Chapitre 9

Les suites

9.1 Suite de nombres réels

9.1.1 Définition

Définition 9.1
On appelle suite de terme général u_n et on note $(u_n)_{n\geq 0}$ ou plus simplement u la liste *ordonnée* des nombres u_0, u_1, u_2, u_3, ... Les nombres u_i sont appelés les *termes* de la suite.
Une suite (u_n) permet donc d'associer à chaque entier n un réel qu'on note u_n.

Remarque 9.1
Parfois le premier terme d'une suite peut être u_1 ou u_2, ... et non pas u_0.

Exemple 9.1
On définit (u_n) comme la suite des nombres pairs.
Dans ce cas, on a : $u_0 = 0$, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$, ... On peut écrire aussi $u_n = 2 \times n$.

Remarque 9.2 (Notation)
Il faut bien remarquer que, dans la notation u_n, n est un entier dont dépend la valeur de u_n. Cet entier est appelé *l'indice* du terme u_n. Il joue le même rôle que le « x » dans l'expression de $f(x)$ où f est une fonction numérique. La notation indicielle est ici plus commode et courte[1] à écrire.

Exemple 9.2
En reprenant la suite des entiers pairs définie dans l'exemple 9.1 par $u_n = 2 \times n$, on a : $u_6 = 2 \times 6 = 12$, $u_n = 2 \times n$, mais aussi $u_p = 2 \times p$ ou encore $u_t = 2 \times t$.
Si on choisit comme indice l'entier $n+1$ on a $u_{n+1} = 2 \times (n+1) = 2n+2$. À ne pas confondre avec $u_n + 1 = (2 \times n) + 1 = 2n + 1$. Il est donc très important d'écrire les indices au bon endroit et à la bonne taille[2] !
Il s'agit de la même distinction qu'entre $f(x+1)$ et $f(x)+1$ pour les fonctions.

9.1.2 Mode de génération

Une suite (u_n) est entièrement définie si on est capable de calculer u_n pour n'importe quelle valeur de n. Il existe deux façons usuelles pour définir une suite :

[1]Et je vous ai déjà dit que la « bonne paresse » est une qualité pour les mathématiciens que vous êtes !
[2]Avis aux adeptes des écritures « pattes de mouches » comme ...... (Oups ! j'ai failli vexer quelqu'un !)

9.1.2.1 Suite définie « en fonction de n »

Exemple 9.3
On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \frac{x+3}{x^2+1} \end{array}$.
Si $x \in \mathbf{N}$, $f(x)$ est toujours défini. On peut donc considérer la suite u de terme général :

$$u_n = f(n) = \frac{n+3}{n^2+1}$$

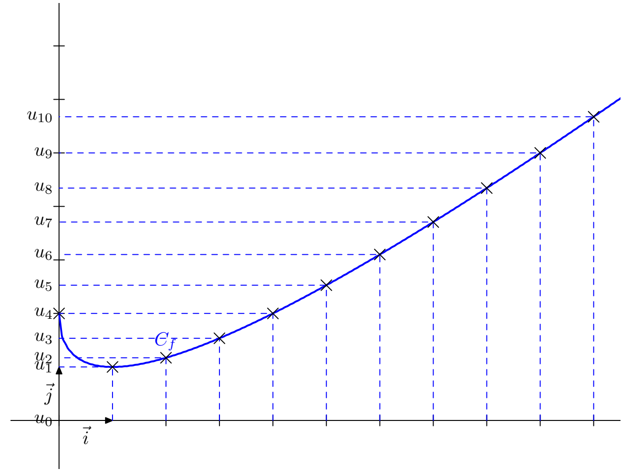
On a alors :

$$u_0 = \frac{0+3}{0^2+1} = 3,\ u_1 = \frac{1+3}{1^2+1} = 2,\ \ldots$$

Dans cette situation, on est bien en mesure de calculer u_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Représentation graphique d'une suite définie « en fonction de n »
Soit u une suite définie par $u_n = f(n)$ pour $n \in \mathbf{N}$, où f est une fonction numérique définie sur $\mathbf{R}$.
On trace dans un repère la représentation graphique de f. Le terme u_i de la suite est alors l'ordonnée du point de $\mathcal{C}_f$ dont l'abscisse est i.

Exemple 9.4
Le graphique ci-dessous représente la suite u définie par $u_n = f(n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2$



9.1.2.2 Suite définie par récurrence

Exemple 9.5
Je possède 1 000 € sur mon livret d'épargne. Chaque année on me reverse dessus 5 % en intérêts et je rajoute 100 €. J'appelle u_n la somme dont je dispose sur mon livret après n ans. On a donc :
– pour $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = (1 + \frac{5}{100}) \times u_n + 100 = 1{,}05 u_n + 100$;

– la somme disponible sur le livret aujourd'hui est 1 000€. Donc : $u_0 = 1\ 000$.

On a : $u_1 = 1{,}05 \times 1\ 000 + 100 = 1\ 150$, puis $u_2 = 1{,}05 \times 1\ 150 + 100 = 1\ 307{,}50 \ldots$. De proche en proche, on peut donc calculer u_n pour n'importe quelle valeur de n.

Définition 9.2

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbf{R}$, et a un réel quelconque. On dit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour tout } n \in \mathbf{N} \end{cases}$ est définie par *récurrence* et on note :

$$u : \begin{cases} u_0 = a \\ \text{pour } n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Remarque 9.3

Lorsqu'une suite est définie par récurrence, pour calculer u_n, on est obligé d'avoir calculé avant tous les termes précédents.

Représentation graphique d'une suite définie par récurrence

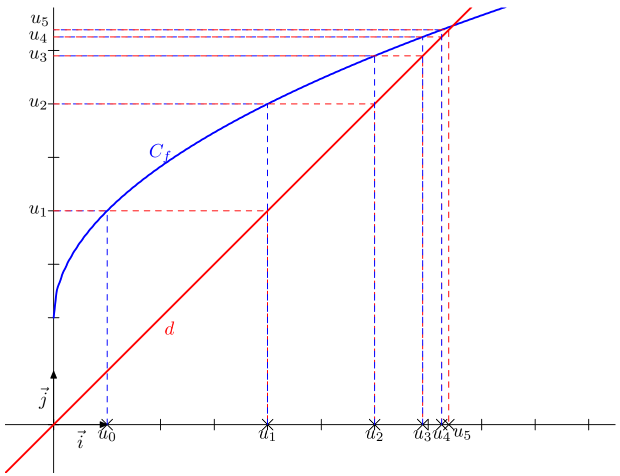
Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbf{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$

On trace dans un repère la droite d d'équation $y = x$ et la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f. On place ensuite sur l'axe des abscisses u_0. On a $u_1 = f(u_0)$; on peut donc lire u_1 sur l'axe des ordonnées comme l'image de u_0 par f. On reporte alors u_1 sur l'axe des abscisses grâce à d.

Exemple 9.6

Le graphique ci-dessous est obtenu avec $f : x \mapsto 2\sqrt{x} + 2$ et $u_0 = 1$. On a donc u définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} + 2 \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$



9.2 Variations d'une suite

Définition 9.3

On dit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est :

– strictement croissante si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} > u_n$;

– strictement décroissante si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} < u_n$.

Exemple 9.7

On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = (2n+1)^2$. Pour étudier les variations de $(u_n)_{n\geq 0}$, on calcule $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (2(n+1)+1)^2 - (2n+1)^2 \\ &= (2n+3)^2 - (2n+1)^2 \\ &= 4n^2 + 12n + 9 - (4n^2 + 4n + 1) \\ &= 8n + 8 > 0, \text{ pour } n \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

Donc la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante.

Exemple 9.8

On considère la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par récurrence par : $\begin{cases} v_0 = 10 \\ v_{n+1} = (v_n)^2 + 3v_n + 1 \end{cases}$.

Pour étudier les variations de (v_n), on va calculer $v_{n+1} - v_n$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (v_n)^2 + 3v_n + 1 - v_n \\ &= (v_n)^2 + 2v_n + 1 \\ &= (v_n + 1)^2 > 0, \text{ pour } n \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

Donc la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante.

Propriété 9.1

Soit u une suite à termes strictement positifs. Alors :

– la suite u est strictement croissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$;

– la suite u est strictement décroissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

Propriété 9.2

Soit f un fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ et u la suite définie pour $n \in \mathbf{N}$ par $u_n = f(n)$. Alors :

– si f est croissante sur $\mathbf{R}_+$ alors u est croissante ;

– si f est décroissante sur $\mathbf{R}_+$ alors u est décroissante.

Attention : les réciproques de ces deux propositions sont fausses : u peut être croissante et f ne pas l'être sur $\mathbf{R}_+$ (f peut avoir des variations quelconques entre deux entiers consécutifs).

9.3 Suites arithmétiques

9.3.1 Définition

Définition 9.4

Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite *arithmétique* si la différence entre deux termes consécutifs est constante. C'est à dire qu'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$.

Le réel r est appelé *raison* de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exemple 9.9
Si u est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 3, on a :

$$u_0 = 5$$
$$u_1 = u_0 + 3 = 5 + 3 = 8$$
$$u_2 = u_1 + 3 = 8 + 3 = 11$$

9.3.2 Calcul du terme général

Théorème 9.1
- si u est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = u_0 + nr$;
- si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = a + b \cdot n$, alors, u est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = a$ et de raison b.

Démonstration :
- On a : $u_1 = u_0 + r$,
  puis, $u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r$.
  De même, $u_3 = u_2 + r = (u_0 + 2r) + r = u_0 + 3r$, ... et ainsi de suite.
  On obtient finalement $u_n = u_0 + nr$.
- Si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = a+nb$, alors $u_{n+1} - u_n = (a + (n+1)b) - (a + nb) = b$. Donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + b$, et donc u est une suite arithmétique de raison b et de premier terme $u_0 = a + 0 \cdot b = a$.

Exemple 9.10
En reprenant la suite de l'exemple 9.9, on a :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbf{N}, \quad u_n = 5 + n \times 3 = 5 + 3n$$

Remarque 9.4
Si le premier terme d'une suite arithmétique est u_1, et sa raison est r, on a :

$$\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = u_1 + (n-1)r$$

Et de façon plus générale, si u est une suite arithmétique de raison r, pour tous les entiers n et p on a :

$$u_n = u_p + (n-p) \times r$$

9.3.3 Calcul de la somme des premiers termes

Propriété 9.3
La somme S des n premiers termes d'une suite arithmétique est :

$$S = \frac{n \times (\text{premier terme } + \text{ dernier terme})}{2}$$

Dans le cas où le premier terme est u_0, on obtient : $S = \frac{n \times (u_0 + u_{n-1})}{2}$.
Dans le cas où le premier terme est u_1, on obtient : $S = \frac{n \times (u_1 + u_n)}{2}$.

Démonstration : (cas où le premier terme est u_1)
On va écrire S de deux façons différentes :

$$S = u_1 + (u_1 + r) + \cdots + (u_1 + (n-2)r) + (u_1 + (n-1)r)$$

$$S = (u_n - (n-1)r) + (u_n - (n-2)r) + \cdots + (u_n - r) + u_n$$

Donc : $2S = n \times u_1 + n \times u_n$ (les autres termes s'annulent) d'où le résultat en divisant les deux membres par 2.

Exemple 9.11
Un salarié est embauché le 1er janvier 2008 pour un salaire net mensuel de 1 000€ par mois et avec une augmentation de 5€ nets par mois dès le deuxième mois.
On note u_n le salaire perçu à l'issue du n^e mois. Ainsi u est une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 1\,000$ et de raison $r = 5$. En effet, la différence entre deux salaires consécutifs est égale à 5€.
Le salaire perçu en décembre 2008 est donc $u_{12} = 1\,000 + 11 \times 5 = 1\,055$€.
Le total des salaires perçus au cours de la première année est donc :

$$S = \frac{12 \times (u_1 + u_{12})}{2} = \frac{12 \times 2\,055}{2} = 12\,330$$

Exemple 9.12
Calculons la somme des 100 premiers entiers : $S_{100} = 1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100$.
Pour cela, on considère la suite arithmétique v de premier terme $v_1 = 1$ et de raison $r = 1$.
La somme S_{100} cherchée est donc la somme des 100 premiers termes de la suite v :

$$S_{100} = \frac{100 \times (v_1 + v_{100})}{2} = \frac{100 \times (1 + 100)}{2} = 5\,050$$

9.4 Suites géométriques

9.4.1 Définition

Définition 9.5
Une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est dite *géométrique* si chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par un même nombre q. C'est à dire qu'il existe un réel q tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le réel q est appelé *raison* de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

Remarque 9.5
Si on considère que la suite u n'est pas la suite nulle[3], u est géométrique si pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$.

Exemple 9.13
Si u est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$, et de raison $q = 2$, on a :

$$u_0 = 5, \quad u_1 = q \times u_0 = 2 \times 5 = 10, \quad u_2 = q \times u_1 = 2 \times 10 = 20, \quad u_3 = q \times u_2 = 2 \times 20 = 40, \ldots$$

[3] La suite nulle est la suite dont tous les termes sont égaux à zéro.

9.4.2 Calcul du terme général

Théorème 9.2

– si u est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$;
– si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = a \times b^n$, alors, u est la suite géométrique de premier terme $u_0 = a$ et de raison b.

Exemple 9.14

En reprenant la suite géométrique de l'exemple 9.13, on a :

$$\text{pour tout } n \in \mathbf{N}, \quad u_n = u_0 \times q^n = 5 \times 2^n$$

Remarque 9.6

Si le premier terme est u_1, on a : pour tout $n \in \mathbf{N}^*, u_n = u_1 \times q^{n-1}$. De façon plus générale, si u est une suite géométrique de raison q alors pour tous les entiers n et p on a :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

9.4.3 Calcul de la somme des premiers termes

Propriété 9.4

Soit q un réel différent de 0 et de 1. Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$1 + q + q^2 + \dots \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exemple 9.15

Si $q = 2$,
$1 + q + q^2 = 1 + 2 + 4 = 7$. En appliquant la formule : $1 + q + q^2 = \frac{1-2^3}{1-2} = \frac{-7}{-1} = 7$.
$1 + 2 + \dots + 2^{10} = \frac{1-2^{11}}{1-2} = 2\ 047$.

Propriété 9.5

Soit u une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, avec q différent de 1 et de 0. On a :

$$u_0 + u_1 + \dots \dots u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Démonstration :

$u_0 = u_0 \times 1$, $u_1 = u_0 \times q$, $u_2 = u_0 \times q^2$,.... Ainsi, on a :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + \dots + u_0 \times q^n = u_0 \left(1 + q + q^2 + \dots + q^n\right)$$

En utilisant la propriété 9.4, on obtient :

$$u_0 + u_1 + \dots \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Remarque 9.7

Si u est une suite géométrique de raison q, la somme des premiers termes peut aussi s'écrire :

$$S = \frac{\text{premier terme} - q \times \text{dernier terme}}{1 - q}$$

Exemple 9.16

Un salarié est embauché le 1er janvier 2008 pour un salaire net mensuel de 1 000€ par mois et avec une augmentation de 0,4% nets par mois dès le deuxième mois.
On note u_n le salaire perçu à l'issue du n^e mois. Ainsi u est une suite géométrique de premier terme $u_1 = 1\ 000$ et de raison $q = 1 + \frac{0,4}{100} = 1,004$. En effet, chaque salaire est obtenu en multipliant le précédent par le coefficient multiplicateur de l'augmentation soit $1 + \frac{0,4}{100} = 1,004$.
Le salaire perçu en décembre 2008 est donc $u_{12} = 1\ 000 \times 1,004^{11} \approx 1\ 044,89$€.
Le total des salaires perçus au cours de la première année est donc :

$$S = \frac{1^{\text{er}} \text{ terme - } q \text{ fois dernier terme}}{1 - q} = \frac{1\ 000 - 1,004 \times 1\ 044,89}{1 - 1,004} = 12\ 267,39$$