

Cours de mathématiques

Thomas Rey

classe de première L option
24 février 2009

Table des matières

1	Systèmes de numérations	5
1.1	Comment comptaient-ils ?	5
1.1.1	Les Égyptiens	5
1.1.2	Les Babyloniens	5
1.1.3	Les Romains	6
1.1.4	Les Grecs	7
1.1.5	L'apparition du zéro	8
1.2	Les bases de numération	9
1.2.1	Écrire les nombres aujourd'hui	9
1.2.2	Passage d'une base B à la base 10	9
1.2.3	Passage de la base 10 à une base B	9
1.2.4	Opérations en base B	10
2	Arithmétique	13
2.1	Vocabulaire. Critères de divisibilité	13
2.1.1	Vocabulaire	13
2.1.2	Propriété	14
2.1.3	Critères de divisibilité	15
2.2	Les nombres premiers	15
2.3	Décomposition en produit de facteurs premiers	17
2.3.1	Théorème de décomposition	17
2.3.2	Application : détermination des diviseurs d'un entier	18
2.4	Pgcd de deux entiers	19
2.4.1	Définition	19
2.4.2	Recherche du pgcd : algorithme d'Euclide	19
2.4.3	Calculatrices	20
2.4.4	Application	20
2.4.5	Nombres premiers entre eux	21
2.5	Complément	21
3	Généralités sur les fonctions	23
3.1	Introduction : exemples	23
3.2	Généralités	25
3.2.1	Définition	25
3.2.2	Ensemble de définition	25
3.2.3	Représentation graphique	26
3.3	Variations d'une fonction	26
3.4	Cas particulier : les fonctions linéaires et affines	27
3.4.1	Définitions et propriétés	27

3.4.2	Représentation graphique	27
3.5	Résolutions graphiques d'équations et d'inéquations	28
3.6	Éléments de symétrie	28
4	Probabilités	31
4.1	Introduction. Premières définitions	31
4.2	Distribution de fréquences. Loi de probabilité	31
4.2.1	Distribution de fréquences	31
4.2.2	Loi de probabilité	32
4.2.3	Loi des grands nombres	32
4.2.4	Équiprobabilité	33
4.3	Quelques exemples de référence	33
4.4	Intersection. Réunion	34
4.4.1	Événement. Événement contraire	34
4.4.2	Intersection. Réunion	35
5	Dérivation	37
5.1	Taux de variation	37
5.1.1	Taux de variation	37
5.1.2	Interprétation graphique	38
5.2	Nombre dérivé	38
5.2.1	Nombre dérivé	38
5.2.2	Interprétation graphique	38
5.2.3	Interprétation cinématique	39
5.2.4	Approximation affine	39
5.3	Fonction dérivée	40
5.3.1	Fonction dérivée	40
5.3.2	Dérivées des fonctions usuelles	40
5.4	Opérations sur les fonctions dérivables	40
5.4.1	Dérivée d'une somme	40
5.4.2	Produit par un réel	41
5.4.3	Dérivée d'un produit	41
5.4.4	Dérivée d'un quotient	41
5.5	Fonction dérivée et sens de variation	42
5.5.1	Variations d'une fonction affine	42
5.5.2	Théorèmes	42
6	Perspective cavalière	45
6.1	Premier exemple	45
6.2	Vocabulaire	46
6.3	Conservations	46
6.4	Règles de dessin	48
6.5	Surprises!	49
6.6	Quelques exemples	49

Chapitre 1

Systemes de numérations

1.1 Comment comptaient-ils ?

1.1.1 Les Égyptiens

À l'époque des pharaons (3 000 av. J.-C. - 300 av. J.-C.) les scribes égyptiens écrivaient les nombres en utilisant un symbole (hiéroglyphe) pour chacun des nombres 1, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000 et 1 000 000. Chaque symbole était répété autant de fois qu'il y avait de multiples du nombre correspondant : il s'agit d'une numération *additive*.

Pour écrire 300, on écrit trois fois le hiéroglyphe qui correspond à la valeur 100...

Les symboles :

1 :	10 : ∩	100 : 𐍌	1 000 : 𐍑
10 000 : 𐍓	100 000 : 𐍕	1 000 000 : 𐍖	

Exemple 1.1

Écrire en numération égyptienne les nombres suivants :

25 : 10 201 : 3 250 000 :

Exemple 1.2

Écrire dans notre système de numération les nombres suivants :

$$\left. \begin{array}{c} \text{𐍌} \text{𐍌} \quad \cap \quad \text{𐍓} \text{𐍓} \text{𐍓} \\ \text{𐍌} \quad \quad \text{𐍓} \end{array} \right\} : \quad \left. \begin{array}{c} \text{𐍑} \text{𐍑} \quad \cap \cap \quad \text{𐍓} \\ \text{𐍑} \quad \cap \quad \text{𐍓} \end{array} \right\} : \quad \left. \begin{array}{c} \text{𐍖} \text{𐍖} \text{𐍖} \quad \text{𐍓} \text{𐍓} \text{𐍓} \text{𐍓} \\ \text{𐍖} \text{𐍖} \text{𐍖} \quad \text{𐍓} \text{𐍓} \end{array} \right\} :$$

Écriture des fractions :

Les égyptiens n'utilisaient que des fractions¹ de dénominateur 1. Pour écrire l'inverse d'un nombre on le surmontait du symbole : ∅

Exemple 1.3

Écrire en numération égyptienne $\frac{1}{21}$ et $\frac{1}{102}$.

1.1.2 Les Babyloniens

La numération babylonienne est une numération en base 60. Elle a été « couramment » utilisée à partir de 1 800 av. J.-C. soit 3 200 ans après le début de cette civilisation.

¹Sauf $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$ qui avaient leur propre hiéroglyphe.

Le symbole \Uparrow représente l'unité et est répété jusqu'à neuf fois. Le symbole \Leftarrow représente le nombre 10 et est répété jusqu'à cinq fois pour écrire en combinant avec le précédent les nombres jusqu'à 59.

À partir de 60, on utilise les mêmes combinaisons : ainsi $\Uparrow \Uparrow$ signifie $1 \times 60 + 1 = 61$ dans notre système. La position d'un même groupe de symboles lui donne donc une valeur différente : il s'agit du premier système de numération positionnel. Il n'y avait cependant pas de symbole pour le zéro mais un espace vierge plus ou moins grand pour séparer les groupes de symboles. Par ailleurs le contexte dans lequel se trouve le nombre aidait à la détermination de l'ordre de grandeur.

On verra sur la figure 1.1 un exemple de tablette d'argile sur laquelle on peut lire différents nombres.

Exemple 1.4

Écrire dans notre système de numération les nombres suivants :

$\Leftarrow \Leftarrow \Leftarrow \Uparrow \Uparrow$; $\Leftarrow \Leftarrow \Uparrow \Leftarrow \Uparrow$; $\Uparrow \Uparrow \Uparrow$

Exemple 1.5

Écrire en numération babylonienne 7 424.

Il s'agit de décomposer² 7 424 en une somme de multiples de 60^2 , 60 et 1.

$$7\,424 = 2 \times 3\,600 + 224 = 2 \times 60^2 + 3 \times 60 + 44$$

Donc 7 424 s'écrit : $\Uparrow \Uparrow \Uparrow \Uparrow \Leftarrow \Leftarrow \Leftarrow \Leftarrow \Uparrow \Uparrow \Uparrow$

Remarque 1.1

Il nous reste des traces de ce système de numération en base 60 : notre système de lecture des heures où l'heure est divisée en 60 minutes et la minute en 60 secondes.

1.1.3 Les Romains

La numération romaine n'est pas destinée à effectuer des opérations sur les nombres mais à écrire de façon abrégée les nombres. Elle est surtout régie par le principe additif compliquée par la règle selon laquelle *tout signe numérique placé à gauche d'un chiffre de valeur supérieur s'en retranche*. Ainsi 4 s'écrit 5 – 1 plutôt que 1 + 1 + 1 + 1. Cette règle permet de ne jamais écrire côte à côte plus de trois symboles identiques.

Les chiffres romains :

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1 000

Pour écrire les très grands nombres, on surmonte d'une barre horizontale les multiples de 1 000 et de deux barres horizontales les multiples de 1 000 000.

Exemple 1.6

2 006 s'écrit **MMVI**.

599 s'écrit **DXCIX**.

17 429 s'écrit **XVIICDXXIX**

²Voir le paragraphe 1.2.3 page 9 pour les changements de bases.

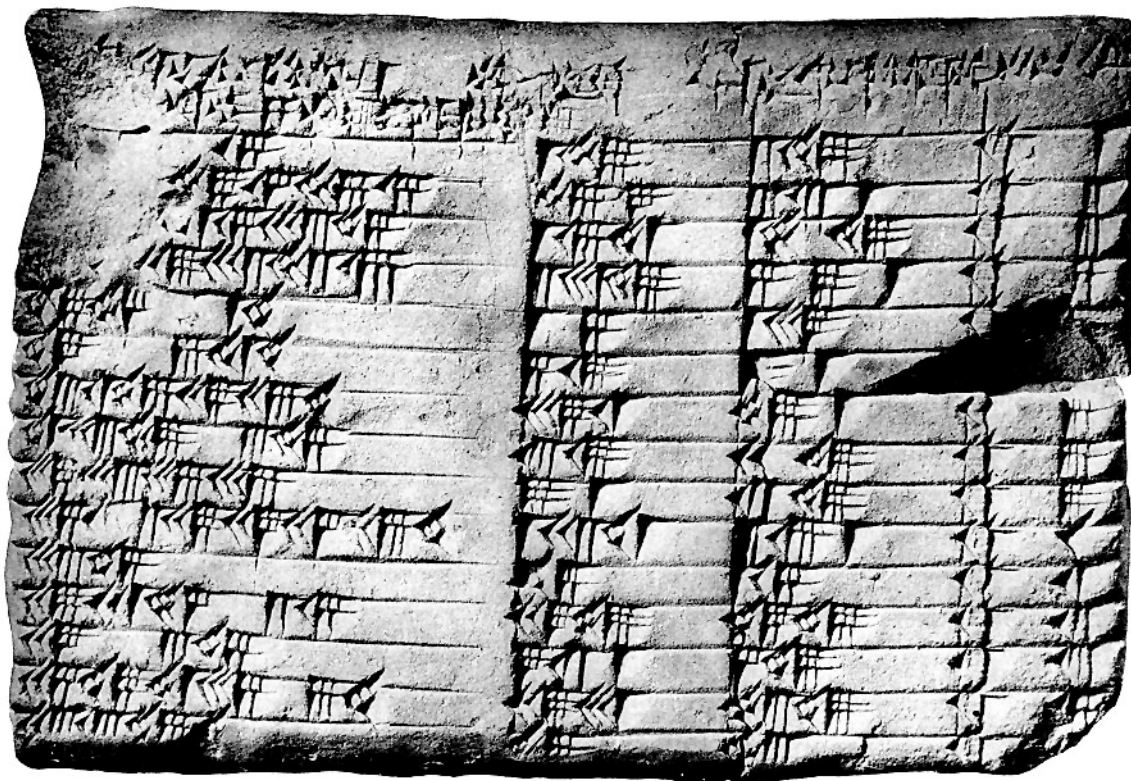


FIG. 1.1 – Tablette Plimpton 322 datant de la période 1 900-1 600 av. J.-C.

Exemple 1.7

1. Écrire tous les nombres de 1 à 20.
2. Écrire les nombres suivants : 85, 749, 29 200, 12 234 700.
3. Lire les nombres suivants : MCMLXXXV, DCCCXLIII.

1.1.4 Les Grecs

Le système de numération ionique est un système additif à base 10 utilisé dès le V^e siècle av. J.-C. Les grecs ont utilisé leur alphabet pour écrire les nombres. Pour distinguer les nombres des lettres dans un texte, ils les surmontaient d'une barre horizontale. Ici, nous ne le ferons pas pour ne pas alourdir les notations...

Les chiffres grecs :

Unités	1	2	3	4	5	6	7	8	9
En grec	α	β	γ	δ	ϵ	F	ζ	η	θ
Se lit	alpha	bêta	gamma	delta	epsilon	digamma	dzêta	êta	thêta

Dizaines	10	20	30	40	50	60	70	80	90
En grec	ι	κ	λ	μ	ν	ξ	O	π	φ
Se lit	iota	kappa	lambda	mu	nu	ksi	omicron	pi	koppa

Centaines	100	200	300	400	500	600	700	800	900
En grec	ρ	σ	τ	υ	ϕ	χ	ψ	ω	ϖ
Se lit	rhô	sigma	tau	upsilon	phi	khi	psi	omega	sampi

Le système de numération est un système additif : $\tau\lambda\alpha$ désigne le nombre 331. Pour écrire les multiples de 1 000, on les précédait d'une virgule : $,\tau\lambda\alpha$ désigne le nombre 331 000.

Exemple 1.8

Écrire en numération grecque les nombres suivants : 85, 749, 29 200.

Exemple 1.9

Lire les nombres suivants : $,\delta\phi\lambda\eta$; $\tau\nu\epsilon$; $,\nu\sigma\theta$.

1.1.5 L'apparition du zéro

La naissance du zéro n'est pas le fruit d'une civilisation en particulier mais elle est une création collective de nombreux peuples.

Les premières numérations (égyptiennes, grecques, romaines, ...) permettaient de compter jusqu'à un nombre fini au delà duquel il fallait inventer de nouveaux symboles. L'idée révolutionnaire³ qui a permis de dépasser ce stade, c'est d'utiliser un petit nombre de symboles, les chiffres, qui ont une valeur différente suivant leur emplacement : ce sont les numérations de *position*. Dans notre système actuel, le chiffre 2 n'a pas la même valeur dans 12 et dans 23.

Les Babyloniens sont les premiers à adopter ce système : le « clou » \Uparrow répété jusqu'à neuf fois permet de compter jusqu'à 9, puis le « chevron » \nwarrow vaut 10 et les deux permettent de compter jusqu'à 59. Puis on reprend le clou qui vaut 60, deux clous valent 120, ... jusqu'à 10 clous remplacés par un chevron valant alors 600... Ainsi, un clou peut valoir 1, 60, ..., un chevron 10, 600, ...

Ce progrès est décisif : avec deux symboles répétés, on peut écrire n'importe quel nombre à ceci près qu'il peut y avoir des confusions : deux clous peuvent représenter 2 (deux clous valant chacun 1), 61 (un clou valant 60 et l'autre 1), 120 (deux clous valant 60), ...

Les Babyloniens se sont contentés de ce système jusqu'au III^e siècle av.J.-C. en laissant des espaces vides plus ou moins grands entre les groupes de symboles. Puis est apparu un nouveau symbole : les deux clous en biais⁴ signifiant les emplacements vides. Ce nouveau symbole fut le premier zéro de l'histoire de l'humanité.

Les Chinois marquèrent eux⁵, à partir du III^e siècle de notre ère, les emplacements vides par un point puis par un petit cercle. Quant aux Mayas, ils ont utilisé indépendamment des autres civilisations un symbole représentant un coquillage pour marquer ces emplacements vides.

Ces zéros n'ont cependant pas encore la signification actuelle : ils ne servent qu'à marquer un emplacement vide. La dernière étape de la création du zéro est franchie par les Indiens au VII^e siècle : le zéro est défini comme un nombre, résultat d'une soustraction d'un nombre par lui-même. Les Indiens décriront également ses propriétés : « lorsque zéro est ajouté ou soustrait à un nombre, celui-ci est inchangé et un nombre multiplié par zéro devient zéro.

Le zéro « actuel » est donc l'invention des Indiens. Il ne sera introduit en occident qu'au XII^e siècle.

³Trouvée indépendamment par les Babyloniens (1 800 ans av.J.-C.), les Mayas (entre le V^e et le XXI^e siècle), et peut-être même les Chinois et les Indiens (II^e siècle av.J.-C.).

⁴Parfois remplacés par deux petits chevrons superposés.

⁵Sans qu'on sache s'ils ont été inspirés par les Babyloniens.

1.2 Les bases de numération

1.2.1 Écrire les nombres aujourd'hui

Notre système de numération est un système positionnel à base 10 ou décimal. Nos dix chiffres ont une valeur différente suivant leur position dans le nombre.

Parmi les chiffres, le zéro (on l'a vu dans le paragraphe 1.1.5) a une importance particulière, il permet par exemple de distinguer 54 de 504.

Dans un système positionnel binaire (base 2) utilisé en informatique il n'existe que deux chiffres : le 0 et le 1. Les premiers nombres sont alors $\overline{0}^2$, $\overline{1}^2$, $\overline{10}^2$, $\overline{11}^2$, $\overline{100}^2$, ... valant respectivement en base 10 : 0, 1, 2, 3, 4, ...

Plus généralement, un nombre qui s'écrit $\overline{\dots cba}^B$ en base B vaut $a + b \times B^1 + c \times B^2 + \dots$

1.2.2 Passage d'une base B à la base 10

Exemple 1.10

Écrire en base 10 les nombres suivants :

$$\overline{147}^8 = 1 \times 8^2 + 4 \times 8^1 + 7 \times 8^0 = 103.$$

En base 16 on a besoin de 16 « chiffres ». On utilise donc les 10 chiffres habituels, auxquels on ajoute A, B, \dots, F qui correspondent à 10, 11, ..., 15.

$$\overline{A7D1}^{16} = 10 \times 16^3 + 7 \times 16^2 + 13 \times 16 + 1 = 42\,961.$$

$$\overline{1\,001}^2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 = 9.$$

$$\overline{1\,101}^2 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 = 13.$$

$$\overline{123}^6 = 1 \times 6^2 + 2 \times 6 + 3 = 51.$$

```

1 Entrées :
2 B;
3 i;
4  $N = \overline{C_i C_{i-1} \dots C_1 C_0}$ ;
5  $M = 0$ ;
6 début
7   tant que  $i \geq 0$  faire
8      $M + C_i \times B^i \rightarrow M$ ;
9      $i - 1 \rightarrow i$ ;
10  Afficher M
11 fin
```

Algorithme 1 : passage d'une base B à la base 10

1.2.3 Passage de la base 10 à une base B

Exemple 1.11 (passage de la base 10 à la base 4)

Écrire 39 en base 4 :

$39 = 9 \times 4 + 3$. Or $9 = 2 \times 4 + 1$ (Ces égalités sont obtenues par la division euclidienne). On a donc :

$$39 = (2 \times 4 + 1) \times 4 + 3 = 2 \times 4^2 + 1 \times 4 + 3 \text{ (en développant)}$$

Ainsi, 39 s'écrit $\overline{213}^4$ en base 4.

Exemple 1.12

Écrire 39 en base 5 :

$$39 = 7 \times 5 + 4 = (1 \times 5 + 2) \times 5 + 4 = 1 \times 5^2 + 2 \times 5 + 4 = \overline{124}^5.$$

Exemple 1.13

Écrire 39 en base 2 :

$$\begin{aligned}
 39 &= 19 \times 2 + 1 \\
 &= (9 \times 2 + 1) \times 2 + 1 \\
 &= ((4 \times 2 + 1) \times 2 + 1) \times 2 + 1 \\
 &= ((2^3 + 1) \times 2 + 1) \times 2 + 1 \\
 &= 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\
 &= \overline{100111}^2
 \end{aligned}$$

```

1 Entrées :
2 N en base 10;
3 i = 0;
4 La base B;
5 début
6   tant que N > 0 faire
7     Division euclidienne de N par B ;;
8     Quotient → Q;
9     Reste → Ci;
10    i + 1 → i;
11    Q → N;
12  Afficher Ci-1 ... C1C0
13 fin

```

Algorithme 2 : passage de la base 10 à une base B **Programme en langage CASIO :**

"BASE 10→BASE B"	Int(N÷B)→Q	If N≥B
"B?":?→B	N-B×Q→R	Then Goto 0
"N EN BASE 10?":?→N	M+R×10 [^] I→M	IfEnd
0→I:0→M	Q→N	M+N×10 [^] I→M
Lbl 0	I+1→I	

Programme en langage TI :

"BASE 10→BASE B"	Int(N÷B)→Q	If N≥B
"B?":?→B	N-B×Q→R	Then Goto 0
"N EN BASE 10?":?→N	M+R×10 [^] I→M	IfEnd
0→I:0→M	Q→N	M+N×10 [^] I→M
Lbl 0	I+1→I	

1.2.4 Opérations en base B

Lors d'une addition de deux nombres en base B , si la somme des chiffres des unités est supérieure ou égale à B , on écrit le reste de la soustraction par B et on ajoute 1 (la retenue) à la somme

des chiffres des « B -zaines ».

Pour effectuer une multiplication en base B , on commence par écrire la table de multiplication de la base B , puis on procède comme une multiplication habituelle en base 10.

Exemple 1.14

Effectuer les opérations suivantes⁶ :

$$\begin{aligned}\overline{32}^5 + \overline{12}^5 &= \overline{44}^5; & \overline{43}^5 + \overline{21}^5 &= \overline{114}^5; & \overline{143}^5 + \overline{342}^5 &= \overline{1040}^5 \\ \overline{4302}^5 - \overline{1201}^5 &= \overline{3101}^5; & \overline{2303}^5 - \overline{1402}^5 &= \overline{401}^5\end{aligned}$$

Exemple 1.15

Écrire la table de multiplication en base 5, puis calculer :

\times	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

$$\overline{213}^5 \times \overline{3}^5 = \overline{1144}^5; \quad \overline{321}^5 \times \overline{23}^5 = \overline{13433}^5$$

Exemple 1.16

Quel nombre suit $\overline{4124}^5$? Il s'agit de $\overline{4124}^5 + 1 = \overline{4130}^5$.

Quel nombre précède $\overline{1200}^5$? Il s'agit de $\overline{1200}^5 - 1 = \overline{1144}^5$.

⁶Au lecteur consciencieux de « poser » les opérations...

Chapitre 2

Arithmétique

Dans ce chapitre, sauf précision contraire, lorsqu'on parlera d'un *nombre*, il s'agira d'un nombre entier naturel.

2.1 Vocabulaire. Critères de divisibilité

2.1.1 Vocabulaire

Soit n, d, m trois entiers naturels avec $d \neq 0$.

- On dit que d est un diviseur de n si $\frac{n}{d}$ est un entier naturel. Dans ce cas on dit aussi que d divise n .
- On dit que m est un multiple de n s'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $m = kn$.

Remarque 2.1

Si m est un multiple de n (où $n \neq 0$) alors n est un diviseur de m .

Exemple 2.1

- Les diviseurs de 60 sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.
- Les diviseurs de 100 sont : 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100.
- Les multiples de 3 sont : 0, 3, 6, 9, 12, ...

```
1 Entrées :  
2 Saisir  $N$ ;  
3  $1 \rightarrow D$ ;  
4 début  
5   tant que  $D \leq N$  faire  
6     si  $\frac{N}{D}$  est entier alors  
7       Afficher  $D$   
8      $D + 1 \rightarrow D$ ;  
9 fin
```

Algorithme 3 : recherche des diviseurs

Programme en langage Casio :

```
?→N
1→D
While D≤N
If N÷D=Int(N÷D)
Then D▲
IfEnd
D+1→D
WhileEnd
''FIN''
```

Programme en langage TI :

```
Input N
1→D
While D≤N
If N÷D=Int(N÷D)
Then
Disp D
Pause
End
D+1→D
End
```

2.1.2 Propriété**Propriété 2.1**

Soit a , b et c trois entiers naturels non nuls.

- Si a divise b et si b divise c , alors a divise c .
- Si a divise b et si a divise c , alors a divise $b + c$, $b - c$, et même toute combinaison $\alpha b + \beta c$ où α et β sont des entiers relatifs quelconques.
- Si a divise b alors a divise αb pour tout $\alpha \in \mathbf{N}$.
- Si a divise b alors ac divise bc .

Exemple 2.2

Quelques illustrations numériques simples :

- on a : 3 divise 15 et 15 divise 75, donc 3 divise 75 ;
- on a : 7 divise 105 et 7 divise 42, donc 7 divise $105+42=147$, 7 divise $105-42=63$, et même 7 divise $5 \times 105 - 3 \times 42 = 399$;
- 9 divise 27 donc 9 divise $45 \times 27 = 1215$;
- 5 divise 35 donc $5 \times 3 = 15$ divise $35 \times 3 = 105$.

Démonstration de la propriété 2.1 :

- Si a divise b alors il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $b = ka$.
Si b divise c alors il existe $k' \in \mathbf{N}$ tel que $c = k'b$.
Donc : $c = k'b = k'ka$. Donc a divise c .
- Si a divise b alors il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $b = ka$.
Si a divise c alors il existe $k' \in \mathbf{N}$ tel que $c = k'a$. Donc :
 $b + c = ka + k'a = a(k + k')$: c'est à dire que a divise $b + c$;
 $b - c = ka - k'a = a(k - k')$: c'est à dire que a divise $b - c$;
 $\alpha b + \beta c = \alpha ka + \beta k'a = a(\alpha k + \beta k')$: c'est à dire que a divise $\alpha b + \beta c$.
- Si a divise b alors il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $b = ka$.
Donc $\alpha b = \alpha ka$ et ainsi a divise αb .
- Si a divise b alors il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $b = ka$.
Donc $bc = kac$ et ainsi ac divise bc .

Exemple 2.3

Déterminer les entiers naturels n tels que $n + 1$ divise $2n + 5$.

$n + 1$ divise $n + 1$ et il divise $2n + 5$.

Donc d'après la propriété 2.1, $n + 1$ divise $(2n + 5) - 2 \times (n + 1) = 2n + 5 - 2n - 2 = 3$.

C'est à dire que $n + 1$ divise 3. Donc $n + 1$ peut être égal à 1 ou à 3. Ainsi les valeurs possibles de n sont 0 ou 2.

Vérifions : si $n = 0$ on a bien 1 qui divise 5 ; et si $n = 2$ on a bien 3 qui divise 9. Les valeurs de n possibles sont donc 0 et 2.

2.1.3 Critères de divisibilité

Propriété 2.2 (Critères de divisibilité)

- Un nombre est divisible par 2 si et seulement si son chiffre des unités est un 0, un 2, un 4, un 6 ou un 8.
- Un nombre est divisible par 5 si et seulement si son chiffre des unités est un 0 ou un 5.
- Un nombre est divisible par 4 (resp. 25) si et seulement si le nombre formé par les deux derniers chiffres (dizaines et unités) est un multiple de 4 (resp. 25).
- Un nombre est divisible par 3 (resp. 9) si et seulement si la somme de ses chiffres est un multiple de 3 (resp. 9).
- Un nombre est divisible par 11 si et seulement si la différence entre la somme des chiffres de rang impair et la somme des chiffres de rang pair est un multiple de 11.

Démonstration :

Soit $N = \dots edcba$ un entier.

- On a : $N = a + 10b + 100c + \dots = a + 2(5b + 50c + \dots)$. Ainsi en utilisant la propriété 2.1, on a N divisible par 2, $2(5b + 50c + \dots)$ divisible par 2, donc a est divisible par 2. Ainsi si N est divisible par 2 alors son chiffre des unités est pair. La réciproque est claire.
- On a $N = a + 5(2b + 20c + \dots)$. On utilise alors une démonstration analogue à la précédente.
- On a $N = (a + 10b) + 4(25c + 250d + \dots) = (a + 10b) + 25(4c + 40d + \dots)$. On utilise alors une démonstration analogue à la première.
- $N = a + (9 + 1)b + (99 + 1)c + \dots = (a + b + c + \dots) + 3 \times 3(b + 11c + 111d + \dots)$. On utilise alors une démonstration analogue à la première.
- $N = (a + 100c + \dots) + (10b + 1\,000d + \dots) = (a + c + 99c + \dots) + (11b - b + 1\,001d - d + \dots) = (a + c + \dots) - (b + d + \dots) + 11(9c + \dots + b + 91d + \dots)$. On utilise alors une démonstration analogue à la première.

Exemple 2.4

Soit $N = 6\,285$. N est divisible par 5 mais pas par 2.

Il est divisible par 3, mais pas par 9 ($6 + 2 + 8 + 5 = 21 = 3 \times 7$).

Il n'est pas divisible par 11 ($((6 + 8) - (2 + 5) = 7)$).

Soit $M = 7\,392$. M est divisible par 2 mais pas par 5.

Il est divisible par 3 mais pas par 9.

Il est divisible par 11 ($((7 + 9) - (3 + 2) = 11)$).

2.2 Les nombres premiers

Définition 2.1

Un nombre premier est un entier strictement supérieur à 1 qui n'est divisible que par 1 et par lui-même.

Exemple 2.5

2 est un nombre premier, 11 aussi.

10 n'est pas un nombre premier car il est divisible par 5.

Propriété 2.3

Pour savoir si un nombre n est premier, on teste sa divisibilité par tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à \sqrt{n} .

Si aucun de ces nombres ne divise n , alors n est un nombre premier, sinon, il ne l'est pas.

Crible d'Ératosthène (3^e siècle av. J.-C.)

On regroupe dans un tableau tous les entiers inférieurs à 100 (par exemple), on barre 1, puis on entoure 2. On barre alors tous les multiples de 2. Le premier entier suivant non barré est premier : il s'agit de 3. On barre tous les multiples de 3 ; le premier entier suivant 3 non barré est premier : c'est 5 etc...

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Ici, les nombres non premiers sont écrits en rouge. Les nombres premiers inférieurs à 100 sont donc :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, et 97.

Théorème 2.1

- Tout entier strictement supérieur à 1 admet un diviseur premier.
- Il existe une infinité de nombres premiers.

Démonstration :

- Soit n un entier strictement supérieur à 1. Si n est premier, il est divisible par lui-même donc par un nombre premier.

Si n n'est pas premier, il s'écrit $n = d \times m$ avec $1 < d < n$. Si d est premier, la démonstration est terminée, et si d n'est pas premier on a $d = d' \times m'$ avec $1 < d' < d$. d' est alors un diviseur de d et de n (cf. prop 2.1). Et on recommence l'étape précédente. Comme $n > d > d' > \dots$, il existe un « $d^{(p)}$ » qui est premier.

- Raisonnons par l'absurde : on suppose qu'il y a un nombre fini de nombres premiers. On les note p_1, p_2, \dots, p_n .

Soit $N = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n + 1$. Ce nombre admet un diviseur premier p qui est un des p_i où $1 \leq i \leq n$.

Ainsi, p divise N et p divise $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$, donc il divise la différence de deux (propriété 2.1). Donc p divise 1 et donc $p = 1$. C'est absurde car p est un nombre premier il est donc strictement plus grand que 1.

On aboutit à une absurdité, notre supposition de départ est donc fausse. On a ainsi démontré qu'il y a une infinité de nombres premiers.

Exemple 2.6

Le nombre $P = n^2 + 2n + 1$ où $n \in \mathbf{N}$ peut-il être premier ?

On a $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$. Si $n = 0$ alors $P = 1$: il n'est pas premier.

Si $n > 0$, P est divisible par $n + 1$ qui est différent de 1 et de P donc il n'est pas premier.

2.3 Décomposition en produit de facteurs premiers

2.3.1 Théorème de décomposition

Théorème 2.2

Tout entier strictement supérieur à 1 se décompose en un produit de facteurs premiers. Cette décomposition est unique, à l'ordre près des facteurs.

Démonstration : (existence)

Soit N un entier strictement supérieur à 1.

Si N est premier, la décomposition est « $N = N$ ».

Si N n'est pas premier, il admet (au moins) un diviseur premier (théorème 2.1). Soit p_1 le plus petit d'entre eux. On a : $N = p_1 \times q_1$, avec $q_1 < N$.

Si q_1 est premier la démonstration est terminée, sinon, on recommence le même procédé avec q_1 : $q_1 = p_2 \times q_2$ avec p_2 premier et $q_2 < q_1, \dots$ Il finit par y avoir un $q_n = 1$ car les q_n sont de plus en plus petits.

Finalement on obtient $N = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n \times 1 = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$

Remarque 2.2

Dans la décomposition en produit de facteurs premiers, un même facteur peut apparaître plusieurs fois. On écrit alors :

$$N = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_n^{\alpha_n}, \text{ avec } p_i \text{ premiers et } 1 \leq \alpha_i$$

Exemple 2.7

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5;$$

$$100 = 2^2 \times 5^2;$$

$$2\,100 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7$$

```

1  Entrées :
2  Saisir N;
3  2 → P;
4  début
5      tant que P ≤ N faire
6          si  $\frac{N}{P}$  est entier alors
7              Afficher P;
8               $\frac{N}{P} \rightarrow N$ ;
9          sinon
10             P + 1 → P
11 fin

```

Algorithme 4 : décomposition en produit de facteurs premiers

Programme en langage Casio :

```
?→N:2→P
While P≤N
If N÷P=Int(N÷P)
Then N÷P→N
P▲
Else P+1→P
IfEnd
WhileEnd
"FIN"
```

Programme en langage TI :

```
Input N
2→P
While P≤N
If N÷P=Int(N÷P)
Then
N÷P→N
Disp P
Pause
Else
P+1→P
End
End
```

2.3.2 Application : détermination des diviseurs d'un entier**Exemple 2.8**

La décomposition en produit de facteurs premiers de 20 est : $20 = 2^2 \times 5$. Pour trouver tous les diviseurs de 20 (et non pas seulement les diviseurs premiers), on effectue tous les produits possibles avec les facteurs de la décomposition ci-dessus (et on a aussi 1 comme diviseur).

On a donc comme diviseurs de 20 :

$$d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 2^2 = 4, d_4 = 5, d_5 = 2 \times 5 = 10, d_6 = 2^2 \times 5 = 20.$$

Généralisation :

Si N est un entier dont la décomposition en produit de facteurs premiers est :

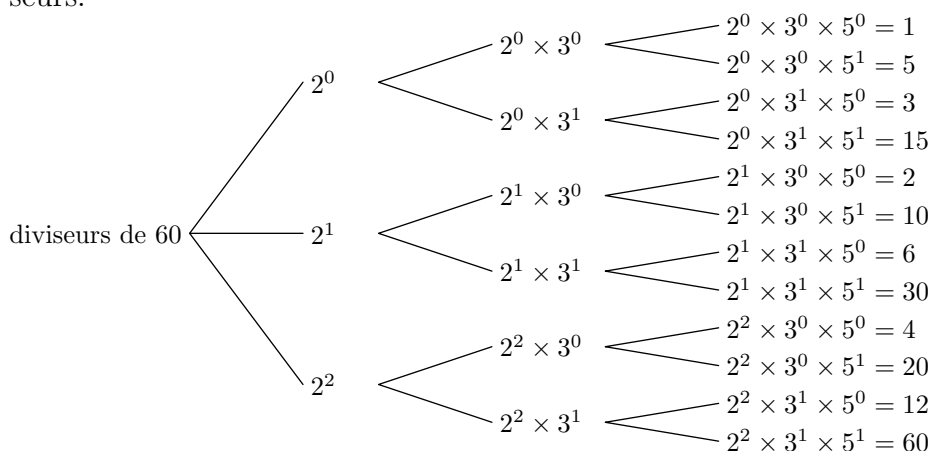
$$N = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_n^{\alpha_n}, \text{ avec } p_i \text{ premiers et } 1 \leq \alpha_i$$

Alors, les diviseurs de N sont les nombres qui s'écrivent :

$$d = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \cdots \times p_n^{\beta_n}, \text{ avec } : 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$$

Exemple 2.9

En utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers de 60, déterminer tous ses diviseurs.



Même question¹ pour 1 078

¹Laissée en exercice au lecteur consciencieux

Remarque 2.3

Avec les notations de la généralisation précédente, le nombre de diviseur de N est :

$$(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \cdots \times (\alpha_n + 1)$$

2.4 Pgcd de deux entiers**2.4.1 Définition****Exemple 2.10**

Les diviseurs de 24 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24.

Les diviseurs de 36 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 et 36.

24 et 36 ont 6 diviseurs en commun. Le plus grand d'entre eux est 12.

Propriété 2.4

Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Il existe toujours au moins un diviseur commun à a et b . Le plus grand d'entre eux est appelé *Plus Grand Commun Diviseur*.

On le note $\text{pgcd}(a, b)$.

Exemple 2.11

En écrivant la liste de leurs diviseurs, déterminer le pgcd des entiers 60 et 100.

2.4.2 Recherche du pgcd : algorithme d'Euclide**Propriété 2.5**

Soit a et b deux entiers naturels tels que $a > b > 0$. On note respectivement q et r le quotient et le reste de la division euclidienne² de a par b .

On a alors : $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r)$.

Démonstration :

Soit $d = \text{pgcd}(a, b)$ et $d' = \text{pgcd}(b, r)$.

On a d divise a et d divise b donc d divise $a - bq$ (propriété 2.1). C'est à dire que d divise r . Ainsi d est un diviseur de b et de r . Donc $d \leq \text{pgcd}(b, r = d')$.

De plus, d' divise b et d' divise r ; donc d' divise $bq + r$ (propriété 2.1). C'est à dire que d' divise a (et il divise b aussi). Or le plus grand diviseur commun à b et a est d . Donc $d' \leq d$.

Finalement, puisque $d \leq d'$ et $d' \leq d$, on peut conclure que $d' = d$ et ainsi $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r)$.

Exemple 2.12

On prend $a = 102$ et $b = 30$. En écrivant les diviseurs de 102 et 30 on aboutit facilement à $\text{pgcd}(102, 30) = 6$.

La division euclidienne de 102 par 30 donne $q = 3$ et $r = 12$. Et $\text{pgcd}(30, 12) = 6$.

Algorithme d'Euclide :

Si on se donne deux nombres entiers non nuls et qu'on souhaite calculer leur pgcd, la propriété 2.5 permet de se ramener à un calcul de pgcd de deux nombres plus petits que les nombres de départ. En l'appliquant plusieurs fois successivement on obtient des restes de plus en plus petits, et ces derniers étant entiers, il finissent par atteindre 0. Le dernier reste non-nul est alors le pgcd des deux nombres de départ. Ce procédé est appelé *algorithme d'Euclide*.

²On a alors $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$

```

1 Entrées :
2  $a$  et  $b$  deux entiers tels que  $a > b$ ;
3 début
4   tant que  $b \neq 0$  faire
5     La division euclidienne de  $a$  par  $b$  donne un quotient  $q$  et un reste  $r$ ;
6      $b \rightarrow a$ ;
7      $r \rightarrow b$ ;
8   Afficher : le pgcd est  $a$ ;
9 fin

```

Algorithme 5 : algorithme d'Euclide

2.4.3 Calculatrices

Casio :

```

?→A
?→B
While B>0
Int(A÷B)→Q
A-B*Q→R
Q▲
R▲
'',.....''
B→A
R→B
WhileEnd
"Le PGCD est : "▲
A▲

```

TI :

```

Prompt A
Prompt B
While B>0
Int(A÷B)→Q
A-B*Q→R
Disp Q
Disp R
'',.....''
Pause
B→A
R→B
End
Disp"Le PGCD est : "
Disp A

```

2.4.4 Application

Théorème 2.3

L'ensemble des diviseurs communs à deux entiers non nuls est l'ensemble des diviseurs de leur pgcd.

Démonstration :

Soit a et b deux entiers non nuls et d leur pgcd. On a : $a = da'$ et $b = db'$.

- Soit n un diviseur de d alors n divise $a'd = a$ et n divise $b'd = b$ (propriété 2.1).
- Réciproquement, soit n un diviseur de a et de b . Montrons que n divise d : on a vu dans la démonstration de la propriété 2.5 que si n divise a et b alors il divise aussi r ; où r est le reste de la division euclidienne de a par b (si $a \geq b$). En répétant le procédé plusieurs fois, on aboutit à : « n divise le dernier reste non nul de l'algorithme d'Euclide ». Or ce dernier reste non nul est le pgcd de a et b . On a donc montré que si n est un diviseur commun à a et b alors il est un diviseur de leur pgcd.

Finalement, l'ensemble des diviseurs communs à a et b est l'ensemble des diviseurs de leur pgcd.

Exemple 2.13

En utilisant le calcul du pgcd par l'algorithme d'Euclide, déterminer les diviseurs communs à 107 448 et 51 282.

2.4.5 Nombres premiers entre eux**Définition 2.2**

Deux nombres sont dits *premiers entre eux* s'ils n'ont pas d'autre diviseur commun que 1.

Remarque 2.4

La définition revient à dire que deux nombres sont premiers entre eux si leur pgcd vaut 1.

Exemple 2.14

26 et 15 sont premiers entre eux.

32 et 30 ne sont pas premiers entre eux : ils sont tous les deux divisibles par 2.

1 088 et 3 213 sont-ils premiers entre eux ?

2.5 Complément

Un programme de recherche des diviseurs « optimisé » pour limiter le temps de recherche de la calculatrice :

Programme en langage Casio :

```
?→N
1→D
While D≤√N
If N÷D=Int(N÷D)
Then D▲
N/D▲
IfEnd
D+1→D
WhileEnd
''FIN''
```

Programme en langage TI :

```
Input N
1→D
While D≤√N
If N÷D=Int(N÷D)
Then
Disp D
Disp N/D
Pause
End
D+1→D
End
```


Chapitre 3

Généralités sur les fonctions

3.1 Introduction : exemples

Exemple 3.1 (le banquier)

Un banquier propose un livret d'épargne qui rapporte 3% d'intérêts par an. À la fin de l'année chaque titulaire d'un tel livret reçoit en plus des intérêts la somme de 10 €.

1. Calculer la somme disponible après un an si on place 100 € en début d'année.
2. Même question pour un placement de 250 €.
3. Le banquier a 150 clients possédant un tel livret. S'il note x le montant placé en début d'année par un client, exprimer le montant $S(x)$ disponible après un an.

Réponses :

1. La somme disponible après un an est :

$$S = 100 + \frac{3}{100} \times 100 + 10 = 113\text{€}$$

2. La somme disponible après un an est :

$$S = 250 + \frac{3}{100} \times 250 + 10 = 267,50\text{€}$$

3. La somme disponible est :

$$S(x) = x + \frac{3}{100} \times x + 10 = 1,03x + 10$$

La somme disponible après un an $S(x)$ dépend de la valeur de x on dit que S est une *fonction* de x .

Remarque 3.1

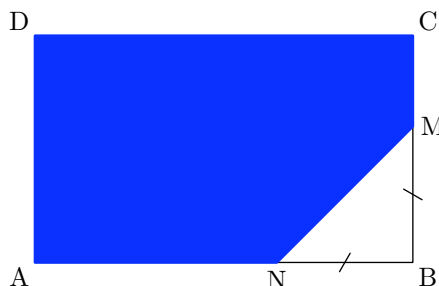
Dans un tableur, le banquier peut compléter une feuille de calculs comme ceci :

B3		$f(x)$	Σ	=	A3*1,03+10					
	A	B	C	D	E	F	G	H		
1										
2	Montant placé	Montant après un an								
3	100,00	113,00								
4	250,00	267,50								
5	500,00	525,00								
6	218,00	234,54								
7	23,00	33,69								
8	36 000,00	37 090,00								
9	230,50	247,42								

Dans la cellule B3 on a écrit $A3+0,03*A3+10$; puis on a recopié cette formule vers le bas.

Exemple 3.2 (géométrie)

On a tracé ci-dessous un rectangle $ABCD$ tel que $AD = 3$ cm et $AB = 5$ cm. M est un point du segment $[BC]$. N est le point de $[BA]$ tel que $BN = BM$.



1. Calculer l'aire délimitée par le pentagone $ANMCD$ lorsque $BM = 1$ cm.
2. Même question lorsque $BM = 2$ cm.
3. On pose maintenant $BM = x$. Exprimer l'aire $\mathcal{A}(x)$ de $ANMCD$ en fonction de x .

Réponses :

1. L'aire de $ANMCD$ est égale à l'aire de $ABCD$ moins l'aire de BMN . Donc :

$$\mathcal{A} = 5 \times 3 - \frac{1 \times 1}{2} = 14,5 \text{ cm}^2$$

2. De même :

$$\mathcal{A}' = 5 \times 3 - \frac{2 \times 2}{2} = 13 \text{ cm}^2$$

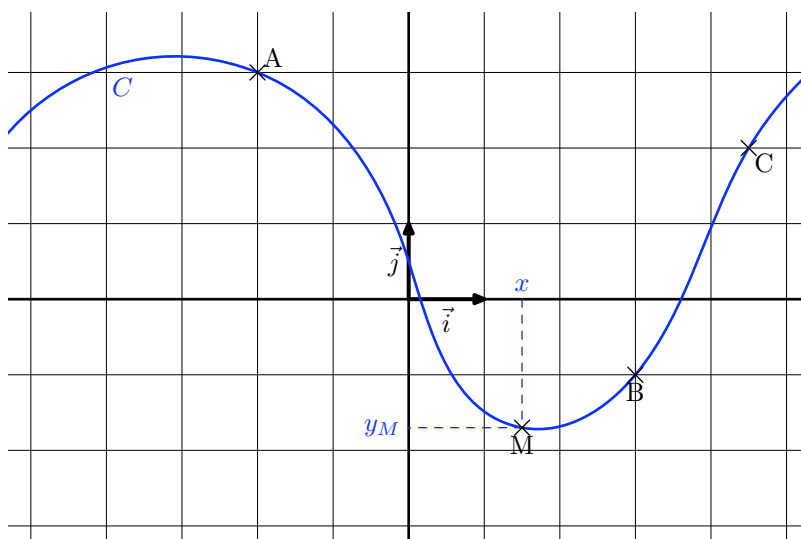
3. Si $BM = x$, l'aire de BNM vaut $\frac{x \times x}{2}$. Donc :

$$\mathcal{A}(x) = 5 \times 3 - \frac{x \times x}{2} = 15 - \frac{1}{2}x^2$$

L'aire $\mathcal{A}(x)$ dépend de la valeur de x on dit que \mathcal{A} est une *fonction* de x .

Exemple 3.3

Sur la figure ci-dessous, on a tracé une courbe dans un repère.



On note A , B et C les points de la courbe d'abscisses respectives -2 , 3 et $\frac{9}{2}$.

Lire l'ordonnée de chacun des points A , B et C .

On a : $y_A = 3$, $y_B = -1$ et $y_C = 2$.

De même, pour tout point M d'abscisse x de la courbe, on peut lire son ordonnée y_M . L'ordonnée de M dépend de x . On dit que c'est une *fonction* de x .

3.2 Généralités

3.2.1 Définition

Définition 3.1

Si à chaque valeur de x d'un ensemble D on associe un autre nombre noté $f(x)$ déterminé par une relation algébrique, géométrique, ... on dit qu'on définit une *fonction numérique* f . On note : $f : x \longmapsto f(x)$

- Pour chaque x , le nombre $f(x)$ est appelé *image* de x par la fonction f . L'image d'un nombre x est unique.
- Le nombre x est appelé un *antécédent* de $f(x)$ par la fonction f .

Exemple 3.4

La fonction f est définie sur l'intervalle $[-5; 7]$ par $f(x) = x^2 - 2x - 1$ signifie que si on se donne une valeur de x dans l'intervalle $[-5; 7]$, on peut calculer son image par la fonction f grâce à l'expression donnée :

- on a : $f(-3) = (-3)^2 - 2 \times (-3) - 1 = 9 + 6 - 1 = 14$,
- on peut dire aussi que l'image par f de 0 est -1 (car $f(0) = 0^2 - 2 \times 0 - 1 = -1$),
- on dit aussi 5 est un antécédent de 14 car $f(5) = 5^2 - 2 \times 5 - 1 = 14$.

Remarque 3.2 (Attention!)

Soit f une fonction numérique définie sur un ensemble D . Pour chaque $x \in D$, il n'existe qu'une seule image de x par f . Par contre un nombre y peut avoir plusieurs antécédents par la fonction f .

Exemple 3.5

Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} par $f(x) = (x + 1)^2 + 2$.

Pour tout réel x , il existe une seule image de x par f : c'est le nombre qu'on obtient en calculant $(x + 1)^2 + 2$.

Par contre on a : $f(2) = (2 + 1)^2 + 2 = 3^2 + 2 = 11$ et $f(-4) = (-4 + 1)^2 + 2 = (-3)^2 + 2 = 9 + 2 = 11$. Ainsi 2 et -4 sont deux antécédents de 11.

On peut remarquer aussi que certains nombres n'ont pas d'antécédent. En reprenant la fonction f , le nombre 0 n'a pas d'antécédent ; en effet, $(x + 1)^2$ est toujours positif ou nul donc $(x + 1)^2 + 2$ est toujours supérieur ou égal à 2 : il ne peut pas valoir 0.

3.2.2 Ensemble de définition

Définition 3.2

Soit f une fonction numérique. On appelle *ensemble de définition* de f et on note généralement \mathcal{D}_f l'ensemble des nombres x pour lesquels $f(x)$ existe. Les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ n'existe pas sont appelées *valeurs interdites* de la fonction f .

Exemple 3.6

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{3x + 2}{x - 1}$. Le nombre $f(x)$ existe pour tout $x \neq 1$. En effet si $x = 1$, pour calculer $f(x)$, il faudrait diviser par 0 ce qui est impossible. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

3.2.3 Représentation graphique

Définition 3.3

Soit f une fonction numérique. Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on pose $y = f(x)$. À chaque couple $(x; y)$ on peut donc associer un point dans un repère. L'ensemble de ces points est appelé *courbe représentative* de la fonction f . On la note généralement \mathcal{C}_f .

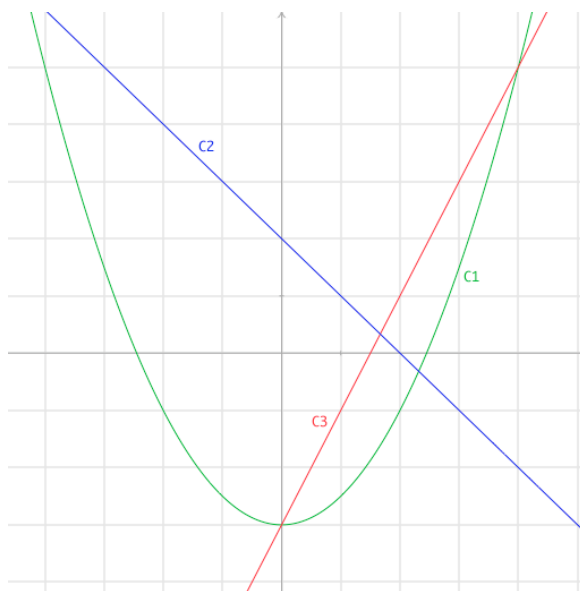
Exemple 3.7

On a tracé ci-contre les représentations graphiques de trois fonctions f , g , et h . Associer à chaque fonction sa courbe représentative sachant que pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$f(x) = 2x - 3$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$$

$$h(x) = -x + 2$$



3.3 Variations d'une fonction

Définition 3.4

On dit qu'une fonction est *strictement croissante* sur un intervalle I si pour tout a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) < f(b)$.

On dit qu'une fonction est *strictement décroissante* sur un intervalle I si pour tout a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) > f(b)$.

Exemple 3.8 (fonction affine)

Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} par $f(x) = 3x + 2$.

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. on a donc $3a < 3b$ car $3 > 0$ et donc $3a + 2 < 3b + 2$. Ainsi on obtient que $f(a) < f(b)$. Donc f est croissante sur \mathbf{R} .

Exemple 3.9 (fonction carrée)

Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} par $f(x) = x^2$.

Soit a et b deux réels tels que $0 \leq a < b$. En multipliant les deux membres de la deuxième inégalité par a on obtient : $a^2 \leq ab$ car $a \geq 0$. De même, en les multipliant par b on obtient : $ab < b^2$ car $b > 0$. Donc finalement, on a : $a^2 \leq ab < b^2$. Donc $f(a) < f(b)$. Ainsi f est strictement croissante sur \mathbf{R}^+ .

Soit a et b deux réels tels que $a < b \leq 0$. En multipliant les deux membres de la première inégalité par a on obtient : $a^2 > ab$ car $a < 0$. De même, en les multipliant par b on obtient : $ab \geq b^2$ car $b \leq 0$. Donc finalement, on a : $a^2 > ab \geq b^2$. Donc $f(a) > f(b)$. Ainsi f est strictement décroissante sur \mathbf{R}^- .

Exemple 3.10 (fonction inverse)

Pour $x \neq 0$, on pose $f(x) = \frac{1}{x}$. Étudions les variations de f sur $]0; +\infty[$:

Soit $0 < a < b$. $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}$. Or $ab > 0$ et $a < b$ donc $a - b < 0$. Donc $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} < 0$ donc $f(b) < f(a)$. Ainsi f est décroissante sur \mathbf{R}_+^* .

On démontrerait de même que f est décroissante sur \mathbf{R}_-^* .

Attention ! f n'est pas décroissante sur \mathbf{R}^* : $-2 < 2$ et $f(-2) < f(2)$.

3.4 Cas particulier : les fonctions linéaires et affines

3.4.1 Définitions et propriétés

Définition 3.5

Soit m et p deux réels.

Une fonction f définie par $f(x) = mx$ est appelée fonction *linéaire*.

Une fonction f définie par $f(x) = mx + p$ est appelée fonction *affine*.

Remarque 3.3

Une fonction linéaire est aussi affine (en prenant $p = 0$). La réciproque est fausse.

3.4.2 Représentation graphique

Propriété 3.1

- La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère.
- La représentation graphique d'une fonction affine est une droite (ne passant pas nécessairement par l'origine du repère).

Vocabulaire :

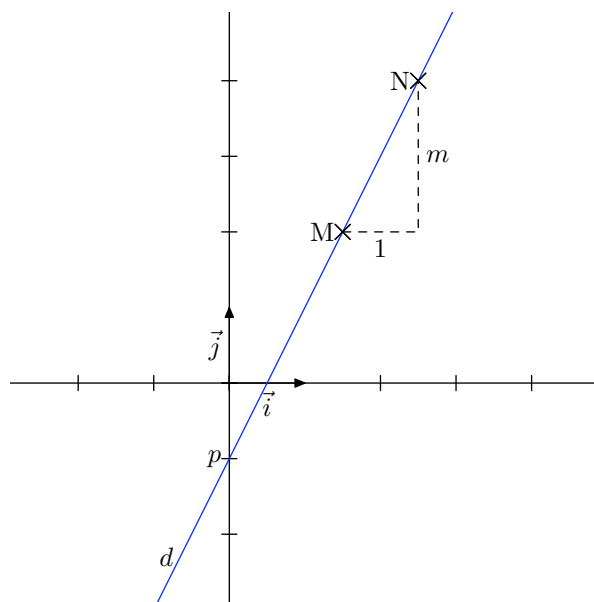
Soit f une fonction affine définie par $f(x) = mx + p$, et d sa représentation graphique.

- le réel m est appelé *coefficient directeur* de la droite d .
- le réel p est appelé *ordonnée à l'origine* de la droite d .

Interprétation graphique de m et p :

p est l'ordonnée du point d'intersection de d avec l'axe des ordonnées (yy').

m est la différence des ordonnées de deux points M et N de d tels que $x_N = x_M + 1$.

**Remarque 3.4**

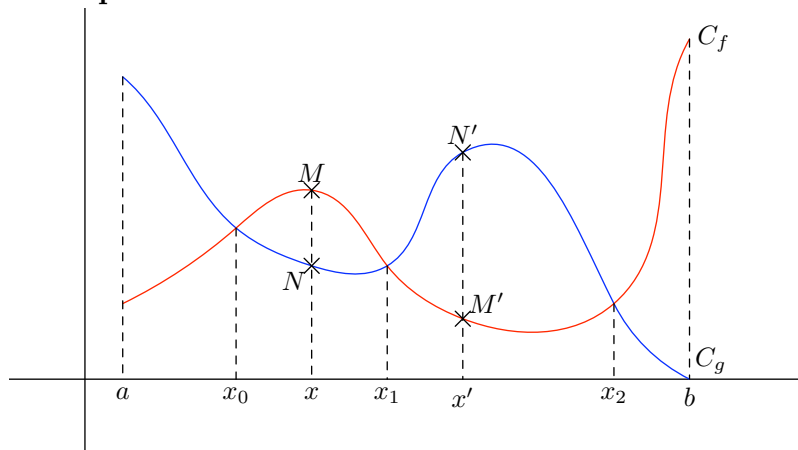
On a aussi pour tout x_1 et x_2 de \mathbf{R} , $m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ et $p = f(x_1) - mx_1$.

3.5 Résolutions graphiques d'équations et d'inéquations

Soit f et g deux fonctions numériques définies sur un intervalle $[a; b]$.

- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ c'est trouver les *abscisses* des points d'intersections de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .
- Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$, c'est trouver les *abscisses* des points $M(x; f(x))$ et $N(x; g(x))$ tels que M est au dessus de N .

Exemple 3.11



Sur la figure ci-dessus, on a tracé les représentations graphiques de deux fonctions f et g définies sur $[a; b]$.

L'équation $f(x) = g(x)$ admet trois solutions : $\mathcal{S} = \{x_0, x_1, x_2\}$.

La solution de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ est $S = [x_0; x_1] \cup [x_2; b]$.

Par exemple, pour $x \in [x_0; x_1]$, on a bien $M(x; f(x))$ qui est au dessus de $N(x; g(x))$. Par contre pour $x' \in [x_1; x_2]$, on a $M(x'; f(x'))$ qui est en dessous de $N(x'; g(x'))$.

3.6 Éléments de symétrie

Propriété 3.2

Soit f une fonction numérique définie sur \mathbf{R} , et \mathcal{C}_f sa courbe représentative.

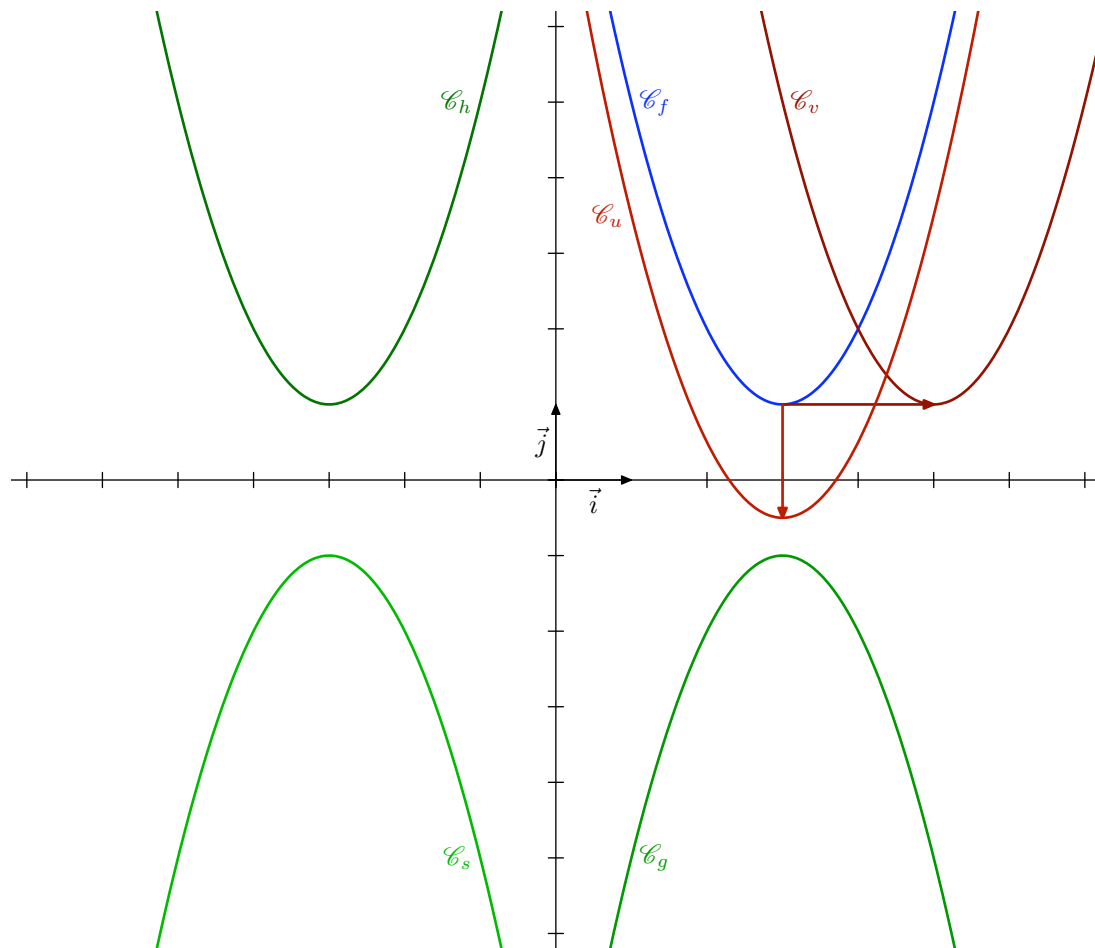
La courbe représentative de la fonction de $g : x \mapsto -f(x)$ est la symétrique de \mathcal{C}_f par rapport à l'axe des abscisses.

La courbe représentative de la fonction de $h : x \mapsto f(-x)$ est la symétrique de \mathcal{C}_f par rapport à l'axe des ordonnées.

La courbe représentative de la fonction de $s : x \mapsto -f(-x)$ est la symétrique de \mathcal{C}_f par rapport à l'origine du repère.

La courbe représentative de la fonction de $u : x \mapsto f(x) + b$ est l'image de \mathcal{C}_f dans la translation de vecteur $b \cdot \vec{j}$.

La courbe représentative de la fonction de $v : x \mapsto f(x - a)$ est l'image de \mathcal{C}_f dans la translation de vecteur $a \cdot \vec{i}$.



Chapitre 4

Probabilités

4.1 Introduction. Premières définitions

Le but des probabilités est d'essayer de rationaliser le hasard : quelles sont les chances d'obtenir un résultat suite à une expérience aléatoire ?

Quelles chances ai-je d'obtenir « pile » en lançant une pièce de monnaie ? Quelles chances ai-je d'obtenir « 6 » en lançant un dé ? Quelles chances ai-je de valider la grille gagnante du loto ?

Vocabulaire

L'objet d'une étude d'un phénomène aléatoire est appelé *expérience aléatoire*. Au cours d'une expérience aléatoire, les résultats possibles sont appelés les *éventualités* (notées généralement e_i). L'ensemble des n éventualités est appelé *l'univers* de l'expérience aléatoire. On le note généralement Ω (omega majuscule dans l'alphabet grec). Un *événement* est un ensemble constitué d'éventualités. Un événement ne comportant qu'une seule éventualité est appelé *événement élémentaire*.

Exemple 4.1

On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6.

- les éventualités sont $e_1 = 1, e_2 = 2, e_3 = 3, e_4 = 4, e_5 = 5, e_6 = 6$;
- l'univers est donc $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$;
- on note A l'événement « obtenir un chiffre pair ». Alors $A = \{2; 4; 6\}$;
- on note B l'événement « obtenir un six ». Alors $B = \{6\}$: c'est un événement élémentaire.

4.2 Distribution de fréquences. Loi de probabilité

4.2.1 Distribution de fréquences

Lorsqu'on répète un grand nombre de fois la même expérience aléatoire en notant les résultats obtenus, on peut compter le nombre de fois où chaque événement élémentaire se produit, et ensuite calculer sa fréquence d'apparition. On obtient alors pour chaque éventualité e_i une fréquence $f_i = \frac{n_i}{N}$, où n_i est le nombre d'apparitions de e_i et N le nombre total d'expériences. On dit alors que la *distribution de fréquences* associée à ces N expériences aléatoires est la suite $(f_1; \dots; f_p)$.

Propriété 4.1

$(f_1; \dots; f_p)$ est une distribution de fréquences associée à N expériences aléatoires identiques.

- on a : $f_1 + \dots + f_p = 1$;

- si A est un événement, alors la fréquence de A , $f(A)$ est la somme des fréquences de toutes les éventualités constituant A .

Exemple 4.2

On lance cent fois de suite une fléchette sur une cible ayant cinq zones : noire, rouge, jaune, bleue et verte. Les résultats obtenus sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

zone touchée	noire	rouge	jaune	bleue	verte
nombre de touches	5	15	20	35	25
fréquence	0,05	0,15	0,20	0,35	0,25

La distribution de fréquences associée à ces cent lancers de fléchettes est donc :

$$(0,05; 0,15; 0,20; 0,35; 0,25)$$

4.2.2 Loi de probabilité

Exemple 4.3

Dans une urne on a placé huit boules numérotées de 1 à 8. On en tire une au hasard. Si les boules sont indiscernables au toucher, on a autant de chances d'en tirer une plutôt qu'une autre. On dit que la probabilité d'obtenir chaque boule est égale à $\frac{1}{8}$. On écrit :

$$p(1) = p(2) = \dots = p(8) = \frac{1}{8}$$

On dit qu'on a défini une loi de probabilité sur l'ensemble $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

Plus généralement, on a la définition suivante :

Définition 4.1

Soit Ω un univers lié à une expérience aléatoire ayant n éventualités e_1, e_2, \dots, e_n . Si à chaque événement élémentaire $\{e_i\}$ on associe un nombre $p_i \in [0; 1]$ tel que :

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

Alors on définit une loi de probabilité sur l'univers Ω . Chaque p_i est appelé *probabilité* de l'événement $\{e_i\}$. La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des éventualités composant A .

Conséquences :

- Ω est l'événement *certain* : $p(\Omega) = 1$;
- \emptyset est l'événement *impossible* : $p(\emptyset) = 0$.

Exemple 4.4

En reprenant l'énoncé de l'exemple 4.3, on note A l'événement « obtenir un chiffre strictement supérieur à 5. On a alors $A = \{6; 7; 8\}$, et donc $p(A) = \frac{3}{8}$.

4.2.3 Loi des grands nombres

Pour une expérience aléatoire donnée ayant une loi de probabilité P , la distribution de fréquences obtenue sur un nombre d'expériences est proche de la loi de probabilité lorsque le nombre d'expériences est « très grand ».

4.2.4 Équiprobabilité

Les n événements élémentaires d'un univers Ω lié à une expérience aléatoire sont dits *équiprobables* si la probabilité de chacun d'eux est $\frac{1}{n}$.

Dans ce cas la probabilité d'un événement A est :

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

Remarque 4.1

Dans un exercice, pour signifier qu'on est dans une situation d'équiprobabilité on a généralement dans l'énoncé une expression du type :

- on lance un dé *non pipé*...
- on tire dans un jeu de cartes *non truqué*...
- dans une urne, il y a des boules *indiscernables au toucher*...
- on rencontre *au hasard* une personne parmi...
- ...

4.3 Quelques exemples de référence

Exemple 4.5 (le dé équilibré)

On lance un dé équilibré à six faces. On considère l'événement A : « obtenir un chiffre pair » et l'événement B : « obtenir un diviseur de six ». Calculer la probabilité de chacun de ces deux événements.

Le dé est équilibré donc on est dans une situation d'équiprobabilité. On a donc pour $1 \leq i \leq 6$, $p(i) = \frac{1}{6}$.

On a : $A = \{2; 4; 6\}$ et $B = \{1; 2; 3; 6\}$. Donc $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, et $p(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Exemple 4.6 (les boules de couleurs)

Dans une urne on place dix boules de couleurs numérotées. Les boules sont indiscernables au toucher et sont réparties comme suit :

- quatre boules rouges numérotées 1, 2, 3 et 4;
- trois boules blanches numérotées 1, 2 et 3;
- deux boules vertes numérotées 1 et 2;
- une boule jaune numérotée 1.

On tire au hasard une boule de l'urne. Calculer les probabilités des événements suivants :

- U : « obtenir une boule numérotée 1 » ;
- B : « obtenir une boule blanche » ;
- A : « obtenir un chiffre pair sur une boule rouge » ;
- I : « obtenir un chiffre impair ».

Les boules sont indiscernables au toucher et le tirage se fait au hasard, on est donc dans une situation d'équiprobabilité : chaque boule a une probabilité $p = \frac{1}{10}$ d'être tirée. En notant chaque éventualité par l'initiale de la couleur suivie du chiffre de la boule, on a :

- $U = \{R1; B1; V1; J1\}$, donc $p(U) = \frac{4}{10} = 0,4$;
- $B = \{B1; B2; B3\}$, donc $p(B) = \frac{3}{10} = 0,3$;
- $A = \{R2; R4\}$, donc $p(A) = \frac{2}{10} = 0,2$;
- $I = \{R1; R3; B1; B3; V1; J1\}$, donc $p(I) = \frac{6}{10} = 0,6$.

Exemple 4.7 (le jeu de cartes)

On choisit une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes non truqué. On appelle « figure » les rois, dames et valets. Calculer les probabilités des événements suivants :

- A : « obtenir une figure » ;
- B : « obtenir un pique » ;
- C : « obtenir un as ».

Le jeu de cartes n'est pas truqué et le choix se fait au hasard, on est donc dans une situation d'équiprobabilité : chaque carte a une probabilité $p = \frac{1}{52}$ d'être choisie :

- dans le jeu il y a $4 \times 3 = 12$ figures. Donc $p(A) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$;
- dans le jeu il y a 13 piques. Donc $p(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$;
- dans le jeu, il y a 4 as. Donc $p(C) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

Exemple 4.8 (non-équiprobabilité)

Un dé est pipé de sorte que les faces 1, 2, 3, 4 et 5 aient les probabilités suivantes d'apparaître :

$$p(1) = p(2) = p(3) = 0,1; p(4) = p(5) = 0,2;$$

1. Calculer $p(6)$.
2. Calculer $p(A)$ et $p(B)$ où A et B sont les événements définis dans l'exemple 4.5.
1. La somme de toutes les probabilités doit être égale à 1, donc :

$$p(6) = 1 - (p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5)) = 0,3$$

2. $p(A) = p(2) + p(4) + p(6) = 0,6$ et $p(B) = p(1) + p(2) + p(3) + p(6) = 0,6$.

Exemple 4.9 (rencontre)

Dans une classe, 20 % des élèves ont 16 ans, 35 % ont 17 ans, 30 % ont 18 ans et 15 % ont 19 ans. On rencontre au hasard un élève de cette classe. Calculer la probabilité qu'il ait « au moins 17 ans ». Même question pour « strictement plus de 17 ans ».

- On note A l'événement l'élève a au moins 17 ans. $p(A) = 35\% + 30\% + 15\% = 80\%$.
- On note B l'événement l'élève a strictement plus de 17 ans. $p(B) = 30\% + 15\% = 45\%$.

4.4 Intersection. Réunion

4.4.1 Événement. Événement contraire

Définition 4.2

Soit A un événement d'un univers Ω lié à une expérience aléatoire. On appelle *événement contraire* de A et on note \bar{A} l'événement constitué de toutes les éventualités de Ω n'étant pas dans A .

Exemple 4.10

Dans le cas d'un jet de dé à six faces, les événements contraires des événements définis dans l'exemple 4.5 sont : \bar{A} : « obtenir un chiffre impair » et \bar{B} : « obtenir un 4 ou un 5 ».

Propriété 4.2

Soit A un événement d'un univers Ω de probabilité $p(A)$. Alors l'événement \bar{A} a pour probabilité $1 - p(A)$.

4.4.2 Intersection. Réunion

Définition 4.3

Soit Ω un univers lié à une expérience aléatoire et P une loi de probabilité sur Ω . Soit A et B deux événements de Ω . Alors :

- l'événement constitué des éventualités appartenant à A et à B est noté $A \cap B$. (on lit « A inter B » ou « A et B »);
- l'événement constitué des éventualités appartenant à A ou à B ou aux deux est noté $A \cup B$. (on lit « A union B » ou « A ou B »).

Exemple 4.11

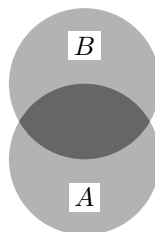
On considère un jeu de 32 cartes. On note A l'événement « obtenir une figure », et B l'événement « obtenir un trèfle ».

1. Expliciter $A \cap B$ et $A \cup B$.
 2. Calculer $p(A)$, $p(B)$, $p(A \cap B)$ et $p(A \cup B)$.
 3. Calculer $p(A) + p(B)$ puis $p(A \cup B) + p(A \cap B)$.
1. $A \cap B$: « obtenir une figure trèfle »
 $A \cup B$: « obtenir une figure ou un trèfle ou une figure trèfle ».
 2. $p(A) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$. $p(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$. $p(A \cap B) = \frac{3}{32}$. $p(A \cup B) = \frac{17}{32}$.
 3. $p(A) + p(B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$. $p(A \cap B) + p(A \cup B) = \frac{3}{32} + \frac{17}{32} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$.

Propriété 4.3

Soit Ω un univers lié à une expérience aléatoire, et P une loi de probabilité sur Ω . Soit A et B deux événements de Ω . Alors on a :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$



Interprétation :

En comptant le nombre d'éventualités de A et en ajoutant le nombre d'éventualités de B , on compte deux fois les éventualités de $A \cap B$. D'où le « $-p(A \cap B)$ » dans la formule de la propriété 4.3

Exemple 4.12

Dans chacune des situations ci-dessous, A et B sont deux événements d'un univers Ω .

1. On donne $p(A) = 0,7$, $p(B) = 0,5$ et $p(A \cap B) = 0,3$. Calculer $p(A \cup B)$.
2. Peut-on avoir $p(A) = 0,7$, $p(B) = 0,65$ et $p(A \cap B) = 0,25$? Justifier.
3. On donne $p(A) = 0,5$, $p(A \cup B) = 0,7$ et $p(A \cap B) = 0,4$. Calculer $p(B)$.
4. On donne $p(A) = 0,65$, $p(B) = 0,32$ et $p(A \cup B) = 0,97$. Les événements A et B sont-ils incompatibles ?

Chapitre 5

Dérivation

La notion de nombre dérivé, puis de fonction dérivée sont nées au XVII^e siècle (presque) simultanément chez deux scientifiques LEIBNIZ (1646-1716) et NEWTON (1642-1727) à partir de deux problèmes très différents.

LEIBNIZ est le premier mathématicien qui a commencé à parler de *fonction numérique*. Il s'est aussi intéressé aux courbes représentatives de ces fonctions et en particulier aux droites joignant deux points d'une telle courbe. Les points $A(a; f(a))$ et $M(a+h; f(a+h))$ sont sur la courbe représentative d'une fonction f . Le coefficient directeur de la droite (AM) est $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Qu'advient-il de ce coefficient directeur lorsque les deux points A et M sont très proches l'un de l'autre, « infiniment proches » ?

NEWTON s'est intéressé aux mouvements et en particulier aux vitesses d'objets en déplacement : à un instant t , un objet a parcouru une distance d_1 , à l'instant $t+h$ ($h > 0$), il a parcouru la distance d_2 . Sa vitesse moyenne entre les instants t et $t+h$ est donc $V_m = \frac{d_2-d_1}{h}$. Que devient cette vitesse lorsque les instants t et $t+h$ sont très proches, « infiniment » proches ?

Dans les deux cas, on est amené à travailler sur des nombres « infiniment proches » et donc à devoir calculer des quotients de nombres « infiniment proches de 0 ». Pour cela, nous allons définir¹ la notion de *limite* qui a posé de nombreux soucis aux mathématiciens d'avant NEWTON et LEIBNIZ (Voir par exemple les paradoxes de ZÉNON D'ALEXANDRIE).

5.1 Taux de variation

Dans cette partie, f est une fonction numérique définie sur un intervalle I , et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère. a et x sont deux réels distincts dans I . On note h le réel tel que $x = a + h$.

5.1.1 Taux de variation

Définition 5.1

Le *taux de variation* de la fonction f entre a et x est le quotient :

$$t = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \text{ où } x = a + h$$

Exemple 5.1

Pour f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = x^2$, le taux de variation de f entre a et $a+h$ est :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = 2a+h$$

¹De manière « intuitive » ...

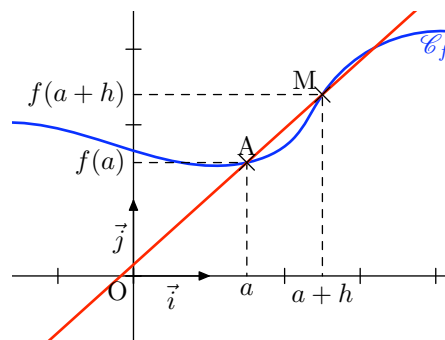
Exercice 5.1

Pour f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = x^2 + 2x + 1$, calculer le taux de variation de f entre a et $a + h$.

5.1.2 Interprétation graphique

On note A le point de \mathcal{C} d'abscisse a , et M celui d'abscisse $x = a + h$.

Le taux de variation de la fonction f entre a et x , $\left(t = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$ est le coefficient directeur de la droite (AM) .

**5.2 Nombre dérivé**

f est une fonction numérique définie sur un intervalle I , et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère. a et x sont deux réels distincts de I . On note h le réel tel que $x = a + h$.

5.2.1 Nombre dérivé**Définition 5.2**

Lorsque h se rapproche de plus en plus de 0 (soit quand x se rapproche de a), si le taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ devient de plus en plus proche d'un nombre réel l fixe, on dit que la limite lorsque h tend vers 0 de ce taux de variation vaut l . On note :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$$

Dans ce cas, on dit que f est *dérivable en a* , et l est alors appelé *le nombre dérivé de f en a* . Ce nombre dérivé est noté $f'(a)$. Ainsi on a :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \text{ lorsque cette limite existe.}$$

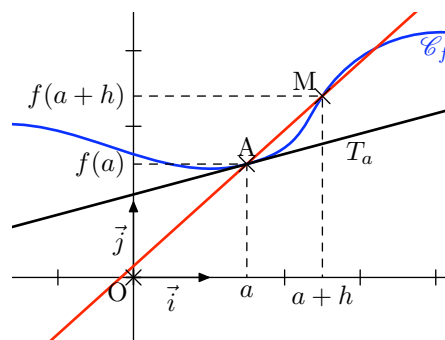
Définition 5.3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Si f est dérivable en tout $a \in I$, on dit que f est dérivable sur l'intervalle I .

5.2.2 Interprétation graphique

Lorsque h se rapproche de 0, le point M se rapproche de A , et la droite (AM) se rapproche de la *tangente* à \mathcal{C} au point A .

Ainsi, $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse a .



5.2.3 Interprétation cinématique

On considère un objet en mouvement. On note t la durée en secondes de son parcours, et $f(t)$ la distance en mètres, parcourue après t secondes.

Le taux de variation de f entre deux instants t_1 et t_2 : $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$ est la vitesse moyenne de l'objet entre les instants t_1 et t_2 .

Définition 5.4

Dans ces conditions, la limite quand t_2 se rapproche de t_1 du taux de variation (c'est à dire le nombre dérivé de f en t_1) est appelée *vitesse instantanée* de l'objet à l'instant t_1 .

Exemple 5.2

On lache un objet en chute libre. On note x la distance parcourue (en m) après t secondes. On admet que la distance parcourue s'exprime en fonction du temps de parcours par $x(t) = 4,9t^2$. Calculer la vitesse instantanée de l'objet après une chute de t secondes.

On exprime le taux de variation de x entre les instants t et $t+h$:

$$v_M = \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \frac{4,9(t+h)^2 - 4,9t^2}{h} = \frac{4,9(t^2 + 2th + h^2) - 4,9t^2}{h} = \frac{9,8th + 4,9h^2}{h}$$

Ainsi, pour $h \neq 0$, on a : $v_M = 9,8t + 4,9h$.

Lorsque h se rapproche de 0, le nombre $4,9h$ est proche de 0 aussi et donc ce taux de variation (qui est la vitesse moyenne de l'objet entre les instants t et $t+h$) se rapproche de $9,8t$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} (9,8t + 4,9h) = 9,8t$$

Donc la vitesse instantanée de l'objet en chute libre est donnée par l'expression :

$$v_I(t) = x'(t) = 9,8t$$

Après 5 secondes de chute libre, la vitesse est de $9,8 \times 5 = 49$ m/s. (Soit 179,4 km/h).

5.2.4 Approximation affine

Exemple 5.3

Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} par $f(x) = x^3 - 2x$. Il n'est pas trop difficile de calculer mentalement les images par f de 1, 3, -2 etc... Par contre, si on souhaite calculer $f(0,98)$ ou $f(1,01)$ c'est plus difficile.

On exprime $f(1+h) = (1+h)^3 - 2(1+h) = -1 + h + 3h^2 + h^3$.

Si h est proche de 0, le réel $3h^2 + h^3$ sera aussi proche de 0, et donc $f(1+h)$ est voisin de $-1 + h$. On dit que $-1 + h$ est une approximation affine de f au voisinage de 1.

Ainsi, on a $f(0,98) = f(1 + (-0,02)) \approx -1 + (-0,02) = -1,02$
et $f(1,01) \approx -0,99$.

Propriété 5.1 (Généralisation)

Si f est une fonction dérivable en a et h un réel « proche » de 0, alors :

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a) \times h$$

5.3 Fonction dérivée

5.3.1 Fonction dérivée

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . On a vu que pour $a \in I$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et on l'a appelé « nombre dérivé de f en a » et noté $f'(a)$.

Définition 5.5

Soit f une fonction dérivable en tout point x d'un intervalle I , alors la fonction qui à x associe $f'(x)$ est appelée *fonction dérivée* de f sur I . On la note f' .

5.3.2 Dérivées des fonctions usuelles

Fonction constante

Soit $k \in \mathbf{R}$ et $f : x \mapsto k$, pour $x \in \mathbf{R}$.

pour $h \neq 0$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{k-k}{h} = 0$. Donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = 0$.

La dérivée d'une fonction constante est la fonction nulle.

la fonction $x \mapsto x^n, n \in \mathbf{N}^*$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et f la fonction définie sur \mathbf{R} par $f(x) = x^n$. Alors, pour $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = nx^{n-1}$.

Exemple 5.4

$f(x) = x^3$. Alors $f'(x) = 3x^2$.

Fonction inverse

Soit f la fonction définie sur \mathbf{R}^* par $f(x) = \frac{1}{x}$. Alors, pour $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Fonction racine carrée

Soit f la fonction définie sur \mathbf{R}_+ par $f(x) = \sqrt{x}$. Alors, pour $x > 0$, (Attention, f n'est pas dérivable en 0) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

5.4 Opérations sur les fonctions dérivables

5.4.1 Dérivée d'une somme

Propriété 5.2

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I . Alors la fonction $f + g$ est dérivable sur I et pour $x \in I$, $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Exemple 5.5

Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} par $f(x) = x^3 + x^2 + 3$. f est dérivable sur \mathbf{R} comme somme de fonctions dérivables sur \mathbf{R} , et pour $x \in \mathbf{R}$, on a : $f'(x) = 3x^2 + 2x$

5.4.2 Produit par un réel

Propriété 5.3

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , et λ un réel quelconque. Alors, la fonction $\lambda f : x \mapsto \lambda f(x)$ est dérivable sur I et pour $x \in I$, $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$.

Exemple 5.6

Soit f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = 2x^2$, et g définie sur \mathbf{R} par $g(x) = 4x^3 - 2x$. Alors, $f'(x) = 2 \times 2x$ et $g'(x) = 4 \times 3x^2 - 2$.

5.4.3 Dérivée d'un produit

Propriété 5.4

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I . Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = u(x)v(x)$. Alors, f est dérivable sur I et pour $x \in I$, $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. On note $f' = u'v + uv'$.

Exemple 5.7

Soit f la fonction définie par $f(x) = (2x^2 + 1)(5x - 4)$.

f est le produit de u par v où $\begin{cases} u(x) = 2x^2 + 1 \\ v(x) = 5x - 4 \end{cases}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur \mathbf{R} et

on a $\begin{cases} u'(x) = 4x \\ v'(x) = 5 \end{cases}$.

Donc $f'(x) = 4x(5x - 4) + (2x^2 + 1) \times 5 = 30x^2 - 16x + 5$.

Soit g la fonction définie sur \mathbf{R}_+ par $g(x) = x^3\sqrt{x}$.

g est dérivable sur \mathbf{R}_+^* comme produit de fonctions dérivables : g s'écrit $u \times v$ avec $\begin{cases} u(x) = x^3 \\ v(x) = \sqrt{x} \end{cases}$, où u est dérivable sur \mathbf{R} et v dérivable sur \mathbf{R}_+^* .

On a donc : $\begin{cases} u'(x) = 3x^2 \\ v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$.

Avec ces notations, on a $g' = u'v + uv'$ donc :

$$\text{Pour } x > 0, g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (3x^2)\sqrt{x} + x^3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 3x^2\sqrt{x} + \frac{x^3}{2\sqrt{x}}.$$

5.4.4 Dérivée d'un quotient

Propriété 5.5

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , avec $v(x) \neq 0$ pour $x \in I$. Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Alors, f est dérivable sur I et pour $x \in I$, $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$. On note $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Exemple 5.8

Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} , par $f(x) = \frac{3x-4}{x^2+3}$.

f est dérivable sur \mathbf{R} comme quotient de fonctions dérivables sur \mathbf{R} dont le dénominateur ne s'annule pas.

On a $f = \frac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = 3x - 4 \\ v(x) = x^2 + 3 \end{cases}$, et $\begin{cases} u'(x) = 3 \\ v'(x) = 2x \end{cases}$.

Et ainsi avec $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, on obtient pour $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = \frac{3 \times (x^2+3) - (3x-4) \times (2x)}{(x^2+3)^2} = \frac{-3x^2+8x+9}{(x^2+3)^2}$.

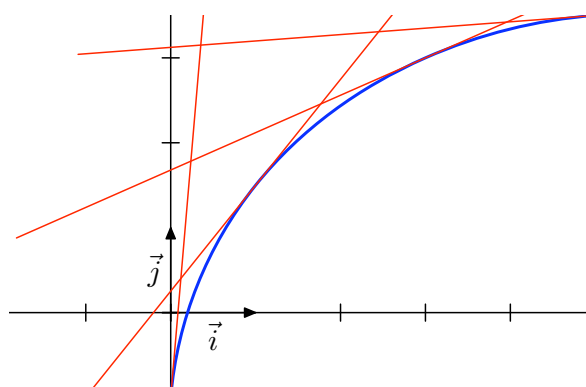
5.5 Fonction dérivée et sens de variation

5.5.1 Variations d'une fonction affine

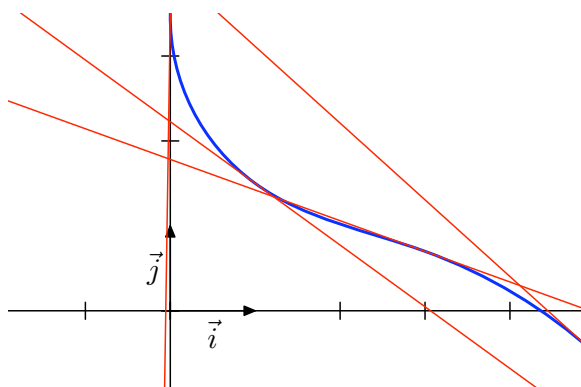
La tangente à une courbe en un point est une droite qui représente une fonction affine. Si le coefficient directeur de la droite est positif, alors la fonction affine associée est croissante ; si le coefficient directeur de la droite est négatif, alors la fonction affine associée est décroissante.

Interprétation graphique :

Sur la figure ci-dessous, toutes les tangentes à \mathcal{C} ont un coefficient directeur positif ; les nombres dérivés de f sont positifs. Les tangentes « montent », et donc la courbe \mathcal{C} aussi : la fonction f est croissante.



Sur la figure ci-dessous, toutes les tangentes à \mathcal{C} ont un coefficient directeur négatif ; les nombres dérivés de f sont négatifs. Les tangentes « descendent », et donc la courbe \mathcal{C} aussi : la fonction f est décroissante.



Attention, ces résultats ne sont que des conjectures et non pas des démonstrations.

5.5.2 Théorèmes

Théorème 5.1 (admis)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si f' est *positive* sur I , alors f est *croissante* sur I .
- Si f' est *négative* sur I , alors f est *décroissante* sur I .
- Si f' est *nulle* sur I , alors f est *constante* sur I .

Théorème 5.2

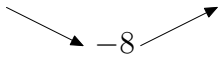
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a; b]$. Si f' est strictement positive (resp. négative) sur $]a; b[$, alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur $[a; b]$.

Exemple 5.9

Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} par $f(x) = x^2 - 6x + 1$.

1. Calculer la dérivée de f .
 2. Étudier le signe de f' sur \mathbf{R} .
 3. Dresser le tableau de variation de f .
1. f est dérivable sur \mathbf{R} et pour $x \in \mathbf{R}$, on a : $f'(x) = 2x - 6$.
 2. $2x - 6 > 0$ si et seulement si $x > 3$. On obtient donc le tableau suivant :

3.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f			

$$f(3) = 3^2 - 6 \times 3 + 1 = 9 - 18 + 1 = -8$$

Exemple 5.10

Soit f la fonction définie sur $\mathcal{D} = [-5; -1[\cup]-1; 3]$ par $f(x) = \frac{2x+5}{x+1}$.

1. Déterminer f' la dérivée de f sur \mathcal{D} .
2. Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .
3. Dresser le tableau de variation de f sur \mathcal{D} .
4. Calculer les coordonnées des points A et B de \mathcal{C}_f d'abscisses respectives -2 et 0 .
5. Calculer le coefficient directeur des tangentes T_A et T_B à \mathcal{C}_f aux points A et B .
6. Tracer T_A , T_B et \mathcal{C}_f dans un repère.