Chapitre 7

Dérivation : applications

7.1 Variations d'une fonction

7.1.1 Des variations au signe de la dérivée

Propriété 7.1
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, alors :
– si f est *strictement croissante* sur I, alors f' est *positive* (ou nulle) sur I ;
– si f est *constante* sur I, alors f' est *nulle* sur I ;
– si f est *strictement décroissante* sur I, alors f' est *négative* (ou nulle) sur I.

Démonstration du premier cas : on considère une fonction f strictement croissante sur I ; soit $x \in I$ et $h \in \mathbf{R}^*$ tel que $x + h \in I$. Étudions le signe du taux de variation de f entre x et $x + h$. On a deux cas possibles :
– si $h > 0$, on a $x < x + h$ or f est strictement croissante sur I donc $f(x) < f(x + h)$ et donc $f(x + h) - f(x) > 0$;
– si $h < 0$, on a $x + h < x$ or f est strictement croissante sur I donc $f(x + h) < f(x)$ et donc $f(x + h) - f(x) < 0$.
Dans les deux cas, on a montré que $f(x + h) - f(x)$ et h sont de même signe ; donc la quotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ est strictement positif. Si on donne à h des valeurs de plus en plus proches de 0, le taux de variation restera strictement positif. On admet alors que dans ce cas, la limite du taux de variation (donc le nombre dérivé) est positive ou nulle ;
Les autres cas se démontrent de la même manière[1].

7.1.2 Du signe de la dérivée aux variations

Théorème 7.1 (admis)
Soit f une fonction dérivable sur une intervalle I, alors :
– si pour $x \in I$ on a $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I ;
– si pour $x \in I$ on a $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I ;
– si pour $x \in I$ on a $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I.

Exemple 7.1 (trivial)
Soit f la fonction carré. On a donc pour $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$ et donc $f'(x) = 2x$. Pour tout $x \in \mathbf{R}_-$, $f'(x) \leq 0$ donc f est décroissante sur $\mathbf{R}_-$. De même, sur $\mathbf{R}_+$, $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur $\mathbf{R}_+$.

[1] Ceux qui ne me croient pas le font ; ils verront que c'est vrai !

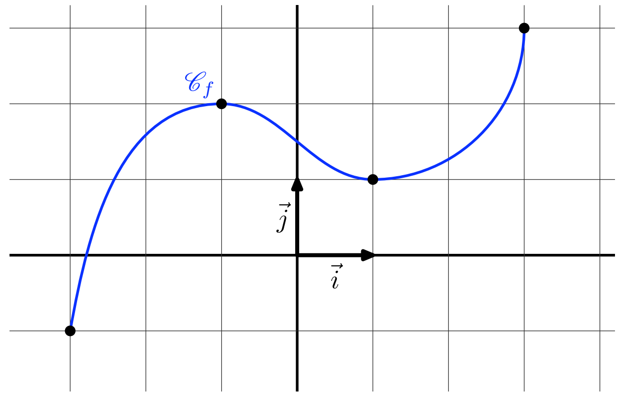
7.2 Extrema d'une fonction

7.2.1 Définitions

Définition 7.1
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit c un réel de I :
- dire que $f(c)$ est un maximum de f signifie que pour $x \in I$, $f(x) \leq f(c)$;
- dire que $f(c)$ est un minimum de f signifie que pour $x \in I$, $f(x) \geq f(c)$.

Définition 7.2
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit c un réel de I. Dire que $f(c)$ est un maximum local (resp. minimum local) de f signifie qu'il existe un intervalle ouvert J contenant c tel que $f(c)$ soit un maximum (resp. minimum) de f sur J ;

Exemple 7.2
Sur la figure ci-contre, on a tracé la représentation graphique d'un fonction f définie sur $I = [-3 ; 4]$:
- sur I, $f(-3) = -1$ est le minimum de f ;
- sur I, $f(-1) = 2$ est un maximum local de f ;
- sur I, $f(1) = 1$ est un minimum local de f ;
- sur I, $f(4) = 3$ est le maximum de f.



Définition 7.3
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit m et M deux réels. Alors :
- on dit que m est un *minorant* de f sur I si pour tout $x \in I$ on a $f(x) \geq m$;
- on dit que M est un *majorant* de f sur I si pour tout $x \in I$ on a $f(x) \leq M$;
- si f admet à la fois un majorant et un minorant sur I, on dit que f est *bornée* sur I.

Remarque 7.1
Si m est un minorant de f sur I, alors tout réel $m' < m$ est aussi un minorant de f sur I. De même, Si M est un majorant de f sur I, alors tout réel $M' > M$ est aussi un majorant de f sur I.

7.2.2 Propriétés

Propriété 7.2 (admise)
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si $f(c)$ est un extremum local de f alors $f'(c) = 0$.

Remarque 7.2
Attention la réciproque est fausse ! En effet considérons la fonction cube : $f(x) = x^3$. La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et on a $f'(x) = 3x^2$ donc $f'(0) = 0$. Pourtant $f(0)$ n'est pas un extremum local de f.

Propriété 7.3
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit $c \in I$ tel que f' s'annule en c en

changeant de signe (c'est-à-dire par exemple que pour $a < x < c$, $f'(x) > 0$ et pour $c < x < b$, $f'(x) < 0$) alors $f(c)$ est un extremum local de f.

Remarque 7.3
On peut facilement observer le résultat de la propriété précédente dans des tableaux de variations :

x		c	
f	↘	$f(c)$	↗

$f(c)$ est un minimum local de f.

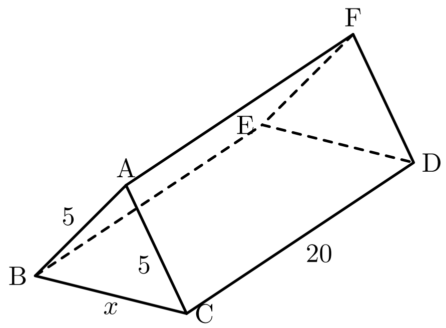
x		c	
f	↗	$f(c)$	↘

$f(c)$ est un maximum local de f.

7.3 Résolution d'un problème

Exemple 7.3

Une boîte a la forme d'un prisme droit à base triangle isocèle comme sur la figure ci-contre. Les rectangles $ACDF$ et $ABEF$ ont des dimensions fixes : $AB = 5$ et $AF = 20$ (en centimètres). On note x la distance BC et l'objet du problème est de déterminer x pour que le volume de la boîte soit maximal.



On peut commencer par remarquer que $x \in [0; 10]$ (pour que le triangle ABC existe).

Notons $\mathscr{V}$ le volume de la boîte. On a $\mathscr{V} = \mathscr{A}_{ABC} \times CD$.

Soit H le pied de la hauteur issue de A dans ABC. Ce dernier étant isocèle, H est le milieu de $[BC]$.

On a donc $AH = \sqrt{25 - \frac{1}{4}x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{100 - x^2}$. Ainsi, $\mathscr{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times x \times \frac{1}{2}\sqrt{100 - x^2}$ et donc $\mathscr{V} = 5x\sqrt{100 - x^2} = 5\sqrt{100x^2 - x^4}$.

Soit f la fonction définie sur $[0; 10]$ par $f(x) = 100x^2 - x^4$. Sur $[0; 10]$, la fonction f a les mêmes variations que $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$. De plus, en multipliant une fonction par 5 ($5 > 0$) on ne change pas ses variations donc f et $\mathscr{V}$ admettent les mêmes variations sur $[0; 10]$. Étudions les variations de f sur $[0; 10]$:

f est définie et dérivable sur $[0; 10]$ et pour $x \in [0; 10]$, on a :

$$f'(x) = 200x - 4x^3 = 4x(50 - x^2) = 4x(\sqrt{50} - x)(\sqrt{50} + x) = 4x(5\sqrt{2} - x)(5\sqrt{2} + x)$$

Étudions le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x :

x	0		$5\sqrt{2}$		10
$4x$		$+$		$+$	
$5\sqrt{2}-x$		$+$	0	$-$	
$5\sqrt{2}+x$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$2\ 500$	$\searrow$	0

Ainsi f admet un maximum pour $x = 5\sqrt{2}$ donc $\mathscr{V}$ sera maximum pour $x = 5\sqrt{2}$ aussi. On a alors $\mathscr{V} = 250$ cm^3.