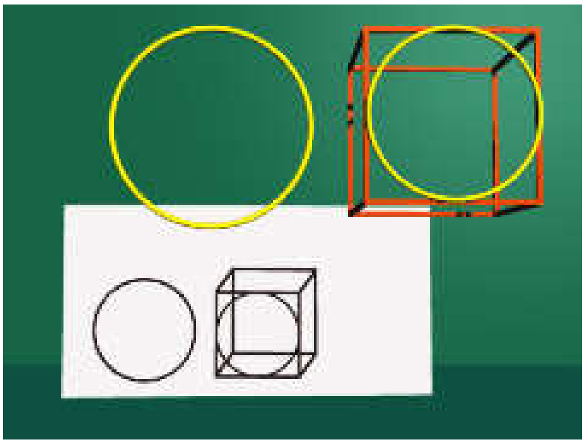
les faces fuyantes : ce sont les faces latérales ou supérieures : celles qui sont orthogonales à l'écran.

10.1.4 Conservations

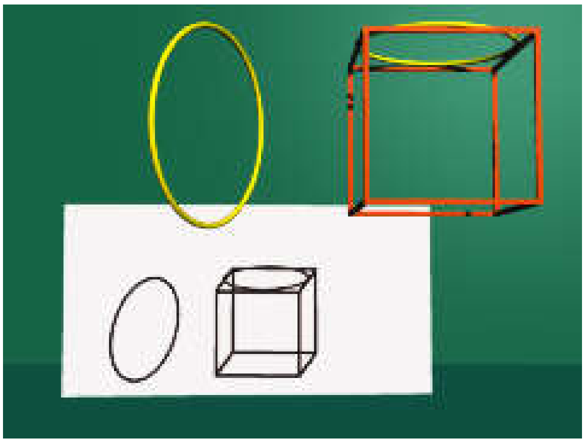
Dans ce paragraphe, on notera par des lettres majuscules les sommets des solides et par les mêmes lettres minuscules les sommets correspondants sur la représentation en perspective cavalière.
Ainsi, si $SABCD$ est une pyramide à base carrée, le nom de sa représentation en perspective cavalière est $sabcd$.

Voici quelques figures qui permettent d'illustrer les propriétés de conservations de la représentation en perspective cavalière :

Sur les faces frontales, les propriétés géométriques sont conservées : angles, rapports de longueur, parallèlisme, orthogonalité, . . .



Sur les faces fuyantes, ce n'est pas le cas le cercle inscrit dans la face supérieur du cube n'est pas un cercle sur la représentation en perspective :



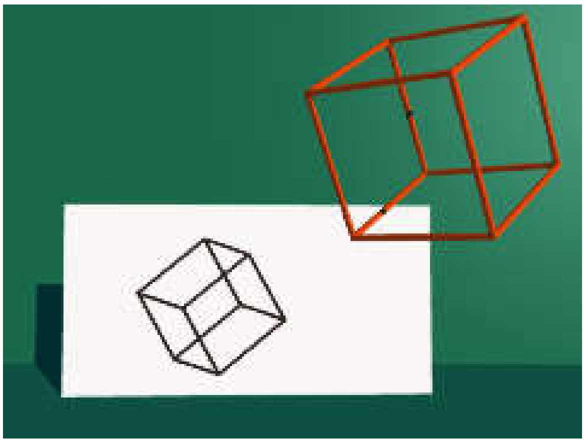
Quelques propriétés sont toujours conservées dans une représentation en perpective cavalière en particulier :

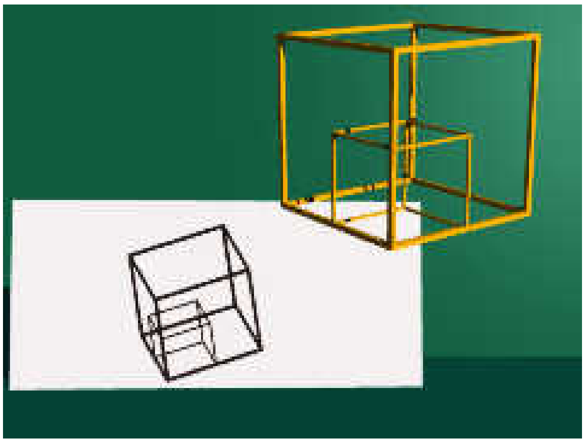
l'alignement : trois points alignés sur le solide sont aussi alignés sur la représentation en perspective cavalière ; Ainsi, si A, B et C sont alignés alors a, b et c le sont aussi ;

le parallèlisme : deux droites parallèles sur le solide le sont aussi sur la représentation en perspective cavalière ; Ainsi, si $(AB)//(CD)$ alors $(ab)//(cd)$;

les rapports de longueurs de deux segments parallèles : si (AB) et (CD) sont deux droites parallèles d'un solide alors : $\frac{AB}{CD} = \frac{ab}{cd}$. Les milieux sont donc conservés : si M est le milieu de $[AB]$ alors m est le milieu de $[ab]$.

Illustrations :





On remarque sur ces figures, la préservation de l'alignement, du parallélisme et du milieu.

10.2 Quelques bases de géométrie dans l'espace

10.2.1 Règles d'incidence

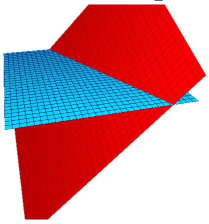
Règle 10.1
Dans l'espace :
– par deux points distincts il passe une unique droite ;
– par trois points non alignés il passe un unique plan ;
– quatre points sont dits coplanaires s'ils sont dans un même plan ;
– il en est de même pour deux droites.

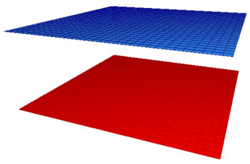
Règle 10.2
Si deux points distincts A et B appartiennent à un plan $\mathscr{P}$, alors tous les points de (AB) sont dans $\mathscr{P}$. On dit que (AB) est incluse dans $\mathscr{P}$ et on note $(AB) \subset \mathscr{P}$.

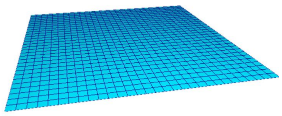
Règle 10.3
Dans un plan de l'espace toutes les propriétés de géométrie plane (Pythagore, Thalès, trigonométrie, ...) s'appliquent.

10.2.2 Positions relatives

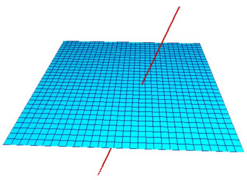
Deux plans de l'espace peuvent être sécants, strictement parallèles ou confondus. Lorsqu'ils sont sécants, deux plans se coupent suivant une droite.

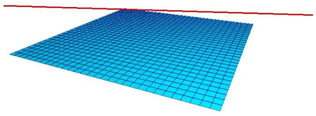

Plans sécants

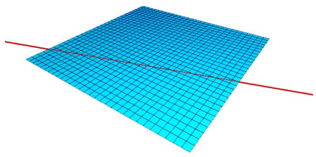

Plans parallèles


Plans confondus

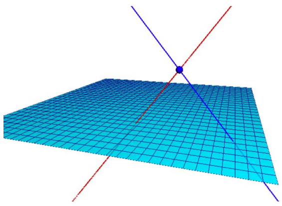
Une droite peut être sécante à un plan, elle peut être strictement parallèle au plan ou encore être contenue dans le plan :

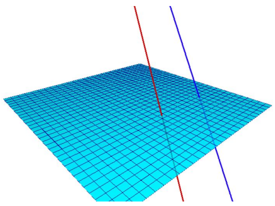

Droite sécante au plan

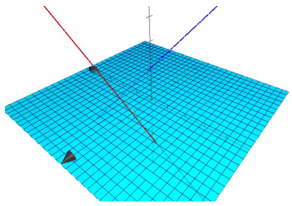

Droite parallèle au plan


Droite contenue dans le plan

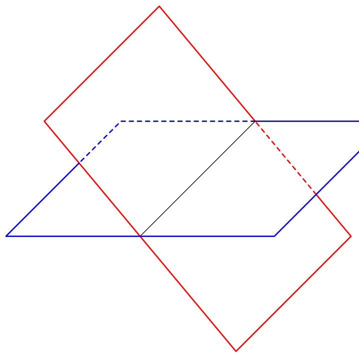
Deux droites peuvent être coplanaires, dans ce cas elles sont parallèles ou sécantes, ou alors non-coplanaires,dans ce cas elles n'ont pas de point commun mais ne sont pas non plus parallèles.

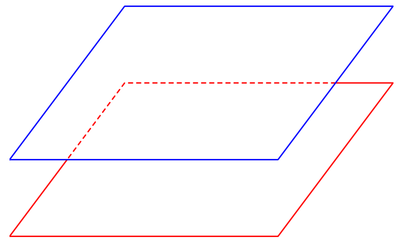

Droites sécantes

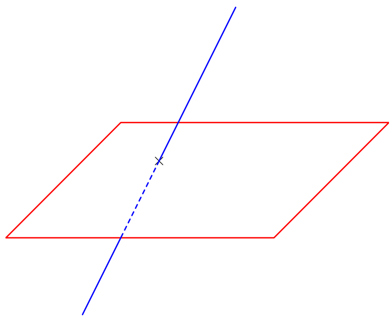

Droites parallèles

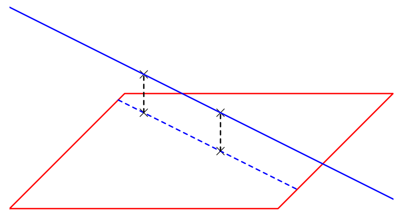

Droites non coplanaires

10.2.3 Quelques figures en perspective cavalière









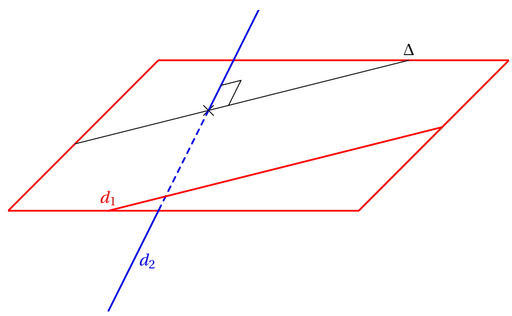
10.2.4 Parallélisme et orthogonalité

Définition 10.1
Deux droites de l'espace sont parallèles si elles sont coplanaires et non sécantes.

Axiomes d'Euclide :
- par tout point de l'espace il passe une seule droite parallèle à une droite donnée ;
- par tout point de l'espace il passe un seul plan parallèle à un plan donné.

Définition 10.2
Deux droites sont perpendiculaires si elles sont sécantes en formant un angle droit. Elles sont donc coplanaires.

Définition 10.3
Deux droites de l'espace sont dites *orthogonales* s'il existe une droite qui est parallèle à l'une et perpendiculaire à l'autre.
d_1 et d_2 sont orthogonales s'il existe une droite Δ telle que $\begin{cases} \Delta \,//\, d_1 \\ \Delta \perp d_2 \end{cases}$



Remarque 10.1
Attention :
- deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires ;
- deux droites perpendiculaires sont orthogonales.

10.3 Quelques exemples de sections

Définition 10.4
La section d'un solide par un plan est la figure plane constituée des points communs entre le plan et le solide. Si le solide est un polyèdre, la section obtenu est un polygone.

Voir les fiches d'exos.

10.4 Vecteurs de l'espace

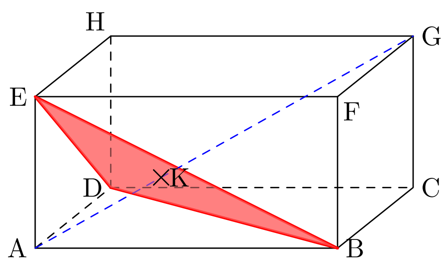
La définition d'un vecteur de l'espace est strictement identique à celle d'un vecteur du plan. Les propriétés de calculs sur les vecteurs (addition vectorielle, relation de Chasles, multiplication par un réel, ...) restent vraies dans l'espace. Nous ne parlerons cependant pas du produit scalaire de vecteurs de l'espace.
Le barycentre de points pondérés de l'espace est également défini comme dans le plan et les propriétés du barycentre (en particulier l'associativité) restent vraies aussi.

Définition 10.5
Des vecteurs de l'espace sont *coplanaires* si des représentants de ces vecteurs de même origine A ont leurs extrémités dans un même plan passant par A.
C'est-à-dire par exemple que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires s'il existe quatre points coplanaires A, B, C et D tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.

Propriété 10.1 (admise)
Trois vecteurs de l'espace $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe trois réels non tous nuls a, b et c tels que : $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$.

Propriété 10.2 (Conséquence)
Le barycentre de trois points non alignés de l'espace est dans le plan formé par ces trois points.

Exemple 10.1
Soit $ABCDEFGH$ un pavé droit. On note K le centre de gravité du triangle BDE. On souhaite montrer que A, K et G sont alignés puis que $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.



K est l'isobarycentre de B, D et E donc $\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{KE} = \overrightarrow{0}$. On utilise la relation de Chasles en introduisant trois fois le point A et on obtient : $3\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{0}$. On a donc :

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{AK} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \\ &= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{AH} \\ &= \overrightarrow{AG} \end{aligned}$$

Donc les points A, K et G sont alignés.

On a $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG}$; or $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF}$ donc finalement, $\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{0}$. Ainsi les trois vecteurs sont coplanaires.

10.5 Repérage dans l'espace

10.5.1 Repère cartésien de l'espace

Définition 10.6
Si O, I, J sont trois points non alignés et K un point qui n'est pas dans le plan (OIJ), on dit que $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$ est un repère de l'espace.

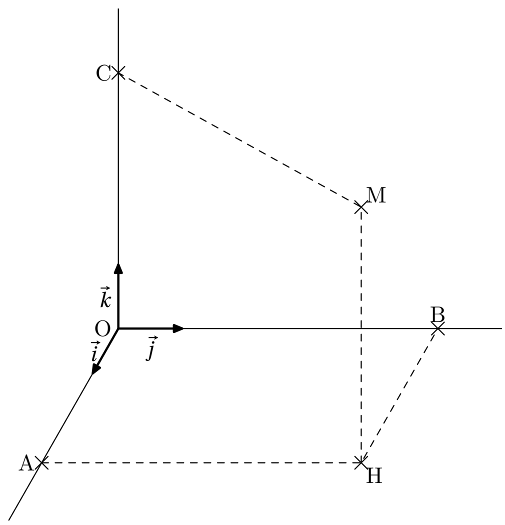
Remarque 10.2
Cas particuliers, vocabulaire et notations :
– si les droites (OI), (OJ) et (OK) sont deux à deux perpendiculaires, on dit que le repère est orthogonal ;
– si de plus on a $OI = OJ = OK = 1$, on dit que le repère est orthonormal ;
– en posant : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$, on peut aussi noter le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Théorème 10.1
Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace. Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet (x, y, z) de réels tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Démonstration :
On se place dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit H le point d'intersection du plan (OIJ) et de la parallèle à $(O; \vec{k})$ passant par M. Soit $(x; y)$ les coordonnées de H dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan (OIJ). On a : $\overrightarrow{OH} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et le couple $(x; y)$ est unique.
Par définition de H, les vecteurs $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{k}$ sont colinéaires. Donc il existe un unique réel z tel que $\overrightarrow{HM} = z\vec{k}$. On a donc :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = x\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

Donc le triplet $(x; y; z)$ existe et il est unique.



Remarque 10.3
La première coordonnée (x) est appelée *l'abscisse*, la deuxième (y) est appelée *l'ordonnée*, et la troisième (z) est appelée *la cote*.

Définition 10.7
Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur de l'espace. On appelle *coordonnées* du vecteur $\vec{u}$ dans ce repère le triplet $(x; y; z)$ coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. On note $\vec{u}(x; y; z)$.

10.5.2 Propriétés

En se plaçant dans un repère de l'espace, les propriétés de calculs des coordonnées de vecteurs ou de points sont identiques que dans le plan ; il faut simplement étendre les formules à la troisième coordonnée :
- si A et B sont deux points de l'espace, les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$;
- si $\vec{u}(x; y; z)$ est un vecteur de l'espace et $k \in \mathbf{R}$, le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx; ky; kz)$;
- en se plaçant dans un repère **orthonormé**, si $\vec{u}(x; y; z)$ est un vecteur de l'espace, sa norme est $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;
- les coordonnées du milieu de $[AB]$ sont $\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$;
- ...

10.5.3 Équations de surfaces

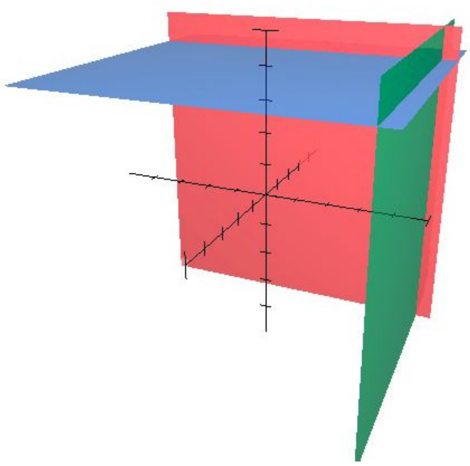
Dans cette partie, on considère que l'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Propriété 10.3
Soit $A(0; 0; \lambda)$ un point de l'espace où $\lambda \in \mathbf{R}$. Le plan $\mathscr{P}$ parallèle à $(O; \vec{i}, \vec{j})$ passant par A a pour équation $z = \lambda$.
On note : $\mathscr{P} : z = \lambda$.

Cela signifie que :
- si $M(x; y; z) \in \mathscr{P}$, alors $z = \lambda$ (x et y sont quelconques),
- si M est un point tel que $z_M = \lambda$, alors $M \in \mathscr{P}$.

Remarque 10.4
De même, les plans $\mathscr{Q}$ et $\mathscr{R}$ passant respectivement par $B(0; \mu; 0)$ et $C(\nu; 0; 0)$ et parallèles respectivement à $(O; \vec{i}, \vec{k})$ et $(O; \vec{j}, \vec{k})$ ont pour équation :

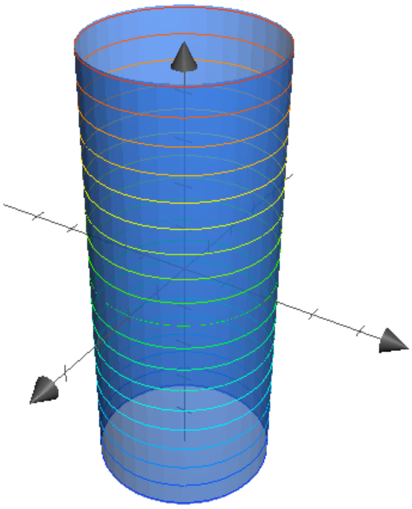
$$\mathscr{Q} : y = \mu \quad \text{et} \quad \mathscr{R} : x = \nu$$



Définition 10.8
Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon R dans le plan (Oxy). Le cylindre d'axe (Oz) et de rayon R est l'ensemble des droites orthogonales au plan (Oxy) en un point de $\mathscr{C}$.

Propriété 10.4
Une équation cartésienne d'un cylindre d'axe (Oz) et de rayon R est du type

$$x^2 + y^2 = R^2$$

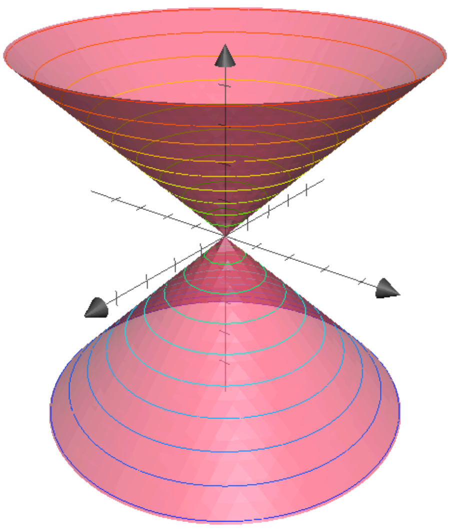


Définition 10.9
Soit $\mathscr{C}$ un cercle inclus dans un plan parallèle à (Oxy) et de centre $I \in (Oz)$. Le cône de centre O, d'axe (Oz) contenant le cercle $\mathscr{C}$ est l'ensemble des droites passant par O et un point de $\mathscr{C}$. Chacune de ces droites est appelée une *génératrice* du cône.

Propriété 10.5
Une équation cartésienne d'un cône de centre O et d'axe (Oz) est du type

$$x^2 + y^2 = \tan^2(\alpha)z^2$$

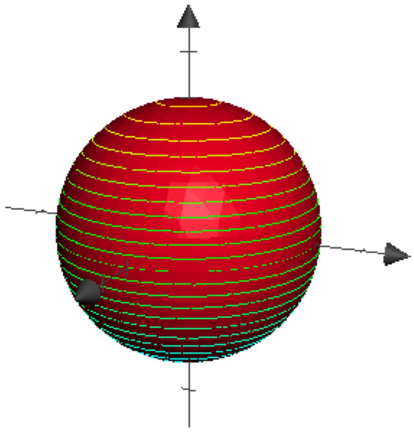
où α est l'angle formé par une génératrice et l'axe du cône.



Définition 10.10
Une sphère de centre Ω et de rayon $R > 0$ est l'ensemble des points situés à une distance R de Ω.

Propriété 10.6
L'équation cartésienne d'une sphère de centre $\Omega(\alpha;\beta;\gamma)$ et de rayon $R > 0$ est :

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$$



« *Deux choses sont infinies : l'univers et la bêtise humaine ; mais en ce qui concerne l'univers, je n'en ai pas encore acquis la certitude absolue.* »
Albert Einstein

Chapitre 11

Limites de suites

11.1 Limite d'une suite

11.1.1 Suite convergente

Définition 11.1
Soit u une suite. On dit que u admet pour limite L si tout intervalle ouvert contenant L contient tous les termes de la suite u à partir d'un certain rang.
Dans ce cas, on dit que la suite u *converge* vers L ou encore que u est *convergente* vers L et on écrit :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = L$$

Les suites qui ne convergent pas sont dites *divergentes*.

Remarque 11.1
Dire que *à partir d'un certain rang* tous les termes d'une suite u appartiennent à un intervalle I signifie qu'*il existe* un entier p tel que pour *tout* $n \geq p$ on a $u_n \in I$.

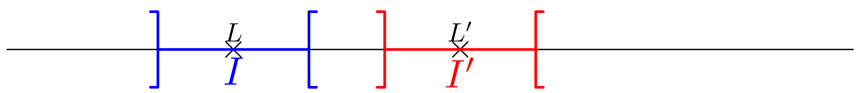
Propriété 11.1 (unicité de la limite)
Si u est une suite convergente alors sa limite est unique.

Démonstration :
Soit u une suite convergente. Supposons que u admette deux limites distinctes L et L'. On peut prendre par exemple $L < L'$ et on note $d = \frac{L'-L}{3}$.
Soit I l'intervalle $]L-d\,;\,L+d[$. La suite u converge vers L donc à partir d'un certains rang par exemple à partir de u_p tous les termes de u sont dans I car I est un intervalle ouvert contenant L. Ainsi :

si $n \geq p$ alors $u_n \in I$

Soit I' l'intervalle $]L'-d\,;\,L'+d[$. La suite u converge vers L' donc à partir d'un certains rang par exemple à partir de $u_{p'}$ tous les termes de u sont dans I' car I' est un intervalle ouvert contenant L'. Ainsi :

si $n \geq p'$ alors $u_n \in I'$



Ainsi, si $n \geq \max(p, p')$ (où $\max(p, p')$ est la plus grande valeur entre p et p') alors $u_n \in I \cap I'$. Or cette intersection est vide ! Notre supposition de départ est donc fausse : il n'existe donc qu'une seule limite.
Un tel raisonnement est appelé *raisonnement par l'absurde* : on suppose le contraire de ce qu'on veut montrer et on cherche à aboutir à une absurdité qui nous prouve alors que notre supposition était fausse.

Exemple 11.1
Quelques exemples à connaître :
- la suite u définie pour $n \in \mathbf{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n}$ converge vers 0 ;
- la suite u définie pour $n \in \mathbf{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n^2}$ converge vers 0 ;
- la suite u définie pour $n \in \mathbf{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ converge vers 0.

11.1.2 Suite divergente

Parmi les suites divergentes, on peut rencontrer plusieurs cas : celles qui admettent une limite infinie, celles qui ont des sous-suites convergentes, et les autres. . .

Exemple 11.2
Soit u, v et w les suites définies sur N par : $u_n = 2n + 3$, $v_n = \cos(n\pi)$ et w_n est la n^{e} décimale de π.
Les premiers termes de ces suites sont :

n	u_n	v_n	w_n
0	3	1	3
1	5	−1	1
2	7	1	4
3	9	−1	1
4	11	1	5
5	13	−1	9

On retrouve ici les trois cas :
- les termes de la suite u vont prendre des valeurs de plus en plus grandes et même aussi grandes que souhaité : u diverge vers $+\infty$;
- la suite v ne prend que deux valeurs : -1 et 1 ; la sous-suite des termes de rang pair est constante : sa limite vaut donc 1 et la sous-suite des termes de rangs impairs est aussi constante mais elle égale à -1 sa limite vaut -1 ;
- la suite w prend des valeurs entières comprises entre 0 et 9 : elle n'admet pas de limite et on ne peut dégager de sous-suite « régulière » qui converge.

Définition 11.2
Soit u une suite. On dit que u admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle ouvert du type $]A\,;\,+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On écrit alors :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

On dit aussi que u diverge vers $+\infty$.

Exemple 11.3
Quelques exemples à connaître :

– la suite u définie pour $n \in \mathbf{N}$ par $u_n = n$ diverge vers $+\infty$;
– la suite u définie pour $n \in \mathbf{N}$ par $u_n = n^2$ diverge vers $+\infty$;
– la suite u définie pour $n \in \mathbf{N}$ par $u_n = \sqrt{n}$ diverge vers $+\infty$.

Remarque 11.2
Sur le même modèle, on peut aussi définir [1] la notion de suite divergente vers $-\infty$.

11.2 Comparaison de suites

11.2.1 Critère de convergence

Théorème 11.1 (des gendarmes)
Soit u, v et w trois suites numériques telles que :
– à partir d'un certain rang [2] on a $u_n \leq v_n \leq w_n$;
– les suites u et w convergent toutes les deux vers une même limite L.
Alors la suite v est convergente et sa limite est aussi L.

Démonstration :
Soit I un intervalle ouvert contenant L. On a :
– la suite u converge vers L donc il existe un rang p tel que tous les termes de u à partir du rang p sont dans I ;
– la suite w converge vers L donc il existe un rang p' tel que tous les termes de w à partir du rang p' sont dans I ;
– d'après la première hypothèse, il existe un rang q tel que tous les termes de rang n supérieurs à q des suites u, v et v vérifient $u_n \leq v_n \leq w_n$.
Soit r la plus grande valeur parmi p, p' et q (on écrit $r = \max(p, p', q)$). On a alors :
– tous les termes de u de rang supérieur à r sont dans I ;
– tous les termes de w de rang supérieur à r sont dans I ;
– tous les termes de rang $n \geq r$ verifient $u_n \leq v_n \leq w_n$, donc $v_n \in I$.
En effet si $I =]a\,;b[$ on a $a \leq u_n \leq v_n \leq w_n < b$ donc $v_n \in]a\,;b[= I$.
Donc à partir du rang r tous les termes de la suite v sont dans I et donc la suite v converge vers L.

Exemple 11.4
Soit u la suite définie sur N^* par $u_n = \frac{5+\cos(n)}{n}$ pour $n > 0$. Montrer que la suite u est convergente vers 0.
Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on a $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ ainsi $4 \leq 5 + \cos(n) \leq 6$. En divisant par $n > 0$ on obtient : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\frac{4}{n} \leq u_n \leq \frac{6}{n}$.
On considère les suites a et b définie pour $n \in \mathbf{N}^*$ par $a_n = \frac{4}{n}$ et $b_n = \frac{6}{n}$. On a donc pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $a_n \leq u_n \leq b_n$. Les suites a et b sont évidemment convergente vers 0 (voir l'exemple 11.1) ; en appliquant le théorème des gendarmes, on obtient que la suite u converge aussi vers 0.

Exemple 11.5
La suite u définie pour $n \in \mathbf{N}^*$ par $u_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$ est-elle convergente ?

1. L'écriture de cette définition est laissée en exercice au lecteur consciencieux. . . Mais y en a-t-il ?
2. Voir la remarque 11.1

11.2.2 Critère de divergence

Théorème 11.2
Soit u et v deux suites numériques telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang. Alors :
- si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$;
- si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration :
elle est laissée en exercice. . .

11.3 Calculs de limites

11.3.1 Opérations algébriques

Théorème 11.3 (admis)
Soit u et v deux suites convergentes de limites respectives L et L'. Alors :
- la suite $(u_n + v_n)$ est convergente et sa limite est $L + L'$;
- la suite $(u_n \times v_n)$ est convergente et sa limite est $L \times L'$.
- si de plus v est une suite à termes tous non nuls et avec $L' \neq 0$ alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est convergente et sa limite est $\frac{L}{L'}$.

Exemple 11.6
Soit u la suite définie sur $\mathbf{N}$ par $u_n = \frac{2n^2+3n}{3n^2-1}$. Montrer que u est convergente et calculer sa limite.
On peut écrire pour $n \in \mathbf{N}^*$:

$$u_n = \frac{n^2\left(2+\frac{3}{n}\right)}{n^2\left(3-\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{2+\frac{3}{n}}{3-\frac{1}{n^2}}$$

On pose $a_n = 2 + \frac{3}{n}$. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 2$.
On pose $b_n = 3 - \frac{1}{n^2}$. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 3$ (voir l'exemple 11.1 page 88).
Ainsi u est le quotient de deux suites convergentes de limites respectives $L = 2$ et $L' = 3$ donc elle converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2}{3}$.

11.3.2 Cas des suites géométriques

Théorème 11.4
Soit q un réel non nul différent de 1. Alors :
- si $1 < q$, la suite (q^n) diverge vers $+\infty$;
- si $-1 < q < 1$, la suite (q^n) converge vers 0 ;
- si $q \leq -1$, la suite (q^n) n'a pas de limite.

Démonstration :
Cas où $q > 1$:
On a $q > 1$ donc il existe $t > 0$ tel que $q = 1 + t$. Ainsi pour $n \geq 2$, $q^n = (1+t)^n = 1 + nt + \cdots + nt^{n-1} + t^n$. Et donc on a $q^n \geq 1 + nt$.

On considère la suite u définie sur $\mathbf{N}$ par $u_n = 1 + nt$. Soit un intervalle du type $I =]A\,;\,+\infty[$ alors pour tout $n > \frac{A-1}{t}$, on a $u_n \in I$ donc cette suite u est divergente vers $+\infty$.
Ainsi, en utilisant le théorème 11.2 on a $q^n > u_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
Cas où $0 < q < 1$:
Soit I un intervalle ouvert contenant 0 ; il existe $A > 0$ tel que $]-\frac{1}{A}\,;\,\frac{1}{A}[\subset I$.
On a $0 < q < 1$ donc $\frac{1}{q} > 1$. Ainsi la suite $(\frac{1}{q^n})$ diverge vers $+\infty$ et donc il existe un rang p tel que tous les termes de la suite $(\frac{1}{q^n})$ sont dans $]A\,;\,+\infty[$.
Ainsi, pour $n \geq p$, on a $\frac{1}{q^n} > A$ donc $q^n < \frac{1}{A}$ donc $q^n \in]-\frac{1}{A}\,;\,\frac{1}{A}[$.
Donc à partir du rang p tous les termes de la suite q^n sont dans I donc la suite converge vers 0.
Cas où $-1 < q < 0$:
On remarque que $-|q|^n \leq q^n \leq |q|^n$ avec $(-|q|^n)$ et $(|q|^n)$ qui convergent toutes les deux vers 0, donc d'après le théorème des gendarmes, (q^n) converge aussi vers 0.
Cas où $q < -1$:
les termes de cette suite sont alternativement dans $]-\infty\,;\,-1[$ et dans $]1\,;\,+\infty[$ donc la suite de peut avoir de limite (ces deux intervalles étant disjoints).

Remarque 11.3
Le cas où $q = 1$ n'a pas d'intérêt majeur puisqu'alors la suite u est une suite constante : elle converge vers son premier terme.

« *Un statisticien est une personne qui peut avoir la tête dans un four et les pieds pris dans la glace et dire qu'en moyenne il se sent bien.* »
Benjamin Dereca

Chapitre 12

Statistiques

L'objet du chapitre est de donner des outils permettant d'exploiter de façon pertinente une série de données recueillies préalablement. L'utilisation des statistiques est présente dans beaucoup de domaines [1] ; elles servent notamment à constater, comparer ou prévoir certaines situations.

12.1 Vocabulaire des statistiques

La *population* est constituée des individus sur lesquels porte l'étude statistique. Les individus pouvant être des êtres humains, animaux, objets, villes, ... Le *caractère* est la propriété étudié chez ces individus ; par exemple la taille, l'âge, la couleur, le nombre d'habitants,. . .. Le nombre d'individus dans la population est appelé *l'effectif total*, souvent noté N.

Les caractères étudiés peuvent être *quantitatifs* (nombre de cigarettes par jour [2], âge, distance du lieu de travail, . . .) ou *qualitatifs* (couleur des cheveux, marque de voiture, numéro du département, . . .).

Lorsque le caractère étudié est quantitatif, il peut être *discret* (c'est à dire prenant un nombre de valeurs qu'on peut compter, par exemple le nombre de cigarettes) ou *continu* (c'est à dire pouvant prendre toute valeur d'un intervalle, par exemple la distance du lieu de travail). Dans les deux cas, on peut regrouper les données par *classes* : on considère que tous les individus ayant une valeur du caractère appartenant à un intervalle font partie d'un même « groupe » : la classe.

À chaque valeur (ou classe) du caractère, on associe un *effectif* n : c'est le nombre d'individus ayant pour caractère cette valeur ou une valeur dans l'intervalle qui définit la classe.

Une *série statistique* est la donnée (souvent sous forme de tableaux) des différentes classes de la population et de leurs effectifs correspondants.

À chaque valeur (ou classe) du caractère, on peut aussi associer une *fréquence* f qui est le quotient de l'effectif de la valeur (ou de la classe) par l'effectif total : $f = \frac{n}{N}$; la fréquence est un nombre compris entre 0 et 1. La somme des fréquences est toujours égale à 1. On exprime parfois les fréquences en pourcentages.

La suite de nombres constituée des fréquences des valeurs d'un caractère d'une série statistique est appelée *distribution des fréquences* de la série.

1. Même et surtout non-mathématiques
2. Fumer nuit à la santé.

12.2 Paramètres de tendance centrale

12.2.1 La médiane

Définition 12.1
La médiane d'une série statistique est la valeur de la variable qui partage la population en deux groupes de même effectif :
– ceux qui ont une valeur du caractère inférieure à la médiane ;
– ceux qui ont une valeur du caractère supérieure à la médiane.

Remarque 12.1
Deux cas sont possibles :
– s'il y a un nombre impair d'observations : $N = 2k + 1$, où $k \in \mathbf{N}$, alors la médiane est la $k + 1^{e}$ valeur du caractère (les valeurs étant rangées par ordre croissant) ;
– s'il y a un nombre pair d'observations : $N = 2k$, où $k \in \mathbf{N}$, alors on convient de prendre comme médiane la moyenne des k^{e} et $k + 1^{e}$ valeurs du caractère (les valeurs étant rangées par ordre croissant).

Exemple 12.1 (nombre impair d'observations)
On donne la série statistique suivante :

valeur	3	4	6	7
effectif	1	3	2	1

On a ici un effectif total de 7. La médiane est donc la 4^{e} valeur lorsqu'elles sont rangées par ordre croissant :
3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 6 ; 6 ; 7. La médiane vaut 4.

Exemple 12.2 (nombre pair d'observations)
On donne la série statistique suivante :

valeur	3	4	6	7
effectif	2	3	1	4

On a ici un effectif total de 10. La médiane est donc la moyenne de la 5^{e} et de la 6^{e} valeurs lorsqu'elles sont rangées par ordre croissant :
3 ; 3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 6 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7. La médiane vaut $\frac{4+6}{2} = 5$.

12.2.2 La moyenne

Définition 12.2
La moyenne d'une série statistique est le quotient de la somme de toutes les valeurs de la série (comptées autant de fois que leur effectif) par l'effectif total. En considérant une série statistique de N observations où la variable x prend p valeurs notées $x_1, x_2, \ldots, x_p$, chacune ayant un effectif noté n_i, on a :

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}{N}, \text{ où } \sum_{i=1}^{p} n_i x_i = n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_p x_p$$

Propriété 12.1 (linéarité de la moyenne)
- si on multiplie chaque valeur d'une série statistique par un réel a, alors la moyenne est multipliée par a ;
- si on ajoute à chaque valeur d'une série statistique un nombre réel b, alors la moyenne est augmentée de b (si $b < 0$, il s'agira d'une « augmentation négative »).

C'est-à dire que si on a une série statistique x de moyenne $\overline{x}$ et si a et b sont deux réels ; en considérant y la série statistique définie par $y_i = ax_i + b$ pour tout i, on a alors : $\overline{y} = a\overline{x} + b$.

Propriété 12.2 (écarts à la moyenne)
La moyenne des écarts à la moyenne est nulle : Soit x une série statistique de moyenne $\overline{x}$. La série statistique y définie par $y_i = x_i - \overline{x}$ a une moyenne nulle.

Propriété 12.3 (moyennes partielles)
Soit x et y deux séries statistiques d'effectifs respectifs N et P. On considère la série statistique z constituée du regroupement des séries x et y. On a :

$$\overline{z} = \frac{N\overline{x} + P\overline{y}}{N + P}$$

Exemple 12.3
Lors d'un contrôle, la moyenne des 15 filles d'une classe était de 12/20. La moyenne des 10 garçons de 11/20. La moyenne de la classe est :

$$M = \frac{15 \times 12 + 10 \times 11}{15 + 10} = 11{,}6$$

12.3 Paramètres de dispersion

Les paramètres de positions sont insuffisants pour étudier correctement une série statistique : deux séries ayant les mêmes paramètres peuvent être très différentes.

Exemple 12.4
On donne les résultats de deux groupes d'élèves à un même contrôle :

Groupe 1 :

note x	3	5	6	7	8	9	10	13	14	18	20
effectif	1	1	2	2	4	2	1	2	3	1	1

Groupe 2 :

note y	1	2	3	4	13	14	18	19	20
effectif	3	2	2	4	1	2	4	2	2

Ces deux séries ont pour moyenne $\overline{x} = \overline{y} = 10$ et pour médiane $\text{Med}_x = \text{Med}_y = 8{,}5$.

12.3.1 L'étendue

Définition 12.3
L'*étendue* d'une série statistique est la différence entre les deux valeurs extrêmes observées.

Exemple 12.5
Dans l'exemple 12.4, l'étendue du groupe 1 vaut $20 - 3 = 17$, et l'étendue du groupe 2 vaut $20 - 1 = 19$.

12.3.2 Les quantiles

Définition 12.4
Soit x une série statistique avec $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ (les x_i ne sont pas forcément distincts deux à deux).
Les *quartiles* (au nombre de 3 : Q_1, Q_2 et Q_3) partagent la population classée par ordre croissant de valeur du caractère en quatre sous ensembles, en respectant les règles ci-dessous :
- Q_1 est la valeur x_i dont l'indice i est le plus petit entier supérieur ou égal à $n/4$;
- Q_2 est la valeur x_i dont l'indice i est le plus petit entier supérieur ou égal à $n/2$;
- Q_3 est la valeur x_i dont l'indice i est le plus petit entier supérieur ou égal à $3n/4$.

Définition 12.5
Soit x une série statistique avec $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ (les x_i ne sont pas forcément distincts deux à deux).
Les *déciles* (au nombre de 9 : $D_1, \ldots, D_9$) partagent la population classée par ordre croissant de valeur du caractère en dix sous ensembles, en respectant les règles ci-dessous :
- D_1 est la valeur x_i dont l'indice i est le plus petit entier supérieur ou égal à $n/10$;
- .... ;
- D_9 est la valeur x_i dont l'indice i est le plus petit entier supérieur ou égal à $9n/10$.

Remarque 12.2
En exercices, on ne s'intéressera qu'aux premier et troisième quartiles ainsi qu'aux premier et neuvième déciles.

Définition 12.6
La détermination des quartiles et déciles permet de calculer :
- l'*écart interquartile* est la différence entre le 3^{e} et le 1er quartile. Au moins 50% des observations ont une valeur du caractère comprise entre Q_1 et Q_3 ;
- l'*écart interdécile* est la différence entre le 9^{e} et le 1er décile. Au moins 80% des observations ont une valeur du caractère comprise entre D_1 et D_9.

Exemple 12.6
Calculer les trois quartiles et les 1er et 9^{e} déciles de chacune des séries de l'exemple 12.4 :

Série x : $n = 20$ donc $n/4 = 5$ et $3n/4 = 15$; on a donc : $Q_1 = x_5 = 7$ et $Q_3 = x_{15} = 13$.
$n/10 = 2$ et $9n/10 = 18$ donc $D_1 = x_2 = 5$ et $D_9 = x_{18} = 14$.

Série y : $n = 22$ donc $n/4 = 5{,}5$ et $3n/4 = 16{,}5$; on a donc $Q_1 = y_6 = 3$ et $Q_3 = y_{17} = 18$.
$n/10 = 2{,}2$ et $9n/10 = 19{,}8$ donc $D_1 = y_3 = 1$ et $D_9 = y_{20} = 19$.

Remarque 12.3
On pourra se réferer à l'annexe C de la page 115 pour l'obtention des paramètres statistiques à l'aide de la calculatrice.
Attention : la calculatrice ne calcule pas les quartiles à l'aide de la définition de ce cours [3] mais en prenant la médinane de la « sous-série inférieure » constituée des valeurs inférieures à la médiane. Cependant sur une série ayant un grand nombre de valeurs ces deux définitions sont équivalentes.
En exercice, il faut donc préciser la méthode utilisée pour déterminer les quartiles : « à la main » ou à la calculatrice.

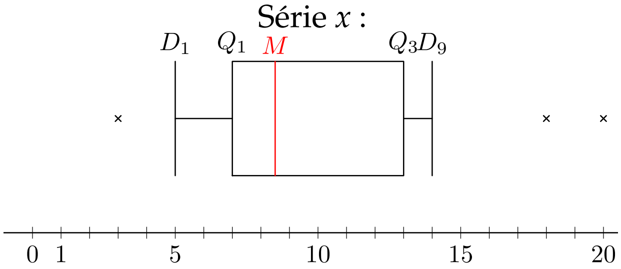
3. Qui est pourtant celle recommandée par les programmes officiels du lycée. . .

12.3.3 Application : les diagrammes en boîtes

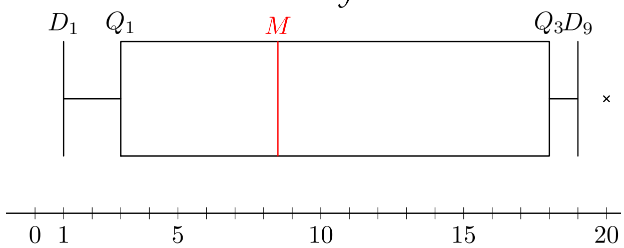
La représentation graphique de la dispersion d'une série statistique se fait à l'aide de graphiques appelés *diagrammes en boites*, *boites à moustaches*, ou *box plot*, voire *diagramme de Tuckey*. On les trace comme ceci :
- on construit en face d'un axe gradué, permettant de repérer les valeurs extrêmes de la série étudiée, un rectangle dont la longueur est égale à l'écart interquartile et dans lequel on représente la médiane par un trait ;
- deux traits repèrent les 1^er et 9^e déciles. Les valeurs inférieures à D_1 ou supérieures à D_9 sont représentées par des points.

Exemple 12.7
On reprend les deux séries de l'exemple 12.4 :

Série x :



Série y :



Remarque 12.4
Parfois on ne représente pas les déciles. Les « traits extrêmes » sont alors les valeurs extrêmes ; c'est d'ailleurs ce que font vos calculatrices...

On pourra se réferer à l'annexe C de la page 115 pour l'obtention des boites à moustaches à l'aide de la calculatrice.

12.3.4 Variance et écart type

Théorème 12.1
La moyenne $\overline{x}$ d'une série statistique x est le nombre qui minimise la somme :

$$S(x) = \sum_{i=1}^{p} n_i(x - x_i)^2$$

Démonstration :
La somme S est un polynôme du second degré : $S(x) = ax^2 + bx + c$.
En développant chaque identité remarquable de la somme, on obtient :

$$a = \sum_{i=1}^{p} n_i; \quad b = -2\sum_{i=1}^{p} n_i x_i; \quad c = \sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2$$

Étudions les variations de S :

$$\text{pour } x \in \mathbf{R}, \quad S'(x) = 2ax + b = 2\sum_{i=1}^{p} n_i \times x - 2\sum_{i=1}^{p} n_i x_i$$

Ainsi $S'(x)$ s'annule pour $x_0 = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{p} n_i} = \overline{x}$. Le coeffcient a étant positif, la valeur qui annule la dérivée correspond donc au minimum de la fonction polynôme du second degré.

Définition 12.7
La *variance* est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne. C'est un nombre positif.

$$V = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{N} = \frac{n_1 \left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + \cdots + n_p \left(x_p - \overline{x}\right)^2}{N}$$

Propriété 12.4

$$V(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i^2}{N} - \overline{x}^2 = \frac{n_1 x_1^2 + \cdots + n_p x_p^2}{N} - \overline{x}^2$$

Exemple 12.8
En reprenant le groupe 1 de l'exemple 12.4, on peut calculer la variance de deux façons différentes :

avec la définition 12.7 :

$$V = \frac{1 \times (3 - 10)^2 + \cdots + 1 \times (20 - 10)^2}{20} = \frac{372}{20} = 18{,}6$$

avec la propriété 12.4 :

$$V = \frac{1 \times 3^2 + \cdots + 1 \times 20^2}{20} - 10^2 = \frac{2372}{20} - 10^2 = 118{,}6 - 100 = 18{,}6$$

Définition 12.8
L'*écart type* d'une série statistique est égal à la racine carrée de la variance :

$$s = \sqrt{\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{N}}$$

Remarque 12.5
L'écart type permet de mesurer la dispersion d'une série statistique ; à moyenne égale, plus il est important, plus les valeurs observées sont dispersées. Son avantage par rapport à la variance est qu'il est exprimé dans la même unité que les valeurs de la série.

« Un statisticien est une personne qui peut avoir la tête dans un four et les pieds pris dans la glace et dire qu'en moyenne il se sent bien. »
Benjamin Dereca

Chapitre 13

Comportement asymptotique

L'objet du chapitre est l'étude du comportement des nombres $f(x)$ (où f est une fonction numérique) lorsque x devient « très grand » en valeur absolue ou qu'il se rapproche d'une valeur interdite de la fonction.

Exemple 13.1
La fonction f définie par $f(x) = 2 + \frac{1}{x+1}$ a pour valeur interdite $x = -1$: il est impossible de calculer $f(-1)$.
Dans ce chapitre on essaiera d'étudier les valeurs de $f(x)$ lorsque x est une valeur très proche -1 ou encore lorsque x devient très grand en valeur absolue.

13.1 Limites d'une fonction lorsque x tend vers $+\infty$

Dans ce paragraphe, f est une fonction dont l'ensemble de définition contient un intervalle du type $]a; +\infty[$.

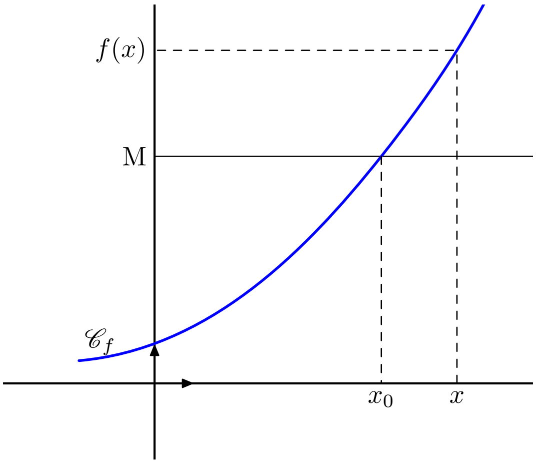
13.1.1 Limite infinie en $+\infty$

Définition 13.1
On dit que f a pour limite $+\infty$ lorque x tend vers $+\infty$ si, lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, les nombres $f(x)$ peuvent devenir plus grands que n'importe quel réel M fixé, aussi grand soit-il. On écrit :

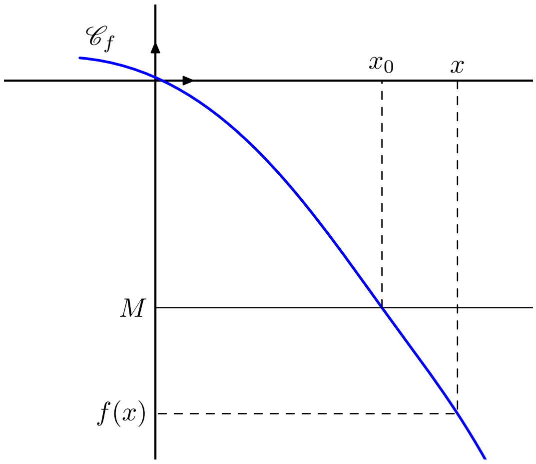
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

On dit que f a pour limite $-\infty$ lorque x tend vers $+\infty$ si, lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, les nombres $f(x)$ sont négatifs et peuvent devenir en valeur absolue plus grands que n'importe quel réel M fixé, aussi grand soit-il. On écrit :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

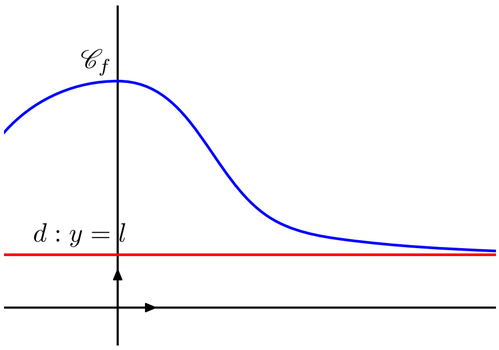
Propriété 13.1 (admise)
Les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$ ont pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

13.1.2 Limite réelle en $+\infty$. Asymptote horizontale en $+\infty$

Définition 13.2
Soit l un réel. On dit que f a pour limite l lorque x tend vers $+\infty$ si, lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, les nombres $f(x)$ se rapprochent de plus en plus de l. C'est à dire que pour tout nombre positif α, aussi proche de 0 soit-il, les nombres $f(x)$ sont tous dans l'intervalle $]l - \alpha; l + \alpha[$ pour les x suffisamment grands. On écrit :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

Dans ce cas, on dit que la droite d'équation $y = l$ est *asymptote horizontale* à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$: la courbe se rapproche de plus en plus de la droite lorsque les x deviennent de plus en plus grands.



Propriété 13.2 (admise)
Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ ont pour limite $l = 0$ en $+\infty$.

13.2 Limite d'une fonction lorsque x tend vers $-\infty$

Dans ce paragraphe, f est une fonction dont l'ensemble de définition contient un intervalle du type $]-\infty; b[$.

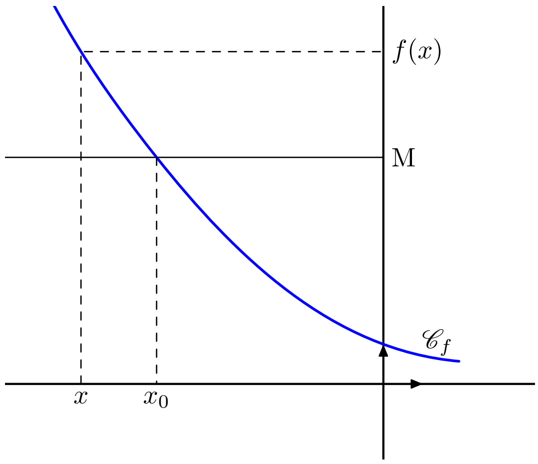
13.2.1 Limite infinie en $-\infty$

Définition 13.3
On dit que f a pour limite $+\infty$ lorque x tend vers $-\infty$ si, lorsque pour les x négatifs prenant des valeurs de plus en plus grandes en valeurs absolues, les nombres $f(x)$ peuvent devenir plus grands que n'importe quel réel M fixé, aussi grand soit-il. On écrit :

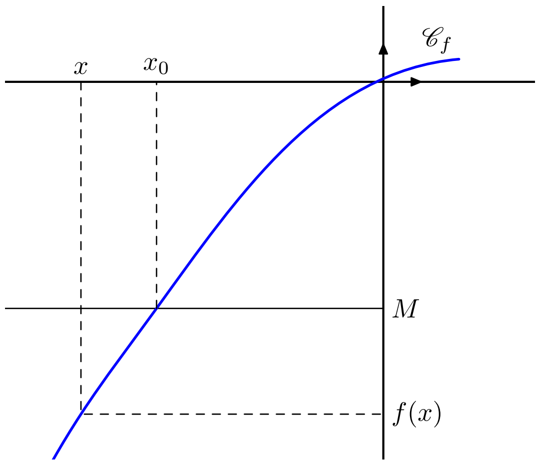
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

On dit que f a pour limite $-\infty$ lorque x tend vers $-\infty$ si, lorsque pour les x négatifs prenant des valeurs de plus en plus grandes en valeurs absolues, les nombres $f(x)$ sont négatifs et peuvent devenir en valeur absolue plus grands que n'importe quel réel M fixé, aussi grand soit-il. On écrit :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$



$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$



$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Propriété 13.3 (admise)
La fonction $x \mapsto x^2$ a pour limite $+\infty$ en $-\infty$.
La fonction $x \mapsto x^3$ a pour limite $-\infty$ en $-\infty$.
On écrit : $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

13.2.2 Limite réelle en $-\infty$. Asymptote horizontale en $-\infty$

Définition 13.4
Soit l un réel. On dit que f a pour limite l lorque x tend vers $-\infty$ si, lorsque x est négatif et qu'il prend des valeurs de plus en plus grandes en valeurs absolues, les nombres $f(x)$ se rapprochent de plus en plus de l. C'est à dire que pour tout nombre positif α, aussi proche de 0 soit-il, les nombres $f(x)$ sont tous dans l'intervalle $]l-\alpha; l+\alpha[$ pour les x négatifs avec $|x|$ suffisamment grand. On écrit :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$$

Dans ce cas, on dit que la droite d'équation $y = l$ est *asymptote horizontale* à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$: la courbe se rapproche de plus en plus de la droite lorsque les x sont négatifs et qu'ils deviennent de plus en plus grands en valeurs absolues.

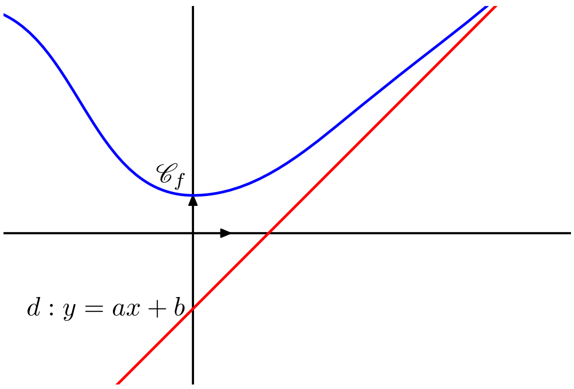
Propriété 13.4 (admise)
Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ ont pour limite 0 en $-\infty$. On écrit :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0; \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0; \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

13.2.3 Asymptote oblique

Définition 13.5
On dit que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = ax + b$ est *asymptote oblique* en $+\infty$ (resp. $-\infty$) à la courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f lorsque :

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0 \quad \left(\text{resp. } \lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0\right)$$



d est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

13.2.4 Fonctions sans limite en $\pm\infty$

Certaines fonctions n'admettent pas de limite de $+\infty$ ou en $-\infty$. C'est par exemple le cas des fonctions cos et sin qui n'ont pas de limite ni en $+\infty$, ni en $-\infty$.

13.3 Limite d'une fonction lorsque x tend vers un réel a

Dans cette partie, on considère une fonction numérique f ayant un ensemble de définition $\mathscr{D}_f$. a désigne un réel vérifiant une des deux propositions ci-dessous :
- ou bien $a \in \mathscr{D}_f$;
- ou bien a est une borne d'un intervalle contenu dans $\mathscr{D}_f$.

Exemple 13.2
Si f est une fonction dont l'ensemble de définition est $\mathscr{D}_f =]-\infty; -1[\cup]+1; +\infty[$, (par exemple, f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$) alors soit $a \in \mathscr{D}_f$, soit $a = -1$ ou $a = 1$.

13.3.1 Limite infinie en a

Définition 13.6
On dit que f a pour limite $+\infty$ en a (ou quand x tend vers a) si, lorsque x prend des valeurs

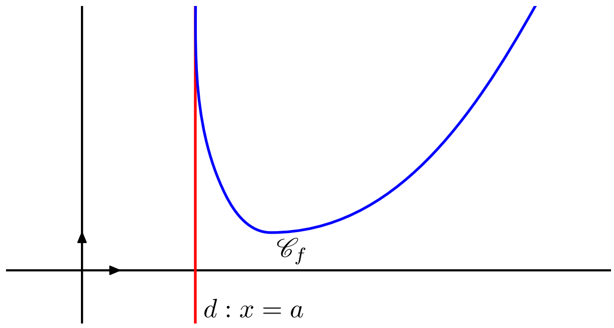
de plus en plus proches de a, les nombres $f(x)$ peuvent devenir plus grands que n'importe quel réel M fixé. On écrit :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

On dit que f a pour limite $-\infty$ en a (ou quand x tend vers a) si, lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a, les nombres $f(x)$ sont négatifs et peuvent devenir, en valeurs absolues, plus grands que n'importe quel réel M fixé. On écrit :

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Dans ces deux cas, on dit que la droite d'équation $x = a$ est *asymptote verticale* à la courbe $\mathscr{C}_f$.



Exemple 13.3
Soit f la fonction définie sur $\mathscr{D}_f =]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
$a = 0$ est une borne de $\mathscr{D}_f$. On peut donc étudier la limite de f lorsque x tend vers 0 : lorsque x se rapproche de 0, $\sqrt{x}$ se rapproche également de 0 tout en restant positif, donc les nombres $f(x)$ deviennent aussi grands qu'on le souhaite. Ainsi :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

L'axe des ordonnées (d'équation $x = 0$) est donc asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

Remarque 13.1
La fonction inverse ($f : x \mapsto \frac{1}{x}$) n'a pas une mais deux limites en 0 : en effet, si x se rapproche de plus en plus de 0, soit on a $x < 0$ soit on a $x > 0$.
Dans le premier cas, les valeurs de $f(x)$ sont négatives et leurs valeurs absolues deviennent de plus en plus grandes ; on dit que la limite à gauche en 0 est $-\infty$:

$$\lim_{x \to 0;\ x<0} f(x) = -\infty$$

Dans le deuxième cas, les valeurs de $f(x)$ sont positives et deviennent de plus en plus grandes ; on dit que la limite à droite en 0 est $+\infty$:

$$\lim_{x \to 0;\ x>0} f(x) = +\infty$$

13.3.2 Limite finie en a

Définition 13.7
Soit $l \in \mathbf{R}$. On dit que f a pour limite l en a (ou quand x tend vers a) si, lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a, les nombres $f(x)$ se rapprochent de plus en plus de l.
On écrit :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

On admet les résultats suivants :
– lorsque $a \geq 0$, $\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.
– si f est une fonction polynôme et $a \in \mathbf{R}$, on a : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
– si f est le quotient de deux polynômes et $a \in \mathcal{D}_f$, on a : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

13.4 Théorèmes sur les limites

Dans les tableaux suivants, l et l' sont des nombres réels finis. Ces tableaux résument les propriétés à connaitre sur les sommes, produits et quotients de limites de deux fonctions f et g.
Ces propriétés sont valables pour des limites en $+\infty$, en $-\infty$ ou en a. Lorsque les cases contiennent « F.I. », il s'agit d'une forme indéterminée : on ne peut pas conclure (ça dépend des cas).

13.4.1 Limite d'une somme

Si f a pour limite	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors, $f+g$ a pour limite	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

13.4.2 Limite d'un produit

Si f a pour limite	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et si g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+/-\infty$
$f \times g$ a pour limite	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

13.4.3 Limite d'un quotient $\frac{f}{g}$

13.4.3.1 Cas où la limite de la fonction g n'est pas nulle

Si f a pour limite	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+/-\infty$
et si g a pour limite	$l' \neq 0$	$+/-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$+/-\infty$
$\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

13.4.3.2 Cas où la limite de la fonction g est nulle

Si f a pour limite	$l > 0$ ou $+\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	0
et si g a pour limite	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
$\dfrac{f}{g}$ a pour limite	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

13.4.4 Formes indéterminées

Les cas de formes indéterminées sont au nombre de quatre :

$$\infty - \infty; \quad 0 \times \infty; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad \frac{0}{0}$$

13.5 Exemples

13.5.1 Étude de fonction

Soit f la fonction définie par $f(x) = 3 + \dfrac{2}{x+2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Étudier la fonction f, donner le tableau de variation et tracer sa courbe représentative.

1. f est définie pour les valeurs de x qui n'annulent pas le dénominateur, soit pour $x \neq -2$. $\mathscr{D}_f = \mathbf{R}\backslash\{-2\}$ ou encore $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$.
2. Les bornes de $\mathscr{D}_f$ sont $-\infty$, -2 et $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}(2) = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty}(x+2) = -\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x+2} = 0 \quad \text{ainsi,} \lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$$

$$\lim_{x\to+\infty}(2) = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}(x+2) = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x+2} = 0 \quad \text{ainsi,} \lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$$

Donc la droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Il reste à étudier la limite lorsque x tend vers -2. Ici, deux études sont à faire : à gauche (lorsque x reste inférieur à -2) et à droite (lorsque x reste supérieur à -2).

– si $x < -2$, alors $x+2 < 0$. Donc $\displaystyle\lim_{x\to-2, x<-2}\frac{2}{x+2} = -\infty$ ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to-2,\ x<-2} f(x) = -\infty$.

– si $x > -2$, alors $x+2 > 0$. Donc $\displaystyle\lim_{x\to-2, x>-2}\frac{2}{x+2} = +\infty$ ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to-2,\ x<-2} f(x) = +\infty$.

Donc la droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

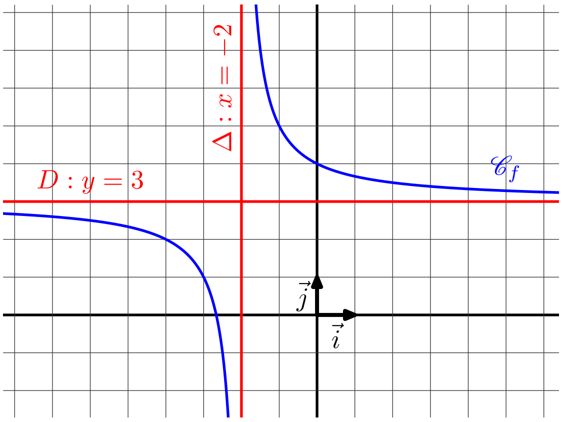
3. La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition. Donc :

$$\text{pour } x \neq -2, f'(x) = 0 + \frac{0\times(x+2) - 2\times 1}{(x+2)^2} = -\frac{2}{(x+2)^2} < 0$$

Ainsi, f est strictement décroissante sur $]-\infty;-2[$ et sur $]-2;+\infty[$. On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
f	3	$\searrow$ $-\infty$	||	$+\infty$ $\searrow$	3

Après avoir établi un tableau de valeurs on obtient la courbe suivante avec le tracé des deux asymptotes :



13.5.2 Levée d'indétermination

Exemple 13.4
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$. Le calcul de la limite de $f(x)$ en $-\infty$ ne pose pas de problème (somme de limites valant $+\infty$ et de 5). Par contre lors du calcul de la limite en $+\infty$ on se trouve face à une indétermination du type $+\infty - \infty$. Pour « lever l'indétermination », nous allons factoriser l'expression de $f(x)$ par le « monôme » de plus haut degré :

$$f(x) = x^2 \times 2 - x^2 \times \frac{3}{x} + x^2 \times \frac{5}{x^2} = x^2\left(2 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}\right)$$

Et on a :

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty} 2 = 2 \\ \lim_{x\to+\infty} -\frac{3}{x} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x^2} = 0 \end{array}\right\} \text{donc : } \left.\begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty} \left(2 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}\right) = 2 \\ \\ \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \end{array}\right\} \text{par produit : } \lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$$

Remarque 13.2
Cette méthode (factorisation par le monôme de plus haut degré) permet de lever toutes les indéterminations de fonctions polynômes en $+\infty$ ou en $-\infty$.

Exemple 13.5
Calculer la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de $x^4 + 2x^3 - x^2 - 3x + 4$.

Chapitre 14

Homothéties

« *Un statisticien est une personne qui peut avoir la tête dans un four et les pieds pris dans la glace et dire qu'en moyenne il se sent bien.* »
Benjamin Dereca

Chapitre 15

Probabilités

« *Pascal combattait ses maux de têtes avec des problèmes de géométrie. . . Moi je combattais la géométrie en feignant d'avoir des maux de tête.* »
Tristan Bernard

Annexe A

Second degré

Voici le programme permettant à votre calculatrice de vous donner le discriminant et les éventuelles racines d'un polynôme du second degré s'écrivant sous la forme $Ax^2 + Bx + C$:

Programme pour une casio :

```
"CALCUL DISCRIMINANT :"
"AX² + BX + C"
"A" ?→A
"B" ?→B
"C" ?→C
"DELTA=" :B² − 4 × A × C → D◢
D=0⇒Goto 1
D<0⇒Goto 2
D>0⇒Goto 3
Lbl 1
"UNE SOLUTION"
−B/(2 × A)◢
Stop
Lbl 2
"AUCUNE SOLUTION"
Stop
Lbl 3
"2 SOLUTIONS"
"X1=" :(−B − √D)/(2 × A)◢
"X2=" :(−B + √D)/(2 × A)◢
Stop
```

Programme pour une TI :

```
PROGRAM :DEGRE2
Disp "CALCUL DISCRIMINANT :"
Disp "AX² + BX + C"
Prompt A,B,C
ClrHome
B² − 4 × A × C → D
Disp "DISCRIMINANT",D
If abs(D)=0
Then
Disp "1 SOLUTION",−B/(2 × A)◢
Else
If D > 0
Then
Disp "2 SOLUTIONS"
Disp (−B − √(D))/(2 × A)◢
Disp (−B + √(D))/(2 × A)◢
Else
Disp "AUCUNE SOLUTION"
End
End
```

« *Pascal combattait ses maux de têtes avec des problèmes de géométrie. . . Moi je combattais la géométrie en feignant d'avoir des maux de tête.* »
Tristan Bernard

Annexe B

Dérivées des fonctions usuelles

Dans la suite de ce formulaire, k est un réel quelconque fixé et n est un entier naturel non nul.

Fonction f	Dérivée f'	Ensemble de dérivabilité de f
$x \mapsto k$	$x \mapsto 0$	$\mathbf{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	$\mathbf{R}$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto 2x$	$\mathbf{R}$
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbf{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbf{R}_+^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbf{R}^*$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto -\sin(x)$	$\mathbf{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbf{R}$

Quelques rappels :
- si f est dérivable sur I, alors, kf est dérivable sur I, et $(kf)' = kf'$;
- si u et v sont dérivables sur I, alors $u + v$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$;
- si u et v sont dérivables sur I, alors uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$;
- si u et v sont dérivables sur I, avec pour $x \in I, v(x) \neq 0$, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$.

« Il n'y a pas de problème. Il n'y a que des professeurs. »
JACQUES PRÉVERT

Annexe C

Calculatrices et statistiques

Voici le détail des manipulations à effectuer pour obtenir les paramètres statistiques et la boite à moustaches d'une série statistique à une variable x ; chaque x_i ayant un effectif n_i.

Pour les « casio »

Entrée de la série : Sélectionner le menu 2 et entrer dans la colonne `LIST1` les valeurs de la série, puis dans la colonne `LIST2` les effectifs correspondants.

Obtention des paramètres :

- Appuyer sur `F2(CALC)`, puis sur `F6(SET)` (ou `F4` sur la graph25).
- Sur la ligne `1VARXLIST`, indiquer `LIST1` avec les touches de fonctions ; sur la ligne `1VARFREQ`, indiquer `LIST2`. Terminer en appuyant sur `QUIT`.
- En appuyant sur la touche de fonction correspondant à `1VAR`, on obtient les paramètres de la série : $\overline{x}$ (moyenne), x_{σ_n} (écart type), n (effectif total), Q_1 (premier quartile), ...

Tracé de la boite à moustaches :

- Dans le menu 2 (STAT), selectionner le menu `GRAPH`.
- Sélectionner le menu `SET` (touche `F6` ou `F4` deux fois sur la graph25).
- Sur la ligne `G-Type`, choisir l'option `BOX` (en appuyant éventuellement sur `F4`).
- Sur la ligne `1VARXLIST`, indiquer `LIST1` avec les touches de fonctions ; sur la ligne `1VARFREQ`, indiquer `LIST2`. Terminer en appuyant sur `QUIT`.
- Appuyer sur `F1 (GRAPH1)` pour obtenir la boite à moustaches.

Pour les « TI »

Entrée de la série : Appuyer sur la touche `STAT`, puis sur `1:EDIT`. Dans la colonne `L1`, saisir les valeurs de la série et dans la colonne `L2` les effectifs correspondants. Appuyer à nouveau sur `STAT`.

Obtention des paramètres :

- Sélectionner l'onglet `CALC` (avec la flèche droite) et appuyer sur la touche `1:1-Var Stats`. Appuyer sur `2ND`, puis `1` pour afficher `L1`, puis `,2ND 2` (ne pas oublier la « `,` »)
- Appuyer sur `ENTER` pour obtenir les paramètres : $\overline{x}$ (moyenne), σ_x (écart-type), n (effectif total), Q_1 (premier quartile), ...

Tracé de la boite à moustaches :

- Sélectionner le menu `STATPLOT` en appuyant sur `2ND` et `Y=`.
- Appuyer sur `1` et sélectionner l'option `ON`.
- Sur la ligne `Type`, sélectionner la boite à moustaches (cinquième type de graphiques).
- Sur la ligne `XList`, choisir `L1` (en appuyant sur `2ND` puis `1`).
- Sur la ligne `Freq`, choisir `L2`
- Dans le menu `WINDOW`, indiquer comme `Xmin` un nombre inférieur à la plus petite valeur de la série, et comme `Xmax`, un nombre supérieur à la valeur maximale de la série.
- Appuyer sur la touche `GRAPH`.

« Les maths c'est comme l'amour. Une idée simple mais qui peut parfois se compliquer »
Robert Drabek

Annexe D

Résolution de systèmes par la méthode de Gauss

Le but de la méthode de Gauss est de trouver un système triangulaire [1] *équivalent* au système de départ (c'est à dire ayant le même ensemble solution). Pour cela on va effectuer des combinaisons linéaires sur les lignes du système pour « éliminer » successivement une inconnue dans les deuxième et troisième équations puis une autre dans la troisième équation.

Exemple D.1

Résoudre le système (S) : $\begin{cases} 3x+2y-5z=-25 & (L_1) \\ x+6y-z=-13 & (L_2) \\ 2x-4y+2z=18 & (L_3) \end{cases}$

On recopie la première équation ; on remplace la deuxième par la première à laquelle on soustrait trois fois la seconde ; on remplace la troisième par le double de la première moins le triple de la troisième. Ainsi, l'inconnue x est éliminée des lignes 2 et 3 du système :

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x+2y-5z=-25 & (L_1) \\ -16y-2z=14 & (L_1-3L_2 \to L_2') \\ 16y-16z=-104 & (2L_1-3L_3 \to L_3') \end{cases}$$

On recopie les lignes 1 et 2 du sytème ; on remplace la troisième par la somme des lignes 2 et 3. ainsi, l'inconnue y est éliminée de la troisième équation ; le système est alors triangulaire :

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x+2y-5z=-25 & (L_1) \\ -16y-2z=14 & (L_2') \\ -18z=-90 & (L_2'+L_3' \to L_3'') \end{cases}$$

La troisième équation permet de calculer z. en remplaçant dans l'équation de la ligne 2, on obtient alors y puis x en remplaçant dans la ligne 1

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-25-2\times\frac{3}{2}+5\times 5}{3}=1 \\ y=\frac{14+2\times 5}{-16}=-\frac{3}{2} \\ z=\frac{-90}{-18}=5 \end{cases}$$

La solution du système est $\mathscr{S}=\left\{(1;-\frac{3}{2};5)\right\}$.

1. Un système triangulaire est un système où il n'y a qu'une inconnue dans la dernière équation, deux inconnues dans l'avant dernière équation, . . .