Chapitre 10

Géométrie spatiale

10.1 Perspective cavalière

10.1.1 Histoire

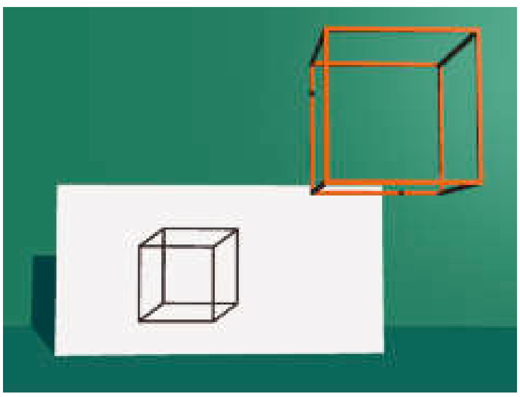
Une représentation en perspective d'un solide de l'espace (à trois dimensions) sur un plan (deux dimensions) n'est pas évidente. Il existe plusieurs types de représentations en perspective. Dans la suite, nous étudierons la perspective *cavalière*, résultat d'une projection du solide sur un plan suivant une direction donnée.
L'architecte Jacques Androuët du Cerceau (1510 - 1589) est l'un des premiers à employer la perspective cavalière de manière méthodique. Dans ses représentations, la façade du bâtiment est représentée à l'échelle. La perspective cavalière actuellement utilisée en architecture est celle dûe à Auguste Choisy (1841 - 1909). Dans cette perspective, ce sont les plans horizontaux qui sont représentés à l'échelle. L'avantage est que le plan du bâtiment n'est pas déformé : seules les lignes verticales sont réduites.
L'origine de l'expression *perspective cavalière* n'est pas connue avec certitude. Deux explications sont communément admises :

- une origine serait qu'un cavalier regardant du haut de son cheval un objet posé au sol le voit quasiment en perspective parallèle ;
- une autre origine tient au mot *cavalier* qui, en vocabulaire des fortifications, est un haut monticule de terre ; ainsi un observateur situé sur ce cavalier a une vue sur la campagne environnante proche d'une représentation en perspective cavalière.

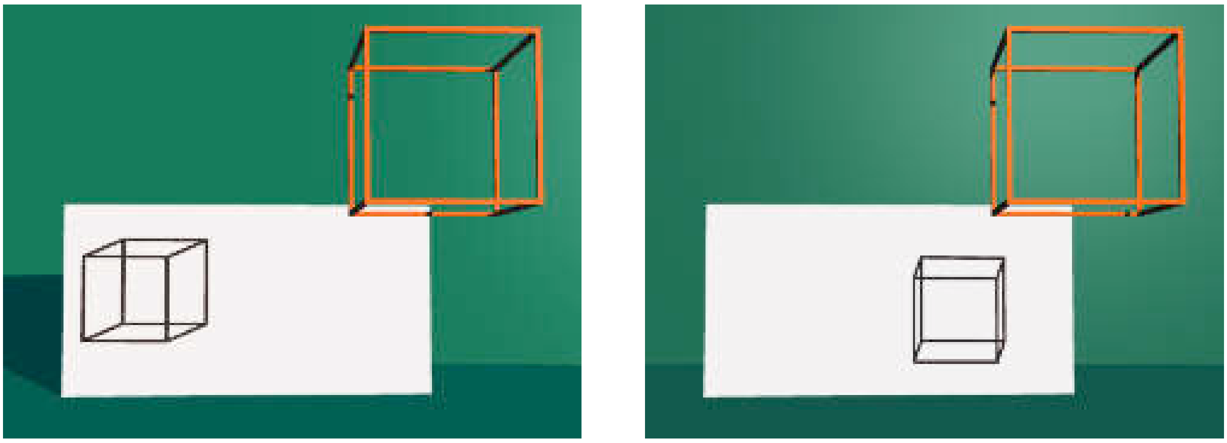
10.1.2 Un exemple

On place un cube dans l'espace, face à un écran vertical. Une source lumineuse éclaire l'écran depuis l'arrière du cube ; tous les rayons lumineux étant parallèles les uns par rapport aux autres. Le cube est placé de sorte que deux de ses faces soient parallèles à l'écran et que deux autres soient horizontales.
Si les rayons de la source lumineuse ne sont pas perpendiculaires à l'écran, on obtient sur cet écran une *représentation en perspective cavalière* du cube.
Si les rayons sont perpendiculaires à l'écran, on parle de perspective orthogonale. Dans la suite, on considèrera qu'on n'est pas dans cette situation.

Perspective cavalière :



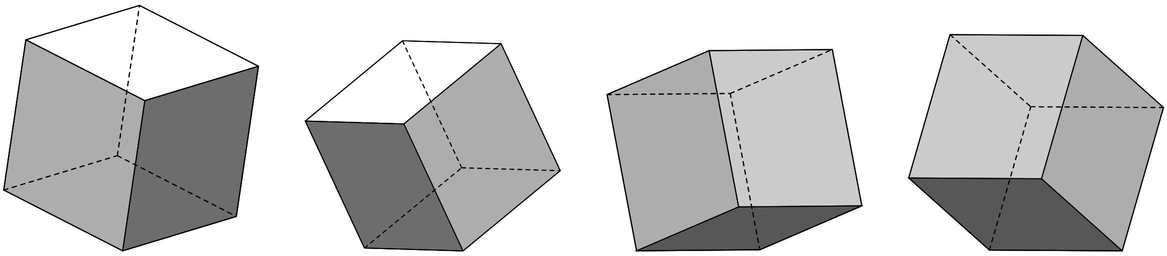
Lorsqu'on représente un solide en perspective cavalière, la figure obtenue n'est pas unique. En effet elle dépend de la position du cube et de la source de lumière par rapport à l'écran. Ainsi, un même cube peut avoir plusieurs représentations en perspective :



En fait, une représentation en perspective cavalière est l'ombre de l'objet sur un écran.

10.1.3 Vocabulaire

le point de vue : c'est la position de l'observateur. Pour que la représentation donne une impression de volume, il faut que le point de vue soit décalé horizontalement et verticalement par rapport à l'objet :



un même cube depuis différents points de vue.

les faces frontales : ce sont les faces parallèles à l'écran. Ces faces sont représentées « à l'échelle » ; c'est à dire que les rapports de longueurs et les mesures des angles sont conservés ;

une fuyante : est une droite perpendiculaire à l'écran ;

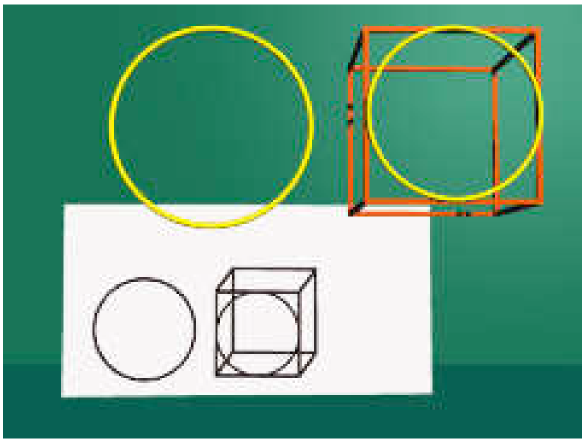
les faces fuyantes : ce sont les faces latérales ou supérieures : celles qui sont orthogonales à l'écran.

10.1.4 Conservations

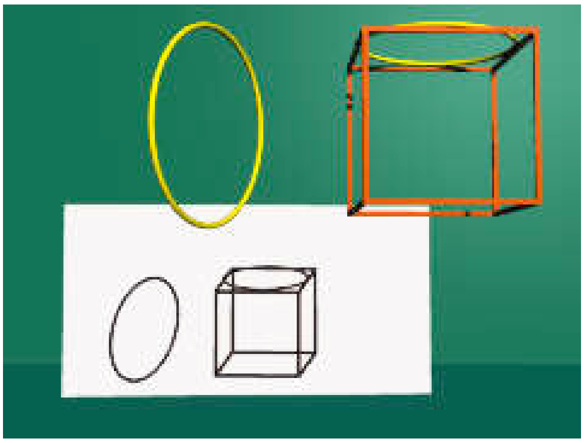
Dans ce paragraphe, on notera par des lettres majuscules les sommets des solides et par les mêmes lettres minuscules les sommets correspondants sur la représentation en perspective cavalière.
Ainsi, si $SABCD$ est une pyramide à base carrée, le nom de sa représentation en perspective cavalière est $sabcd$.

Voici quelques figures qui permettent d'illustrer les propriétés de conservations de la représentation en perspective cavalière :

Sur les faces frontales, les propriétés géométriques sont conservées : angles, rapports de longueur, parallèlisme, orthogonalité, ...



Sur les faces fuyantes, ce n'est pas le cas le cercle inscrit dans la face supérieur du cube n'est pas un cercle sur la représentation en perspective :



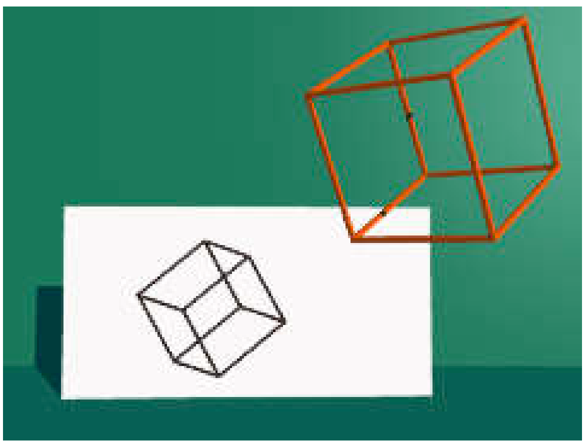
Quelques propriétés sont toujours conservées dans une représentation en perpective cavalière en particulier :

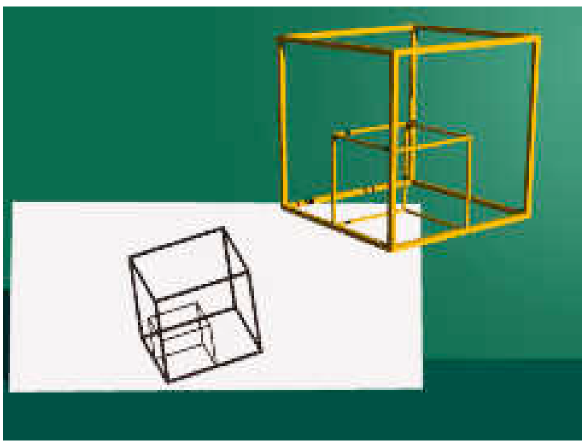
l'alignement : trois points alignés sur le solide sont aussi alignés sur la représentation en perspective cavalière ; Ainsi, si A, B et C sont alignés alors a, b et c le sont aussi ;

le parallèlisme : deux droites parallèles sur le solide le sont aussi sur la représentation en perspective cavalière ; Ainsi, si $(AB)//(CD)$ alors $(ab)//(cd)$;

les rapports de longueurs de deux segments parallèles : si (AB) et (CD) sont deux droites parallèles d'un solide alors : $\frac{AB}{CD} = \frac{ab}{cd}$. Les milieux sont donc conservés : si M est le milieu de $[AB]$ alors m est le milieu de $[ab]$.

Illustrations :





On remarque sur ces figures, la préservation de l'alignement, du parallélisme et du milieu.

10.2 Quelques bases de géométrie dans l'espace

10.2.1 Règles d'incidence

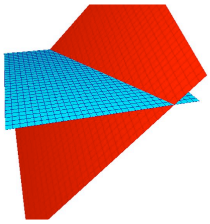
Règle 10.1
Dans l'espace :
- par deux points distincts il passe une unique droite ;
- par trois points non alignés il passe un unique plan ;
- quatre points sont dits coplanaires s'ils sont dans un même plan ;
- il en est de même pour deux droites.

Règle 10.2
Si deux points distincts A et B appartiennent à un plan $\mathscr{P}$, alors tous les points de (AB) sont dans $\mathscr{P}$. On dit que (AB) est incluse dans $\mathscr{P}$ et on note $(AB) \subset \mathscr{P}$.

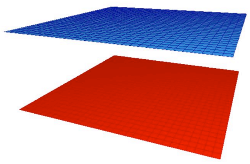
Règle 10.3
Dans un plan de l'espace toutes les propriétés de géométrie plane (Pythagore, Thalès, trigonométrie, ...) s'appliquent.

10.2.2 Positions relatives

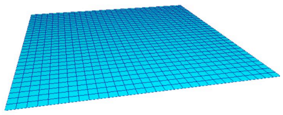
Deux plans de l'espace peuvent être sécants, strictement parallèles ou confondus. Lorsqu'ils sont sécants, deux plans se coupent suivant une droite.



Plans sécants

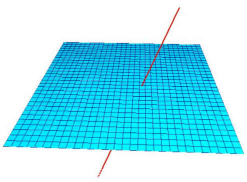


Plans parallèles

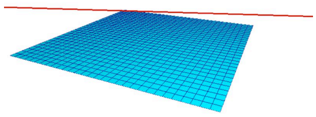


Plans confondus

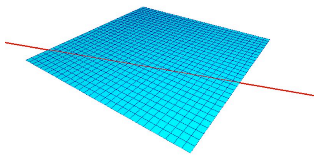
Une droite peut être sécante à un plan, elle peut être strictement parallèle au plan ou encore être contenue dans le plan :



Droite sécante au plan

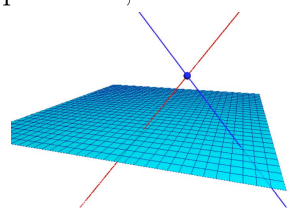


Droite parallèle au plan

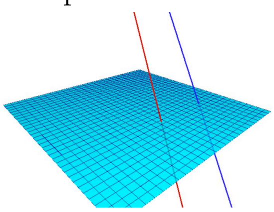


Droite contenue dans le plan

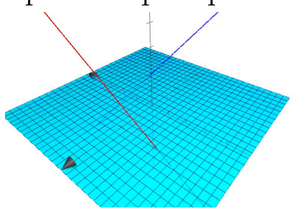
Deux droites peuvent être coplanaires, dans ce cas elles sont parallèles ou sécantes, ou alors non-coplanaires,dans ce cas elles n'ont pas de point commun mais ne sont pas non plus parallèles.



Droites sécantes

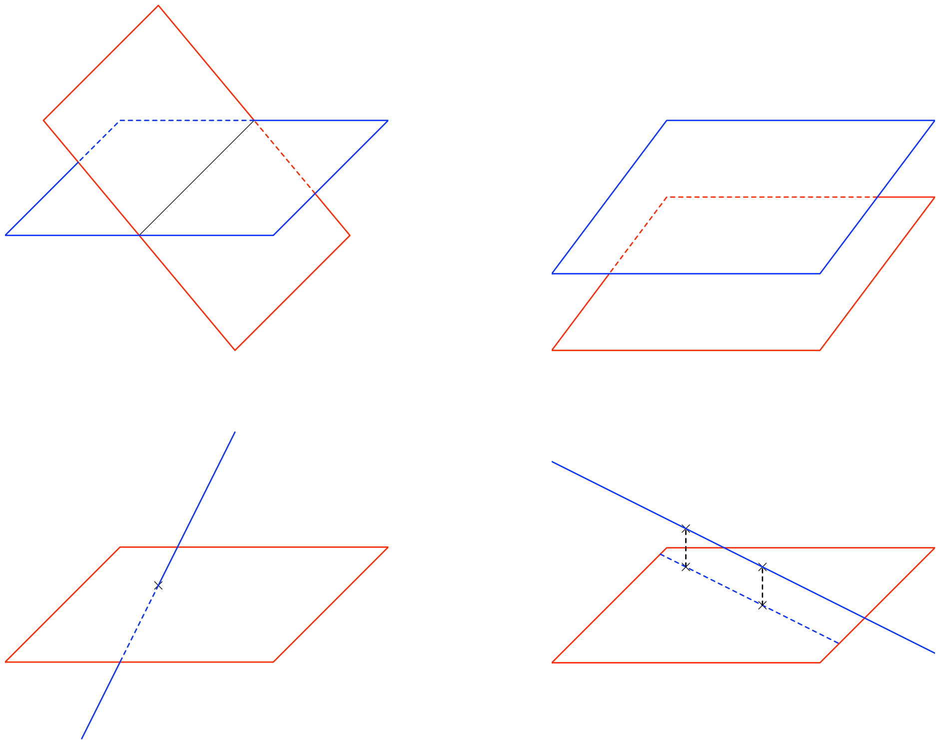


Droites parallèles



Droites non coplanaires

10.2.3 Quelques figures en perspective cavalière



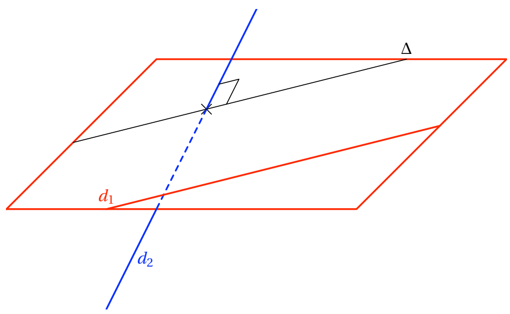
10.2.4 Parallélisme et orthogonalité

Définition 10.1
Deux droites de l'espace sont parallèles si elles sont coplanaires et non sécantes.

Axiomes d'Euclide :
- par tout point de l'espace il passe une seule droite parallèle à une droite donnée ;
- par tout point de l'espace il passe un seul plan parallèle à un plan donné.

Définition 10.2
Deux droites sont perpendiculaires si elles sont sécantes en formant un angle droit. Elles sont donc coplanaires.

Définition 10.3
Deux droites de l'espace sont dites *orthogonales* s'il existe une droite qui est parallèle à l'une et perpendiculaire à l'autre.
d_1 et d_2 sont orthogonales s'il existe une droite Δ telle que $\begin{cases} \Delta \,//\, d_1 \\ \Delta \perp d_2 \end{cases}$



Remarque 10.1
Attention :
- deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires ;
- deux droites perpendiculaires sont orthogonales.

10.3 Quelques exemples de sections

Définition 10.4
La section d'un solide par un plan est la figure plane constituée des points communs entre le plan et le solide. Si le solide est un polyèdre, la section obtenu est un polygone.

Voir les fiches d'exos.

10.4 Vecteurs de l'espace

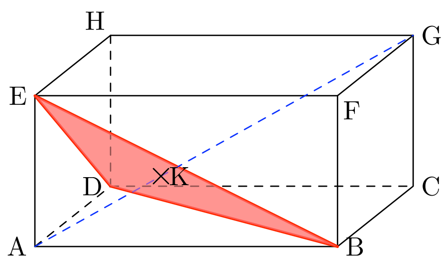
La définition d'un vecteur de l'espace est strictement identique à celle d'un vecteur du plan. Les propriétés de calculs sur les vecteurs (addition vectorielle, relation de Chasles, multiplication par un réel, ...) restent vraies dans l'espace. Nous ne parlerons cependant pas du produit scalaire de vecteurs de l'espace.
Le barycentre de points pondérés de l'espace est également défini comme dans le plan et les propriétés du barycentre (en particulier l'associativité) restent vraies aussi.

Définition 10.5
Des vecteurs de l'espace sont *coplanaires* si des représentants de ces vecteurs de même origine A ont leurs extrémités dans un même plan passant par A.
C'est-à-dire par exemple que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires s'il existe quatre points coplanaires A, B, C et D tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.

Propriété 10.1 (admise)
Trois vecteurs de l'espace $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe trois réels non tous nuls a, b et c tels que : $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$.

Propriété 10.2 (Conséquence)
Le barycentre de trois points non alignés de l'espace est dans le plan formé par ces trois points.

Exemple 10.1
Soit $ABCDEFGH$ un pavé droit. On note K le centre de gravité du triangle BDE. On souhaite montrer que A, K et G sont alignés puis que $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.



K est l'isobarycentre de B, D et E donc $\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{KE} = \overrightarrow{0}$. On utilise la relation de Chasles en introduisant trois fois le point A et on obtient : $3\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{0}$. On a donc :

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{AK} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \\ &= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{AH} \\ &= \overrightarrow{AG} \end{aligned}$$

Donc les points A, K et G sont alignés.
On a $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG}$; or $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF}$ donc finalement, $\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{0}$. Ainsi les trois vecteurs sont coplanaires.

10.5 Repérage dans l'espace

10.5.1 Repère cartésien de l'espace

Définition 10.6
Si O, I, J sont trois points non alignés et K un point qui n'est pas dans le plan (OIJ), on dit que $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OK})$ est un repère de l'espace.

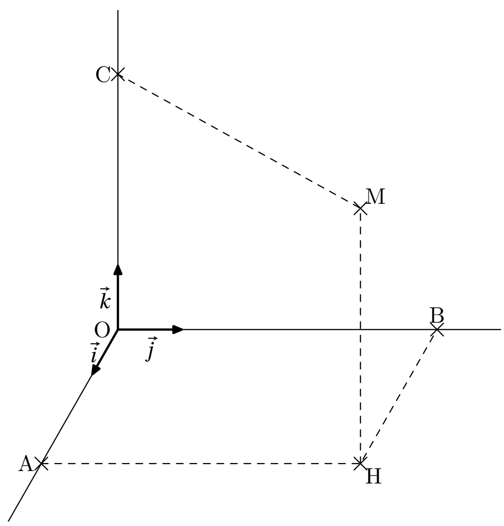
Remarque 10.2
Cas particuliers, vocabulaire et notations :
– si les droites (OI), (OJ) et (OK) sont deux à deux perpendiculaires, on dit que le repère est orthogonal ;
– si de plus on a $OI = OJ = OK = 1$, on dit que le repère est orthonormal ;
– en posant : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$, on peut aussi noter le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Théorème 10.1
Soit $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère de l'espace. Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet (x, y, z) de réels tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Démonstration :
On se place dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Soit H le point d'intersection du plan (OIJ) et de la parallèle à $(O;\vec{k})$ passant par M. Soit $(x;y)$ les coordonnées de H dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan (OIJ). On a : $\overrightarrow{OH} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et le couple $(x;y)$ est unique.
Par définition de H, les vecteurs $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{k}$ sont colinéaires. Donc il existe un unique réel z tel que $\overrightarrow{HM} = z\vec{k}$. On a donc :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = x\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

Donc le triplet $(x;y;z)$ existe et il est unique.



Remarque 10.3
La première coordonnée (x) est appelée *l'abscisse*, la deuxième (y) est appelée *l'ordonnée*, et la troisième (z) est appelée *la cote*.

Définition 10.7
Soit $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur de l'espace. On appelle *coordonnées* du vecteur $\vec{u}$ dans ce repère le triplet $(x;y;z)$ coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. On note $\vec{u}(x;y;z)$.

10.5.2 Propriétés

En se plaçant dans un repère de l'espace, les propriétés de calculs des coordonnées de vecteurs ou de points sont identiques que dans le plan ; il faut simplement étendre les formules à la troisième coordonnée :
– si A et B sont deux points de l'espace, les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$;

– si $\vec{u}(x; y; z)$ est un vecteur de l'espace et $k \in \mathbf{R}$, le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx; ky; kz)$;
– en se plaçant dans un repère **orthonormé**, si $\vec{u}(x; y; z)$ est un vecteur de l'espace, sa norme est $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;
– les coordonnées du milieu de $[AB]$ sont $\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$;
– ...

10.5.3 Équations de surfaces

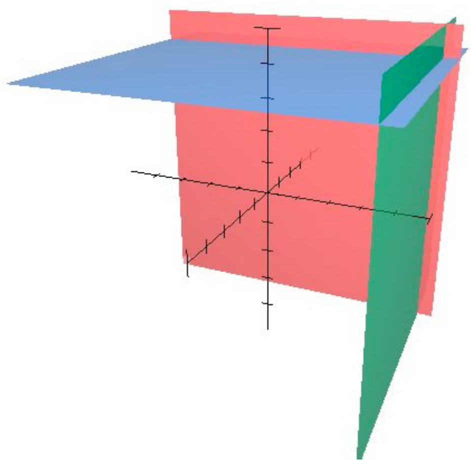
Dans cette partie, on considère que l'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Propriété 10.3
Soit $A(0; 0; \lambda)$ un point de l'espace où $\lambda \in \mathbf{R}$. Le plan $\mathscr{P}$ parallèle à $(O; \vec{i}, \vec{j})$ passant par A a pour équation $z = \lambda$.
On note : $\mathscr{P} : z = \lambda$.

Cela signifie que :
– si $M(x; y; z) \in \mathscr{P}$, alors $z = \lambda$ (x et y sont quelconques),
– si M est un point tel que $z_M = \lambda$, alors $M \in \mathscr{P}$.

Remarque 10.4
De même, les plans $\mathscr{Q}$ et $\mathscr{R}$ passant respectivement par $B(0; \mu; 0)$ et $C(\nu; 0; 0)$ et parallèles respectivement à $(O; \vec{i}, \vec{k})$ et $(O; \vec{j}, \vec{k})$ ont pour équation :

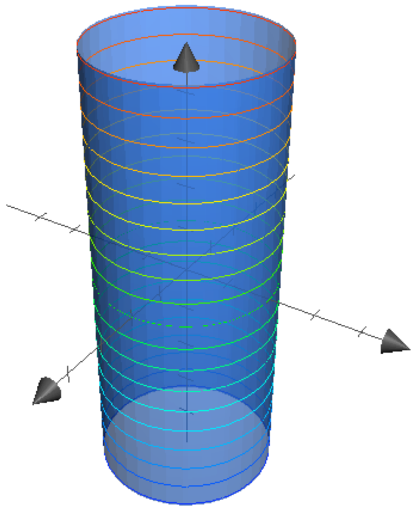
$$\mathscr{Q} : y = \mu \quad \text{et} \quad \mathscr{R} : x = \nu$$



Définition 10.8
Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon R dans le plan (Oxy). Le cylindre d'axe (Oz) et de rayon R est l'ensemble des droites orthogonales au plan (Oxy) en un point de $\mathscr{C}$.

Propriété 10.4
Une équation cartésienne d'un cylindre d'axe (Oz) et de rayon R est du type

$$x^2 + y^2 = R^2$$



Définition 10.9
Soit $\mathscr{C}$ un cercle inclus dans un plan parallèle à (Oz) et de centre $I \in (Oz)$. Le cône de centre O, d'axe (Oz) contenant le cercle $\mathscr{C}$ est l'ensemble des droites passant par O et un point de $\mathscr{C}$.

Propriété 10.5
Une équation cartésienne d'un cône de centre O et d'axe (Oz) est du type

$$x^2 + y^2 = \tan^2(\alpha)z^2$$