

# Cours de mathématiques

Thomas Rey

Classe de première STG

21 janvier 2009



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Proportions. Pourcentages</b>	<b>5</b>
1.1	Calcul d'une proportion . . . . .	5
1.2	Comparaisons, additions, multiplications . . . . .	6
1.2.1	Comparaison . . . . .	6
1.2.2	Proportion et réunion . . . . .	6
1.2.3	Proportions échelonnées . . . . .	7
1.3	Variation absolue. Taux d'évolution . . . . .	7
1.4	Coefficient multiplicateur . . . . .	8
1.5	Évolutions successives. Évolutions réciproques . . . . .	8
1.5.1	Évolutions successives . . . . .	8
1.5.2	Évolutions réciproques . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Droites. Systèmes</b>	<b>11</b>
2.1	Coefficient directeur . . . . .	11
2.1.1	Définition . . . . .	11
2.1.2	Droites parallèles . . . . .	12
2.2	Équations de droites . . . . .	12
2.2.1	Droites non parallèles à l'axe des ordonnées . . . . .	12
2.2.2	Droite parallèle à l'axe des ordonnées . . . . .	13
2.3	Systèmes d'équations linéaires . . . . .	13
2.3.1	Système de deux équations à deux inconnues . . . . .	13
2.3.2	Interprétation graphique d'un système linéaire . . . . .	13
2.3.3	Résolution algébrique d'un système linéaire . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Généralités sur les fonctions</b>	<b>17</b>
3.1	Fonction numérique . . . . .	17
3.2	Lectures graphiques . . . . .	18
3.2.1	Image d'un nombre . . . . .	18
3.2.2	Résolution graphique d'équations . . . . .	19
3.2.3	Résolution graphique d'inéquations . . . . .	20
3.2.4	Exercice de synthèse . . . . .	20
3.3	Variations . . . . .	20
3.3.1	Sens de variation . . . . .	20
3.3.2	Tableau de variation . . . . .	21
3.3.3	Extremums . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Fonctions usuelles</b>	<b>23</b>
4.1	Les fonctions affines . . . . .	23
4.1.1	Fonction affine . . . . .	23

4.1.2	Signe d'une fonction affine . . . . .	23
4.2	La fonction carré . . . . .	24
4.3	La fonction inverse . . . . .	25
4.4	La fonction cube . . . . .	25
4.5	La fonction racine carrée . . . . .	26
4.6	Étude de fonctions . . . . .	27
4.6.1	Avec la fonction carré . . . . .	27
4.6.2	Fonction homographique . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Statistiques</b>	<b>31</b>
5.1	Graphiques . . . . .	31
5.1.1	Vocabulaire . . . . .	31
5.1.2	Histogramme . . . . .	31
5.1.3	Diagramme en bâtons . . . . .	32
5.2	Paramètres de position . . . . .	33
5.2.1	Le mode . . . . .	33
5.2.2	La médiane . . . . .	33
5.2.3	La moyenne . . . . .	34
5.3	Paramètres de dispersion . . . . .	35
5.3.1	L'étendue . . . . .	35
5.3.2	Les quantiles . . . . .	35
5.3.3	Application : les diagrammes en boîtes . . . . .	36
5.3.4	Variance et écart type . . . . .	37
<b>A</b>	<b>Calculatrices et statistiques</b>	<b>39</b>
<b>B</b>	<b>Dérivées des fonctions usuelles</b>	<b>41</b>

# Chapitre 1

## Proportions. Pourcentages

### 1.1 Calcul d'une proportion

#### Définition 1.1 (Vocabulaire)

Une *population* est un ensemble d'*individus* qui peuvent être des personnes, des animaux, des objets, ....

L'*effectif* d'une population est le nombre d'individus de la population.

Une *sous-population* est un ensemble d'individus appartenant tous à une même population plus grande.

#### Définition 1.2

Dans une population  $E$  d'effectif  $n_E$  on définit une sous-population  $A$  d'effectif  $n_A$ . La *proportion* (ou *fréquence*) de la sous-population  $A$  dans la population  $E$  est le rapport des effectifs :

$$p = \frac{n_A}{n_E}$$

#### Remarque 1.1

Une proportion  $p$  est souvent exprimée en pourcentage.

#### Remarque 1.2

$A$  étant une sous-population de  $E$ , on a :  $n_A \leq n_E$ , donc nécessairement, on a :  $0 \leq p \leq 1$ .

#### Exemple 1.1

En juillet 2005, le nombre de demandeurs d'emploi en France était d'environ 2 423 300, et la population active était d'environ 24 478 000. La proportion de demandeurs d'emploi dans la population active (ou taux de chômage) était donc de :

$$p = \frac{\text{nombre de demandeurs d'emploi}}{\text{population active}} = \frac{2\,423\,300}{24\,477\,000} \approx 0,099 = 9,9\%$$

#### Remarque 1.3 (Pourcentages)

Attention aux écritures en pourcentages ! Dans une classe de 25 élèves 18 sont des filles.

On peut écrire : « La proportion de filles est  $\frac{18}{25} = 0,72 = \frac{72}{100} = 72\%$  »

Ou encore : « La proportion de filles en pourcentages est  $\frac{18}{25} \times 100 = 0,72 \times 100 = 72$  »

Mais :  $\frac{18}{25} \times 100 \neq 72\%$

## 1.2 Comparaisons, additions, multiplications

### 1.2.1 Comparaison

#### Propriété 1.1

On ne peut comparer deux proportions que si elles représentent deux sous-populations d'une même population.

#### Exemple 1.2

Hier, entre 20 h et 20 h 30, 7 400 000 français étaient devant leur télévision (population  $E$ ). Parmi eux, 2 300 000 regardaient France 2 (population  $A$ ), et 1 300 000 regardaient France 3 (population  $B$ ). Les populations  $A$  et  $B$  sont deux sous-populations de  $E$ , donc sans faire de calculs, on peut affirmer que  $p_B \leq p_A$ . ( $p_B \approx 0,176$ , et  $p_A \approx 0,311$ ).

#### Exemple 1.3

Entre 23 h et 23 h 30, seuls 2 100 000 regardaient encore la télé (population  $F$ ). Parmi eux, 420 000 regardaient Arte (population  $C$ ). On a  $p_C = \frac{420\,000}{2\,100\,000} = 0,2$ . Donc  $p_B < p_C$  pourtant  $n_B > n_C$ . (la proportion des téléspectateurs d'Arte à 23 h était plus importante que celle de France 3 à 20 h, néanmoins, France 3 avait plus de téléspectateurs.)

### 1.2.2 Proportion et réunion

#### Définition 1.3

Soit  $A$  et  $B$  deux sous-populations d'une population  $E$ . Alors :

- l'ensemble des individus qui appartiennent à  $A$  et à  $B$  est noté  $A \cap B$  (on lit  $A$  *inter*  $B$ ) ;
- l'ensemble des individus qui appartiennent à  $A$  ou à  $B$  ou aux deux est noté  $A \cup B$  (on lit  $A$  *union*  $B$ ).

#### Propriété 1.2

Si  $A$  et  $B$  sont deux sous-populations d'une même population  $E$ , alors la proportion de la sous-population  $A \cup B$  est la somme des proportions de  $A$  et de  $B$  diminuée de la proportion de  $A \cap B$ . On écrit :

$$p_{A \cup B} = p_A + p_B - p_{A \cap B}$$

#### Exemple 1.4

Dans une classe de 35 élèves (population  $E$ ), on a fait un contrôle en maths et un en français. Voici les résultats :

- 23 ont eu la moyenne en maths (population  $A$ ),
- 13 ont eu la moyenne en français (population  $B$ ), et parmi eux,
- 8 ont eu la moyenne aux deux contrôles (population  $A \cap B$ ).

La population des élèves ayant eu la moyenne à l'une au moins des deux épreuves est  $A \cup B$ . On a donc :

$$p_{A \cup B} = p_A + p_B - p_{A \cap B} = \frac{23}{35} + \frac{13}{35} - \frac{8}{35} = \frac{28}{35} = 0,8$$

#### Exemple 1.5

Dans une classe de 33 élèves, on a regroupé les effectifs dans un tableau :

	externes	demi-pensionnaires
garçons	6	8
filles	4	15
total	10	23

Dans cet exemple, la population  $E$  est l'ensemble de la classe,  $A$  représente les garçons externes,  $B$  les garçons demi-pensionnaires. L'ensemble  $A \cup B$  est donc l'ensemble des garçons. On a :  $p_A = \frac{6}{33}$ ,  $p_B = \frac{8}{33}$ , et sans calculer le nombre de garçons, on peut affirmer que  $p_{A \cup B} = p_A + p_B$  car  $A \cap B = \emptyset$ .

### 1.2.3 Proportions échelonnées

#### Propriété 1.3

Si  $p$  est la proportion d'une population  $A$  dans une population  $E$ , et  $p'$  est la proportion de cette population  $E$  dans une population  $F$ , alors, la proportion de  $A$  dans  $F$  est  $p \times p'$ .

#### Exemple 1.6

La proportion des anglistes (population  $A$ ) dans l'ensemble des classes de seconde d'un lycée (population  $E$ ) est  $p_1 = 0,6$ . La proportion des élèves de seconde dans l'ensemble des élèves du lycée (population  $F$ ) est  $p_2 = 0,4$ . On peut en déduire que la proportion des élèves de seconde anglistes dans la population du lycée est :  $p = p_1 \times p_2 = 0,24$ .

#### Remarque 1.4

Dans un exercice, pour utiliser la formule «  $P = p \times p'$  » de la propriété 1.3, il faut commencer par écrire ce que sont  $P$ ,  $p$ , et  $p'$  avec :

- $P$  la proportion de plus petit ensemble considéré dans le plus grand ;
- $p$  et  $p'$  étant les deux autres proportions.

## 1.3 Variation absolue. Taux d'évolution

#### Définition 1.4

On considère deux nombres réels strictement positifs  $y_1$  et  $y_2$ .

On appelle *variation absolue* entre  $y_1$  et  $y_2$  le nombre  $y_2 - y_1$ .

On appelle *taux d'évolution* (ou variation relative) entre  $y_1$  et  $y_2$  le nombre  $t = \frac{y_2 - y_1}{y_1}$ .

#### Exemple 1.7

Le PIB de la France en 2003 était de 24 743 € par habitant. En 2002, il était de 21 984 € par habitant.

La variation absolue du PIB par habitant entre 2002 et 2003 est :  $24\,743 - 21\,984 = 2\,759$  €.

Le taux d'évolution du PIB par habitant entre 2002 et 2003 est :

$$t = \frac{24\,743 - 21\,984}{21\,984} \approx 0,126 \text{ soit environ } 12,6\%.$$

#### Remarque 1.5

Si le taux d'évolution est positif, il s'agit d'une augmentation, s'il est négatif, il s'agit d'une diminution.

**Exemple 1.8**

Dans un village, la population était de 2 150 habitants en 2000. En 2005 elle était de 1 847 habitants. Le taux de variation de la population de ce village entre 2000 et 2005 est égal à :

$$\frac{1\,847 - 2\,150}{2\,150} = \frac{-303}{2\,150} \approx -0,141.$$

La population a donc *diminué* d'environ 14 %.

**Remarque 1.6** (Vocabulaire)

En mai 2005, 35 % des Belges étaient satisfaits de leur premier ministre ; en juin 2005 ils étaient 42 %. On dit que la côte de popularité du premier ministre belge a augmenté de 7 *points* et non pas de 7 % : le % n'est pas une unité de mesure.

## 1.4 Coefficient multiplicateur

**Propriété 1.4**

On note  $t$  le taux d'évolution entre  $y_1$  et  $y_2$ . On a alors  $y_2 = (1 + t) \times y_1$ .

Le nombre  $1 + t$  est appelé *coefficient multiplicateur* de  $y_1$  à  $y_2$ . Ce coefficient multiplicateur est un nombre strictement positif. Il est généralement noté  $CM$ . De plus :

- si  $(1 + t) < 1$ , il traduit une baisse ;
- si  $(1 + t) > 1$ , il traduit une hausse.

**Exemple 1.9**

Pendant les soldes, un commerçant baisse les prix de 25 %. Puisque c'est une baisse, le taux d'évolution est négatif ; on a donc :  $t = -\frac{25}{100} = -0,25$ . Le coefficient multiplicateur vaut donc  $CM = 1 + (-0,25) = 0,75$ .

Si un article coûtait 154 €, son prix soldé est  $154 \times 0,75 = 115,50$  €.

Plus généralement, si un article coûtait  $x$  euros, pour trouver son nouveau prix  $y$ , on va multiplier l'ancien par le coefficient multiplicateur. Ainsi on a :  $y = 0,75 \times x$ .

**Remarque 1.7**

Si une quantité augmente de  $p\%$ , le coefficient multiplicateur s'écrit  $CM = 1 + \frac{p}{100}$ .

Si une quantité diminue de  $p\%$ , le coefficient multiplicateur s'écrit  $CM = 1 - \frac{p}{100}$ .

**Exemple 1.10**

En trois ans, le prix des composants électroniques a été divisé par 4. Quel est le pourcentage de baisse des composants électroniques ?

Le coefficient multiplicateur est  $\frac{1}{4} = 0,25$  ; on appelle  $t$  le taux d'évolution du prix des composants électroniques. On a :  $1 + t = 0,25$ , donc  $t = 0,25 - 1 = -0,75$ . Donc le prix des composants électroniques a baissé de 75 % en trois ans.

## 1.5 Évolutions successives. Évolutions réciproques

### 1.5.1 Évolutions successives

**Propriété 1.5**

Lorsqu'un nombre subit plusieurs évolutions successives, le coefficient multiplicateur de l'évolution totale est le produit des coefficients multiplicateurs de chaque évolution.



Autrement dit, si on a trois nombres  $y_1$ ,  $y_2$ , et  $y_3$ , on note  $t_{12}$  le taux d'évolution de  $y_1$  à  $y_2$ ,  $t_{23}$  le taux d'évolution de  $y_2$  à  $y_3$  et  $t_{13}$  le taux d'évolution de  $y_1$  à  $y_3$ . On a alors :

$$1 + t_{13} = (1 + t_{12})(1 + t_{23})$$

### Exemple 1.11

Après avoir augmenté ses prix de 10 %, un commerçant décide de solder ses articles à -25 %. L'augmentation a un coefficient multiplicateur de  $(1 + \frac{10}{100}) = 1,10$  ; le coefficient multiplicateur de la baisse vaut :  $(1 - \frac{25}{100}) = 0,75$ . Au total, le coefficient multiplicateur de l'évolution totale est donc égal à :  $1,10 \times 0,75 = 0,825$ .

En notant  $t$  le taux d'évolution correspondant on a  $1 + t = 0,825$ . Donc  $t = -0,175$  ; soit une baisse de 17,5 %.

### Exemple 1.12

Entre 2002 et 2004, la population d'un village a baissé de 44 %. Entre 2002 et 2003, elle avait baissé de 30 %. De combien a-t-elle baissé entre 2003 et 2004 ?

Soit  $t$  le taux de baisse entre 2003 et 2004.

$$\begin{aligned} \text{On a : } & \left(1 - \frac{30}{100}\right) \times (1 - t) = \left(1 - \frac{44}{100}\right) \\ \text{donc : } & (1 - t) = \frac{0,56}{0,7} = 0,8 \\ \text{donc : } & t = 0,8 - 1 = -0,20 \end{aligned}$$

Ainsi, entre 2003 et 2004 la population a baissé de 20 %.

## 1.5.2 Évolutions réciproques

### Remarque 1.8

Si le prix d'un produit augmente de  $p$  %, puis qu'il baisse de  $p$  %, il ne reviendra pas au prix d'origine :

un article coûte 50 €. Il augmente de 10 %, puis baisse de 10 %. Son prix définitif est :  $50 \times (1 + 0,10) \times (1 - 0,10) = 50 \times 1,1 \times 0,9 = 49,50$  €.

### Propriété 1.6

Soit  $y_1$  et  $y_2$  deux réels positifs. On note  $t$  le taux d'évolution de  $y_1$  à  $y_2$  ( $t = \frac{y_2 - y_1}{y_1}$ ). Le taux d'évolution *réciproque*  $t'$  est le taux d'évolution de  $y_2$  à  $y_1$ . On a alors :

$$1 + t' = \frac{1}{1 + t}$$

### Exemple 1.13

Le prix d'un article augmente de 25 %. Quel doit être le taux  $t$  de baisse pour revenir au prix initial ?

On a :  $1 + t = \frac{1}{1 + 0,25}$  donc  $t = \frac{1}{1,25} - 1 = -0,20$ . Il faut donc appliquer une baisse de 20 % pour que l'article revienne au prix initial.



# Chapitre 2

## Droites. Systèmes

Dire que le point  $M$  du plan a pour coordonnées  $(x; y)$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  signifie que :  $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$ . On note  $M(x; y)$ .  $x$  est appelée l'abscisse de  $M$  et  $y$  son ordonnée. Si les axes du repère sont perpendiculaires, on dit que le repère est orthogonal, et si en plus l'unité est la même sur les deux axes, on dit que le repère est orthonormé.

Dans la suite du chapitre, le plan sera muni d'un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

### 2.1 Coefficient directeur

#### 2.1.1 Définition

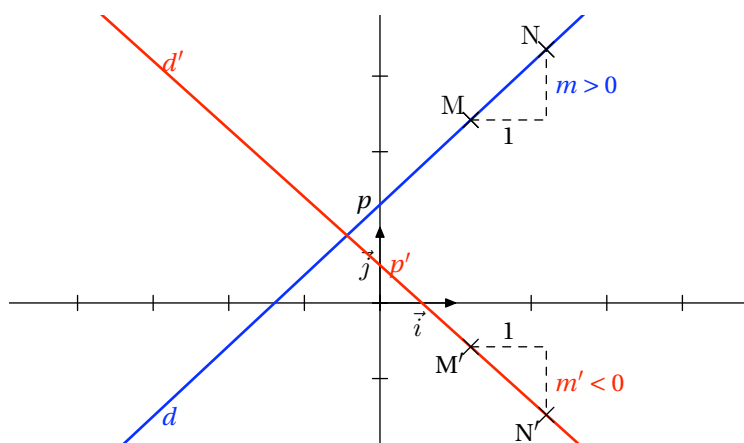
##### Propriété 2.1

Soit  $(D)$  une droite du plan, non parallèle à l'axe des ordonnées. Pour tous les points  $M$  et  $N$  (distincts l'un de l'autre) de la droite  $D$ , le quotient :  $m = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M}$  est constant.

Ce nombre  $m$  est appelé *coefficient directeur* de la droite  $D$ .

##### Remarque 2.1

Si on choisit deux points  $M$  et  $N$  de la droite  $D$  tels que  $x_N - x_M = 1$ , on a alors :  $m = y_N - y_M$  ou encore  $y_N = y_M + m$  :



##### Exemple 2.1

On donne  $A(4; 3)$  et  $B(5; 1,5)$ . Déterminer le coefficient directeur  $m$  de la droite  $(AB)$ .

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1,5 - 3}{5 - 4} = -1,5$$

Cela signifie qu'un point de la droite  $(AB)$  qui parcourt 1 unité horizontalement, va « descendre » de 1,5 unités verticalement<sup>1</sup>.

### 2.1.2 Droites parallèles

#### Propriété 2.2

Soit deux droites  $d_1$  et  $d_2$ , non parallèles à l'axe des ordonnées du repère :

- si  $d_1$  et  $d_2$  sont parallèles, alors elles ont le même coefficient directeur ;
- Réciproquement, si  $d_1$  et  $d_2$  ont le même coefficient directeur, alors elles sont parallèles.

#### Remarque 2.2

On peut aussi dire : les droites  $d_1$  et  $d_2$  sont parallèles *si et seulement si* elles ont le même coefficient directeur.

## 2.2 Équations de droites

### 2.2.1 Droites non parallèles à l'axe des ordonnées

#### Propriété 2.3

Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme  $y = mx + p$ . Cela signifie que :

- si un point a des coordonnées qui vérifient l'équation, alors il est sur la droite ;
- réciproquement, si un point est sur la droite, alors ses coordonnées vérifient l'équation.

L'équation  $y = mx + p$  est appelée *équation réduite* de la droite  $d$ .

Le réel  $p$  est appelé *ordonnée à l'origine* de la droite  $d$  : c'est l'ordonnée du point d'intersection de  $d$  est de l'axe des ordonnées.

#### Exemple 2.2

La droite d'équation  $y = 2x - 3$  a pour coefficient directeur 2 et pour ordonnée à l'origine -3. Elle passe donc par le point  $P(0; -3)$ , et si on se déplace sur la droite de 1 unité horizontalement, on se déplacera verticalement de 2 unités. Donc le point  $A(0 + 1; -3 + 2)$  appartient aussi à la droite. Finalement  $d$  est la droite  $(AP)$  avec  $A(1; -1)$  et  $P(0; -3)$ .

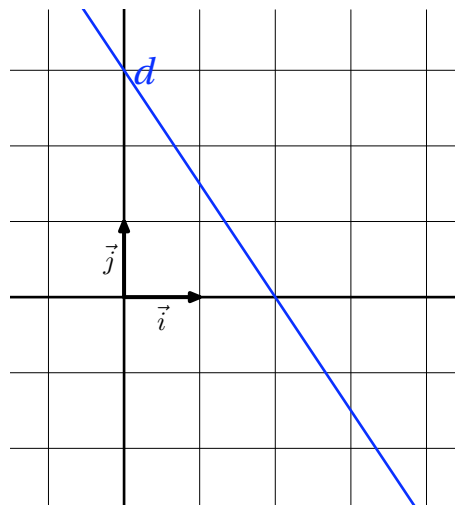
#### Exemple 2.3

Déterminer l'équation réduite de la droite  $d$  tracée ci-contre :

L'équation réduite de la droite  $d$  est de la forme  $y = mx + p$ . La droite  $d$  coupe l'axe des ordonnées au point  $P$  de coordonnées  $(0; 3)$  donc l'ordonnée à l'origine vaut 3 :  $p = 3$ .

La droite  $d$  passe aussi par le point  $A(2; 0)$ . On a donc  $m = \frac{y_A - y_P}{x_A - x_P} = \frac{0 - 3}{2 - 0} = -1,5$ .

Ainsi la droite  $d$  a pour équation réduite :  $y = -1,5x + 3$ .



<sup>1</sup>En supposant le repère orthogonal.

### 2.2.2 Droite parallèle à l'axe des ordonnées

#### Propriété 2.4

Soit  $d$  une droite parallèle à l'axe des ordonnées. Tous les points de la droite  $d$  ont la même abscisse. Si on note  $k$  cette abscisse, on dit que la droite  $d$  a pour équation réduite  $x = k$ .

#### Remarque 2.3 (Attention!)

La droite  $d$  d'équation  $x = k$  pas de coefficient directeur, ni d'ordonnée à l'origine.

## 2.3 Systèmes d'équations linéaires

### 2.3.1 Système de deux équations à deux inconnues

Un système de deux équations linéaires à deux inconnues  $x$  et  $y$  est un couple d'égalités comportant deux nombres inconnus que l'on note  $x$  et  $y$ .

#### Exemple 2.4

$$\text{Soit } (S) : \begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ -2x + y = 5 \end{cases}$$

$(S)$  est un système de deux équations à deux inconnues. Le couple  $(-1; 3)$  est solution de ce système car en remplaçant  $x$  par  $-1$  et  $y$  par  $3$  dans chacune des deux équations du système, on obtient une égalité vraie :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 3 \times (-1) + 2 \times 3 = 3 \\ -2x + y = -2 \times (-1) + 3 = 5 \end{cases}$$

### 2.3.2 Interprétation graphique d'un système linéaire

Une équation du type  $ax + by = c$  peut toujours s'écrire sous la forme  $y = mx + p$  (si  $b \neq 0$ ) ou sous la forme  $x = k$  (si  $a \neq 0$ ). En effet,  $a$  et  $b$  ne peuvent pas être nuls simultanément.

Un système de deux équations linéaires peut donc être représenté par deux droites dans un repère. Les solutions du système sont alors les coordonnées des points qui vérifient les deux équations donc qui appartiennent aux deux droites.

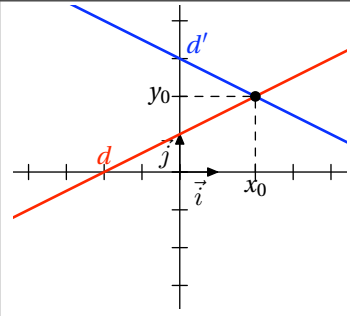
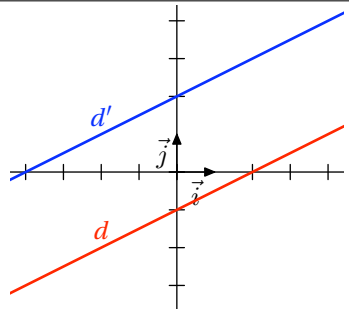
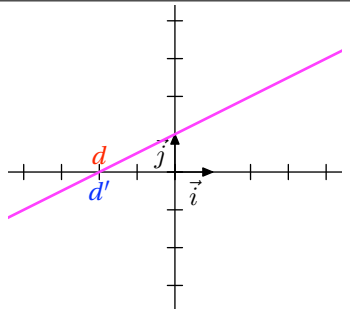
#### Propriété 2.5 (Rappel de seconde)

Soit  $d$  et  $d'$  sont les droites d'équations respectives  $ax + by = c$  et  $a'x + b'y = c'$ . Les droites  $d$  et  $d'$  sont parallèles si et seulement si  $a'b - ab' = 0$ .

On considère un système  $(S)$  de deux équations linéaires à deux inconnues :

$$(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

On note  $d$  et  $d'$  les droites associées aux deux équations du système. On a alors trois possibilités :

Si $ab' - a'b \neq 0$	Si $ab' - a'b = 0$	
	Ordonnées à l'origine distinctes : $\frac{c}{b} \neq \frac{c'}{b'}$	Même ordonnée à l'origine : $\frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}$
Les droites sont sécantes	Les droites sont strictement parallèles	Les droites sont confondues
		
Une unique solution $(x_0; y_0)$	Pas de solution	Tous les couples de coordonnées des points des droites sont solution.

**Exemple 2.5**

Résoudre graphiquement le système suivant : 
$$\begin{cases} 3x + 2y = -8 \\ x + 2y = -4 \end{cases}$$

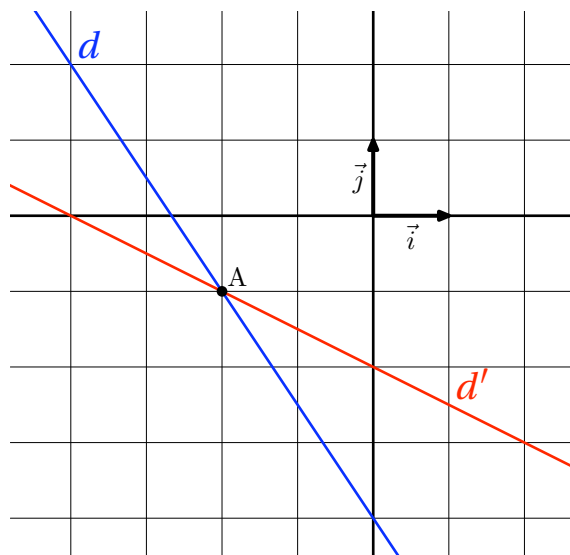
On transforme les équations pour les obtenir sous la forme  $y = mx + p$ . On obtient le système suivant : 
$$\begin{cases} 2y = -3x - 8 \\ 2y = -x - 4 \end{cases}$$

Soit : 
$$\begin{cases} y = -1,5x - 4 \\ y = -0,5x - 2 \end{cases}$$

On trace les droites  $d$  et  $d'$  d'équations respectives  $y = -1,5x - 4$  et  $y = -0,5x - 2$  dans un même repère.

Ces deux droites se coupent au point  $A$  de coordonnées  $(-2; -1)$ .

Donc  $\mathcal{S} = \{(-2; -1)\}$ .

**2.3.3 Résolution algébrique d'un système linéaire**

Pour résoudre un système de deux équations à deux inconnues, on va écrire successivement des systèmes *équivalents* aux précédents dans lesquels on va « éliminer » une des deux inconnues dans une des deux équations. Pour indiquer que chaque système est équivalent au précédent, on utilise le symbole «  $\Leftrightarrow$  » (qui se lit « si et seulement si »).

**Exemple 2.6**

Résolvons algébriquement le système  $(S)$  : 
$$\begin{cases} 3x + 2y = -4 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$$

Résolution	Explication
$\begin{cases} 3x + 2y = -4 & (L_1) \\ 2x + 5y = 1 & (L_2) \end{cases}$	On écrit le système de départ en numérotant les lignes
$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \times 3x + 2 \times 2y = 2 \times (-4) & (2L_1 \rightarrow L'_1) \\ 3 \times 2x + 3 \times 5y = 3 \times 1 & (3L_2 \rightarrow L'_2) \end{cases}$	On multiplie $L_1$ par $a_2$ et $L_2$ par $a_1$ .
$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 4y = -8 & (L'_1) \\ 6x + 15y = 3 & (L'_2) \end{cases}$	On réduit.
$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 4y = -8 & (L'_1) \\ 0x + 11y = 3 - (-8) & (L'_2 - L'_1 \rightarrow L''_2) \end{cases}$	On soustrait les deux lignes.
$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 4y = -8 & (L'_1) \\ y = \frac{11}{11} = 1 & (L''_2) \end{cases}$	On résout $(L''_2)$ .
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-8-4}{6} = -2 & (L'_1) \\ y = 1 & (L''_2) \end{cases}$	On reporte $y = 1$ dans $(L'_1)$ et on résout.
$\mathcal{S} = \{(-2; 1)\}$	On écrit l'ensemble solution.





# Chapitre 3

## Généralités sur les fonctions

### 3.1 Fonction numérique

#### Définition 3.1

Si à chaque valeur de  $x$  d'un ensemble  $\mathcal{D}$  on associe un autre nombre noté  $f(x)$  déterminé par une relation algébrique, géométrique, ... on dit qu'on définit une *fonction numérique*  $f$ . On dit que  $f$  est la fonction définie par  $f(x) = \dots$ . On note :

$$f : x \longmapsto f(x)$$

- Pour chaque  $x$  de  $\mathcal{D}$ , le nombre  $f(x)$  est appelé *image* de  $x$  par la fonction  $f$ . L'image d'un nombre  $x$  est unique.
- Si  $y = f(x)$ , le nombre  $x$  est appelé un *antécédent* de  $y$  par la fonction  $f$ .

#### Exemple 3.1

La balance du rayon fruits et légumes du supermarché « Letrègran » est une fonction numérique : elle associe à une masse de tomates (par exemple) un autre nombre qui est le prix à payer. C'est même une fonction *linéaire* que vous avez rencontrée en classe de troisième.

#### Exemple 3.2

La fonction  $f$  est définie sur l'intervalle  $[-5; 7]$  par  $f(x) = x^2 - 2x - 1$  signifie que si on se donne une valeur de  $x$  dans l'intervalle  $[-5; 7]$ , on peut calculer son image par la fonction  $f$  grâce à l'expression donnée :

- on a :  $f(-3) = (-3)^2 - 2 \times (-3) - 1 = 9 + 6 - 1 = 14$ ,
- on peut dire aussi que l'image par  $f$  de 0 est  $-1$  (car  $f(0) = 0^2 - 2 \times 0 - 1 = -1$ ),
- on dit aussi 5 est un antécédent de 14 car  $f(5) = 5^2 - 2 \times 5 - 1 = 14$ .

#### Remarque 3.1 (Attention !)

Soit  $f$  une fonction numérique définie sur un ensemble  $\mathcal{D}$  :

- pour chaque  $x \in \mathcal{D}$ , il n'existe qu'une seule image de  $x$  par  $f$  ;
- par contre un nombre  $y$  peut avoir plusieurs antécédents par la fonction  $f$ .

#### Exemple 3.3

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f(x) = (x + 1)^2 + 2$ .

Pour tout réel  $x$ , il existe une seule image de  $x$  par  $f$  : c'est le nombre qu'on obtient en calculant  $(x + 1)^2 + 2$ .

Par contre on a :

**d'une part**  $f(2) = (2 + 1)^2 + 2 = 3^2 + 2 = 11$  ;

**d'autre part**  $f(-4) = (-4 + 1)^2 + 2 = (-3)^2 + 2 = 9 + 2 = 11$

Ainsi 2 et  $-4$  sont deux antécédents de 11.

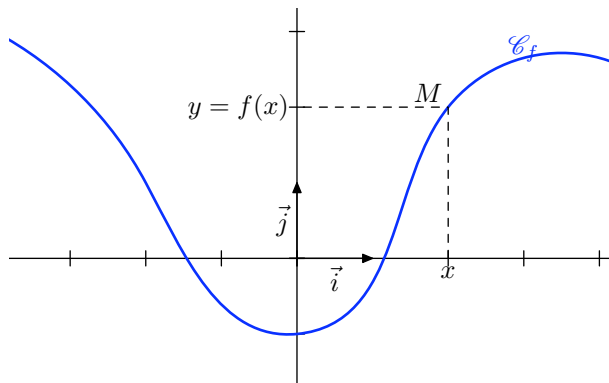
On peut remarquer aussi que certains nombres n'ont pas d'antécédent. En reprenant la fonction  $f$ , le nombre 0 n'a pas d'antécédent.

En effet,  $(x + 1)^2$  est toujours positif ou nul donc  $(x + 1)^2 + 2$  est toujours supérieur ou égal à 2 : il ne peut pas valoir 0.

### Définition 3.2 (Représentation graphique)

Une fonction  $f$  permet d'associer à chaque nombre  $x$  d'un ensemble  $\mathcal{D}$  un autre nombre noté  $f(x)$ . En écrivant  $y = f(x)$  on obtient un couple  $(x; y)$  auquel on peut associer le point  $M(x; y)$  dans un repère.

Ainsi, pour tout  $x \in \mathcal{D}$  on obtient un point  $M$  dans le repère. L'ensemble des points  $M$  ainsi obtenus est appelé *courbe représentative de la fonction  $f$* . On la note généralement  $\mathcal{C}_f$ .

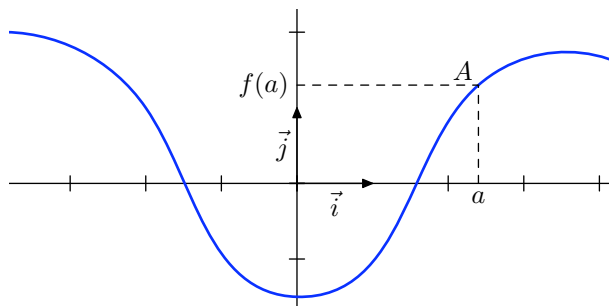


## 3.2 Lectures graphiques

Dans cette partie,  $f$  est une fonction numérique définie sur un ensemble  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}_f$  est sa courbe représentative dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

### 3.2.1 Image d'un nombre

L'image  $f(a)$  d'un nombre  $a \in \mathcal{D}$  par la fonction  $f$  est l'ordonnée du point de la courbe  $\mathcal{C}_f$  qui a pour abscisse  $a$ .

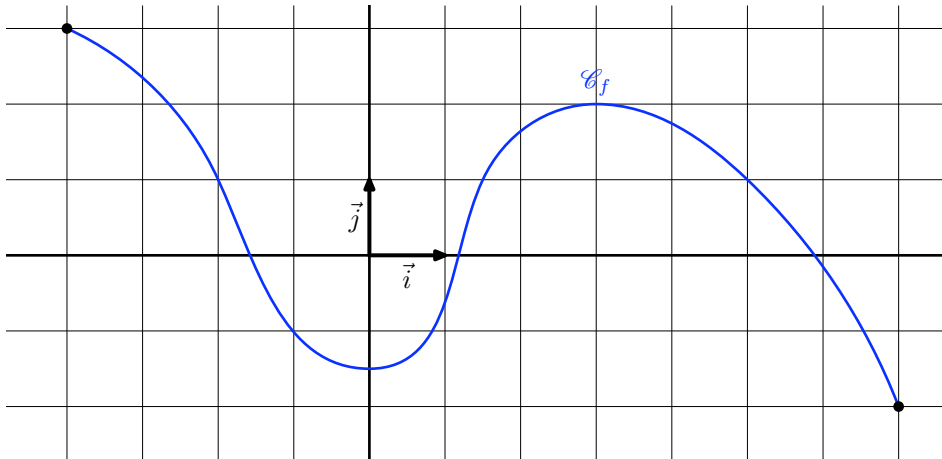


### 3.2.2 Résolution graphique d'équations

Résoudre graphiquement l'équation  $f(x) = m$  c'est trouver les abscisses des points de  $\mathcal{C}_f$  qui ont pour ordonnée  $m$ . Cela revient à rechercher les *antécédents* de  $m$  par la fonction  $f$ .  
 Pour déterminer graphiquement les solutions d'une telle équation on cherche les abscisses des points communs entre  $\mathcal{C}_f$  et la droite d'équation  $y = m$ .

#### Exemple 3.4

Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentant une fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[-4; 7]$ .

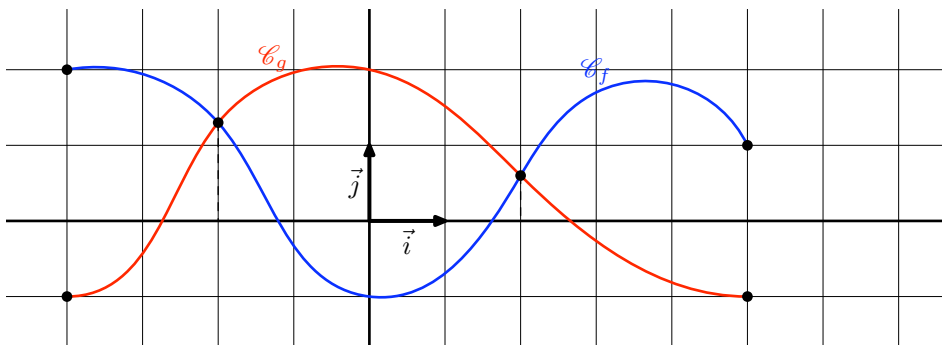


- L'équation  $f(x) = 2,5$  a une unique solution sur  $[-4; 7]$  car un seul point de  $\mathcal{C}_f$  a pour ordonnée 2,5 : il s'agit du point qui a pour abscisse environ  $-3,3$ . On écrit  $\mathcal{S} = \{-3,3\}$ .
- L'équation  $f(x) = 1$  a trois solutions car il y a trois points de  $\mathcal{C}_f$  qui ont pour ordonnée 1 : les points d'abscisses  $-2$ ;  $1,5$  et  $5$ . On écrit  $\mathcal{S} = \{-2; 1,5; 5\}$ .
- L'équation  $f(x) = -3$  n'a pas de solution car la courbe  $\mathcal{C}_f$  n'a pas de point ayant  $-3$  pour ordonnée.
- Les équations  $f(x) = 2$  et  $f(x) = -1;5$  ont chacune deux solutions.

Résoudre graphiquement l'équation  $f(x) = g(x)$  c'est trouver les abscisses des points d'intersection de  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ .

#### Exemple 3.5

Dans le repère ci-dessous, on a tracé les représentations graphiques de deux fonctions  $f$  et  $g$  définies sur l'intervalle  $[-4; 5]$ .



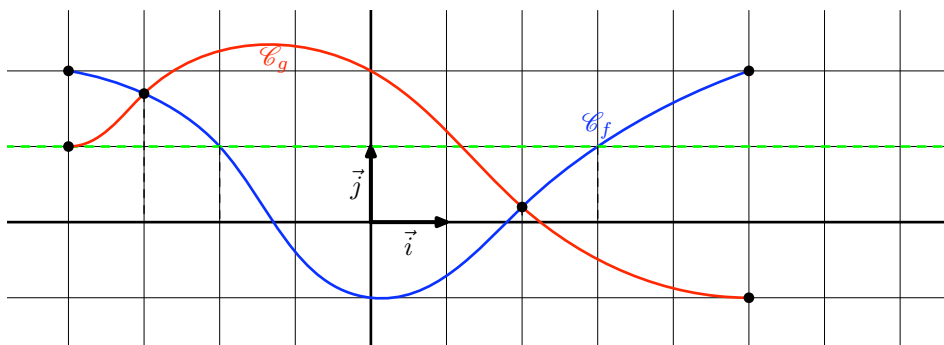
Les solutions de l'équation  $f(x) = g(x)$  sont les abscisses des points d'intersection de  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  :  
 $\mathcal{S} = \{-2; 2\}$

### 3.2.3 Résolution graphique d'inéquations

Résoudre graphiquement l'inéquation  $f(x) < g(x)$  c'est trouver les abscisses des points de  $\mathcal{C}_f$  situés en dessous de  $\mathcal{C}_g$ .

#### Exemple 3.6

Dans le repère ci-dessous,  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  sont les représentations graphiques de deux fonctions  $f$  et  $g$  définies sur l'intervalle  $[-4; 5]$ .



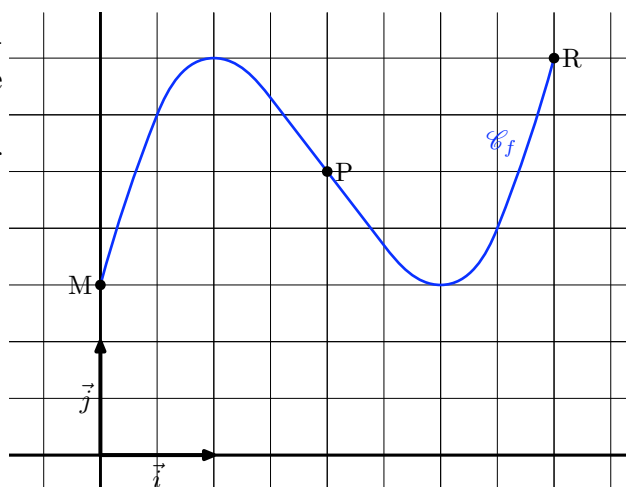
- Les solutions de l'inéquation  $f(x) \leq g(x)$  sont les abscisses des points de  $\mathcal{C}_f$  situés en dessous (ou sur)  $\mathcal{C}_g$  :  $\mathcal{S} = [-3; 2]$ .
- Les solutions de l'inéquation  $f(x) > 1$  sont les abscisses des points de  $\mathcal{C}_f$  situés strictement au dessus de la droite d'équation  $y = 1$  :  $\mathcal{S} = [-4; -2[ \cup ]3; 5]$ .

### 3.2.4 Exercice de synthèse

Sur la figure ci-contre, on a tracé la courbe représentant une fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0; 4]$ .

Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0; 4]$  par  $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ .

1. Tracer la représentation graphique de  $g$ .
2. Résoudre l'équation  $f(x) = 2,5$ .
3. Résoudre l'équation  $g(x) = f(x)$ .
4. Résoudre l'inéquation  $f(x) < g(x)$ .
5. Résoudre l'inéquation  $g(x) \geq 2$ .



## 3.3 Variations

### 3.3.1 Sens de variation

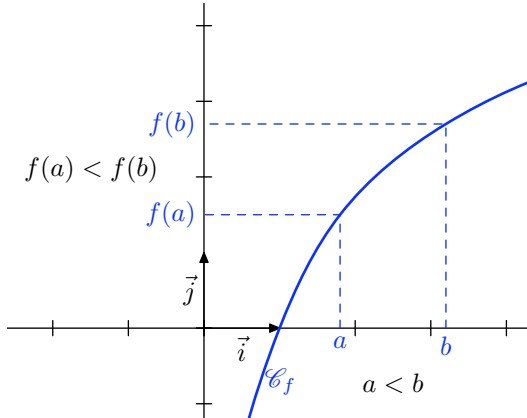
#### Définition 3.3

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  :

- on dit que  $f$  est *strictement croissante* sur  $I$  lorsque pour tous réels  $a$  et  $b$  de  $I$ , si  $a < b$  alors  $f(a) < f(b)$  ;
- on dit que  $f$  est *strictement décroissante* sur  $I$  lorsque pour tous réels  $a$  et  $b$  de  $I$ , si  $a < b$  alors  $f(a) > f(b)$ .

**Interprétation graphique :**

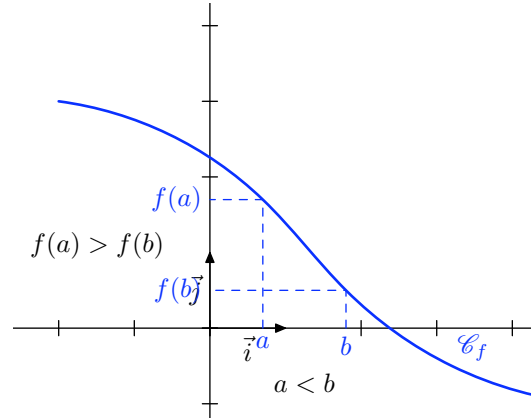
Fonction strictement croissante :



Pour tous les réels  $a$  et  $b$  de  $I$  tels que  $a < b$ , on a  $f(a) < f(b)$ .

La courbe  $\mathcal{C}_f$  « monte » lorsqu'on se déplace vers la droite.

Fonction strictement décroissante :



Pour tous les réels  $a$  et  $b$  de  $I$  tels que  $a < b$ , on a  $f(a) > f(b)$ .

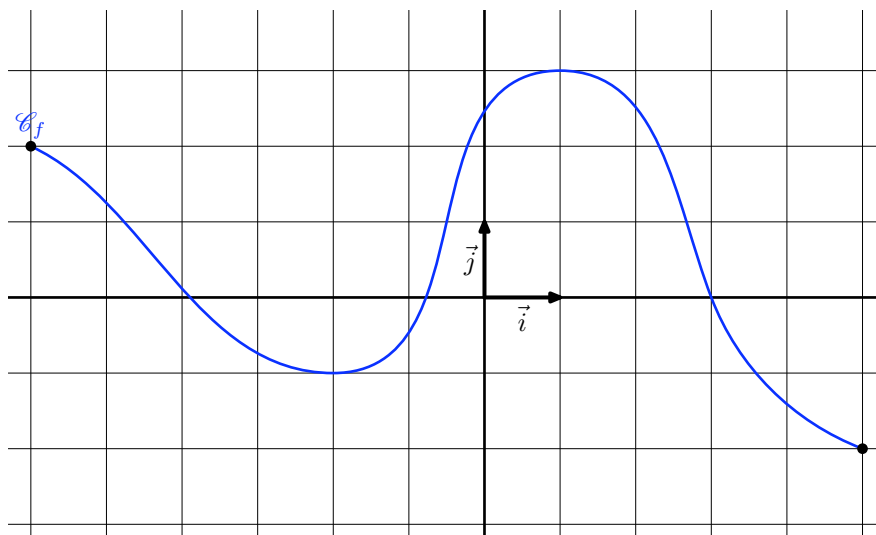
La courbe  $\mathcal{C}_f$  « descend » lorsqu'on se déplace vers la droite.

**3.3.2 Tableau de variation****Définition 3.4**

Étudier les variations d'une fonction, c'est déterminer les intervalles sur lesquels la fonction est strictement croissante et ceux sur lesquels elle est strictement décroissante. On regroupe ces résultats dans un tableau appelé *tableau de variation*.

**Exemple 3.7**

On a tracé ci-dessous la courbe représentant une fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $I = [-6; 5]$ . En observant cette courbe, dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $I$ .



En observant le graphique on remarque que :

- sur l'intervalle  $[-6; -2]$ , la courbe « descend » lorsqu'on se déplace de la gauche vers la droite : sur cet intervalle la fonction  $f$  est strictement décroissante ;
- sur l'intervalle  $[-2; 1]$ , la courbe « monte » lorsqu'on se déplace de la gauche vers la droite : sur cet intervalle la fonction  $f$  est strictement croissante ;

- sur l'intervalle  $[1; 5]$ , la courbe « descend » lorsqu'on se déplace de la gauche vers la droite : sur cet intervalle la fonction  $f$  est strictement décroissante.

On obtient donc le tableau de variation suivant :

$x$	-6	-2	1	5
$f$	2	-1	3	-2

$\swarrow$        $\nearrow$        $\searrow$

Les valeurs 2, -1, 3 et -2 placées dans le tableau sont les images respectives de -6, -2, 1 et 5. On les obtient ici par lecture graphique. Dans le cas où on connaît l'expression de  $f(x)$  en fonction de  $x$ , on les calcule.

Par convention, dans un tableau de variation, une flèche vers le bas signifie que la fonction est strictement décroissante sur l'intervalle considéré et une flèche vers le haut signifie qu'elle est strictement croissante.

### Remarque 3.2

Lorsqu'une fonction a une (ou plusieurs) valeur(s) interdite(s), on l'indique dans le tableau de variation par une double barre verticale :

prenons par exemple la fonction inverse  $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ . La fonction  $f$  a une valeur interdite :  $x = 0$  et on a vu en seconde qu'elle est décroissante sur  $\mathbf{R}_-^*$  et sur  $\mathbf{R}_+^*$ .

On obtient donc le tableau de variation suivant :

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f$	$\searrow$		$\searrow$

### 3.3.3 Extremums

#### Définition 3.5

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  ; et soit  $a \in I$  :

- on dit que  $f(a)$  est le maximum de  $f$  sur  $I$  si pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \leq f(a)$ . On dit aussi que  $f$  atteint son maximum sur  $I$  pour  $x = a$  ;
- on dit que  $f(a)$  est le minimum de  $f$  sur  $I$  si pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \geq f(a)$ . On dit aussi que  $f$  atteint son minimum sur  $I$  pour  $x = a$ .

Dans les deux cas on dit que  $f(a)$  est un extremum.

#### Exemple 3.8

Dans l'exemple 3.7, le maximum de  $f$  sur  $[-6; 3]$  est 3 ; il est atteint pour  $x = 1$ . Le minimum de  $f$  sur ce même intervalle est -2 ; il est atteint pour  $x = 5$ .

Toujours dans cet exemple,  $f(-2) = -1$  est un minimum pour  $f$  sur l'intervalle  $[-6; 1]$ .

# Chapitre 4

## Fonctions usuelles

### 4.1 Les fonctions affines

#### 4.1.1 Fonction affine

##### Définition 4.1

Une fonction affine est une fonction définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f(x) = mx + p$  où  $m$  et  $p$  sont deux nombres réels.

Si  $p = 0$  alors  $f$  est une fonction linéaire.


##### Propriété 4.1

On considère une fonction affine  $f$  définie par  $f(x) = mx + p$ .


- Si  $m > 0$ , alors  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbf{R}$ .
- Si  $m = 0$ , alors  $f$  est constante sur  $\mathbf{R}$ .
- Si  $m < 0$ , alors  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbf{R}$ .

##### Tableaux de variations d'une fonction affine :


Si  $m > 0$  :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f$		

Si  $m = 0$  :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f$		

Si  $m < 0$  :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f$		

##### Théorème 4.1

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbf{R}$ . La fonction  $f$  est une fonction affine si et seulement si pour tous réels distincts  $a$  et  $b$ , le quotient  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$  est constant.

Cela signifie que l'accroissement de la fonction est proportionnel à l'accroissement de la variable.

##### Remarque 4.1 (Détermination de $m$ et $p$ )

Si  $f$  est une fonction affine définie par  $f(x) = mx + p$ , alors :

$p = f(0)$  et pour tout  $a \in \mathbf{R}$  et tout  $b \neq a$ , on a  $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .

#### 4.1.2 Signe d'une fonction affine

Soit  $f$  une fonction affine définie par  $f(x) = mx + p$ .

Si  $m \neq 0$ , la représentation graphique de  $f$  est une droite  $d$  qui coupe l'axe des abscisses au point  $A(-\frac{p}{m}; 0)$ . En effet  $f(-\frac{p}{m}) = m \times (-\frac{p}{m}) + p = -p + p = 0$ .

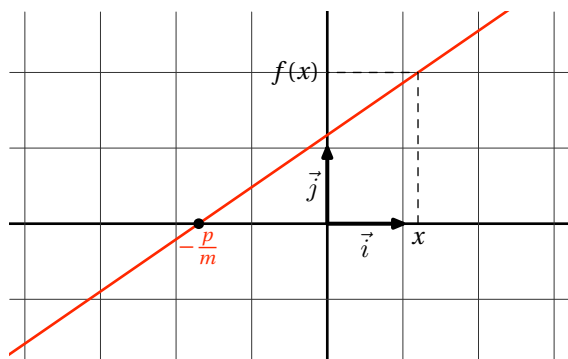
On a alors deux cas possibles :

Si  $m > 0$  alors  $f$  est croissante donc pour tout  $x < -\frac{p}{m}$ , on a  $f(x) < f(-\frac{p}{m}) = 0$  et pour tout  $x > -\frac{p}{m}$ , on a  $f(x) > 0$ .

$x$	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$0$	$+$

**Interprétation graphique :**

La fonction affine est croissante :



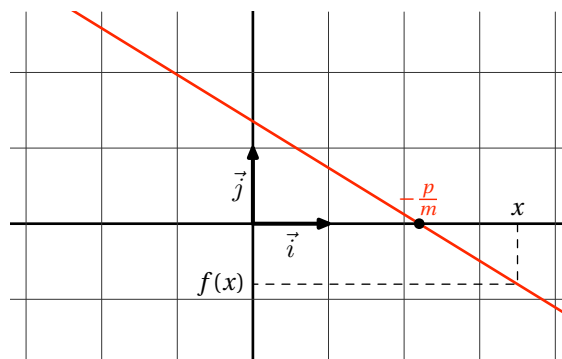
Pour tout  $x < -\frac{p}{m}$ , on a  $f(x) < 0$ .  
 Pour tout  $x > -\frac{p}{m}$ , on a  $f(x) > 0$ .

Si  $m < 0$  alors  $f$  est décroissante donc pour tout  $x < -\frac{p}{m}$ , on a  $f(x) > f(-\frac{p}{m}) = 0$  et pour tout  $x > -\frac{p}{m}$ , on a  $f(x) < 0$ .

$x$	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$0$	$-$

**Interprétation graphique :**

La fonction affine est décroissante :



Pour tout  $x < -\frac{p}{m}$ , on a  $f(x) > 0$ .  
 Pour tout  $x > -\frac{p}{m}$ , on a  $f(x) < 0$ .

## 4.2 La fonction carré

### Définition 4.2

La fonction carré est la fonction définie sur  $\mathbf{R}$  qui, à tout réel associe son carré.

$$f : x \mapsto x^2$$

### Propriété 4.2

La fonction carré est croissante sur  $\mathbf{R}^+$  et décroissante sur  $\mathbf{R}^-$ . Cela peut aussi s'énoncer :

- deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés ;
- deux nombres négatifs sont rangés dans l'ordre inverse de leurs carrés.

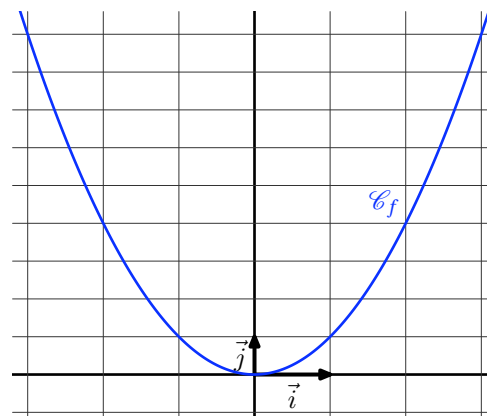
**Tableau de variations :**

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f : x \mapsto x^2$			

Le minimum de la fonction carré est 0 ; il est atteint pour  $x = 0$ .

La courbe représentative de la fonction carré tracée ci-contre est une *parabole* de sommet  $O$  et d'axe  $(O; \vec{j})$ .

**Courbe représentative :**





## 4.3 La fonction inverse

### Définition 4.3

La fonction inverse est la fonction qui, à tout réel non nul associe son inverse.

$$\text{Pour } x \neq 0, f(x) = \frac{1}{x}$$

### Propriété 4.3

La fonction inverse est décroissante sur  $\mathbf{R}_-^*$  et sur  $\mathbf{R}_+^*$ .

### Démonstration :

Soit  $a$  et  $b$  deux réels strictement négatifs tels que  $a < b$ . Étudions le signe de  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$  :  
 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b}{ab} - \frac{a}{ab} = \frac{b-a}{ab}$ . Or  $a$  et  $b$  sont négatifs donc  $ab > 0$ . De plus  $a < b$  donc  $b - a > 0$ . Donc  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$  est égal au quotient de deux réels positifs ; c'est donc un réel positif. Donc  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0$  ; ainsi,  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ . Les nombres  $a$  et  $b$  et leurs images sont donc rangés dans l'ordre inverse : la fonction inverse est décroissante sur  $\mathbf{R}_-^*$ .

On démontrerait de même que la fonction inverse est décroissante sur  $\mathbf{R}_+^*$ .

### Remarque 4.2

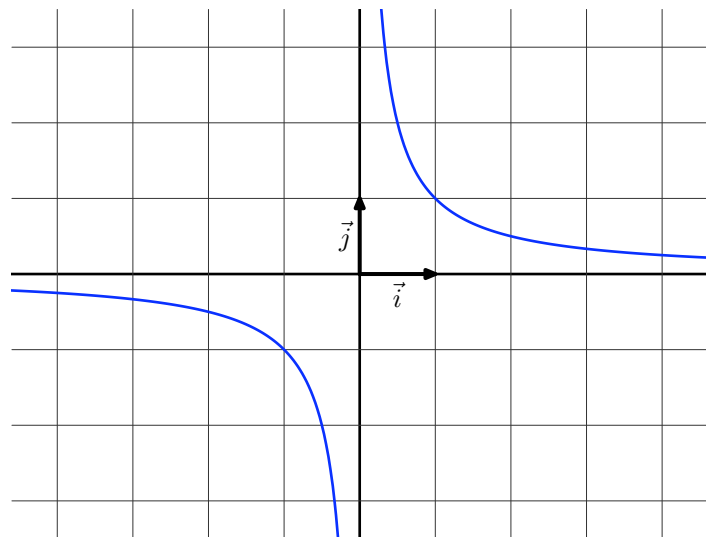
Attention ! La fonction inverse n'est pas décroissante sur  $\mathbf{R}^*$ .

En effet, on a :  $-2 < 2$  et  $\frac{1}{-2} < \frac{1}{2}$  : les images de  $-2$  et  $2$  sont rangés dans le même ordre que  $-2$  et  $2$ .

### Tableau de variations :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f$	$0$		$0$

### Courbe représentative :



La courbe représentative de la fonction inverse est une *hyperbole* de centre  $O$  et d'asymptotes  $(Ox)$  et  $(Oy)$ .

## 4.4 La fonction cube

### Définition 4.4

La fonction cube est la fonction définie sur  $\mathbf{R}$  qui à tout réel associe son cube.

$$f : x \mapsto x^3$$

**Propriété 4.4**

La fonction cube est strictement croissante sur  $\mathbf{R}$ . Cela signifie que deux nombres et leurs cubes sont rangés dans le même ordre.

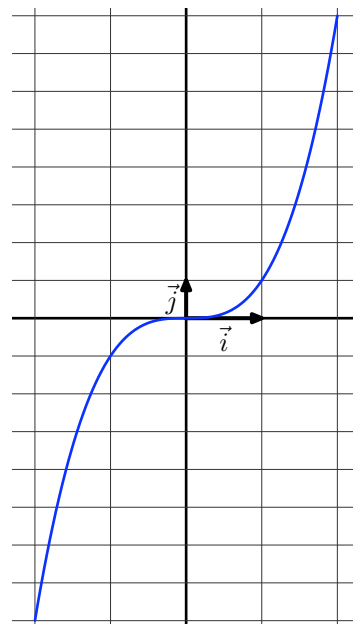
**Tableau de variations :**

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f : x \mapsto x^3$			

La fonction cube n'a ni minimum, ni maximum.

La courbe représentative de la fonction cube est tracée ci-contre dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

**Courbe représentative :**

**Remarque 4.3**

Pour trouver le nombre dont le cube vaut 125 on utilise la touche  $x^{\frac{1}{3}}$  ou encore  $\sqrt[3]{x}$  de la calculatrice :  $125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5$ .

De manière générale, s'il existe, le nombre  $x$  tel que  $x^n = a$  se note  $x = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ .

## 4.5 La fonction racine carrée

**Définition 4.5**

La fonction *racine carrée* est la fonction définie sur  $\mathbf{R}_+$  qui à tout  $x \geq 0$  associe sa racine carrée.

$$\text{pour } x \in \mathbf{R}_+, \quad f(x) = \sqrt{x}$$

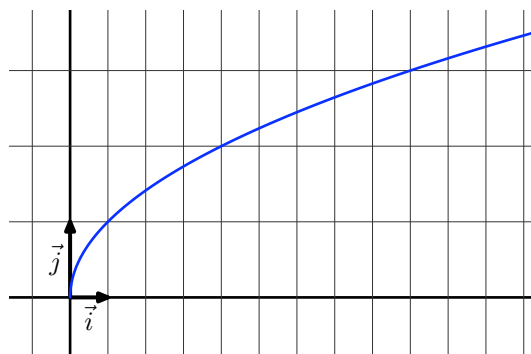
**Propriété 4.5**

La fonction racine carrée est strictement croissante sur  $\mathbf{R}_+$ .

**Tableau de variations :**

$x$	$0$	$1$	$+\infty$
$f$			

**Courbe représentative :**



## 4.6 Étude de fonctions

### 4.6.1 Avec la fonction carré

#### Exemple 4.1

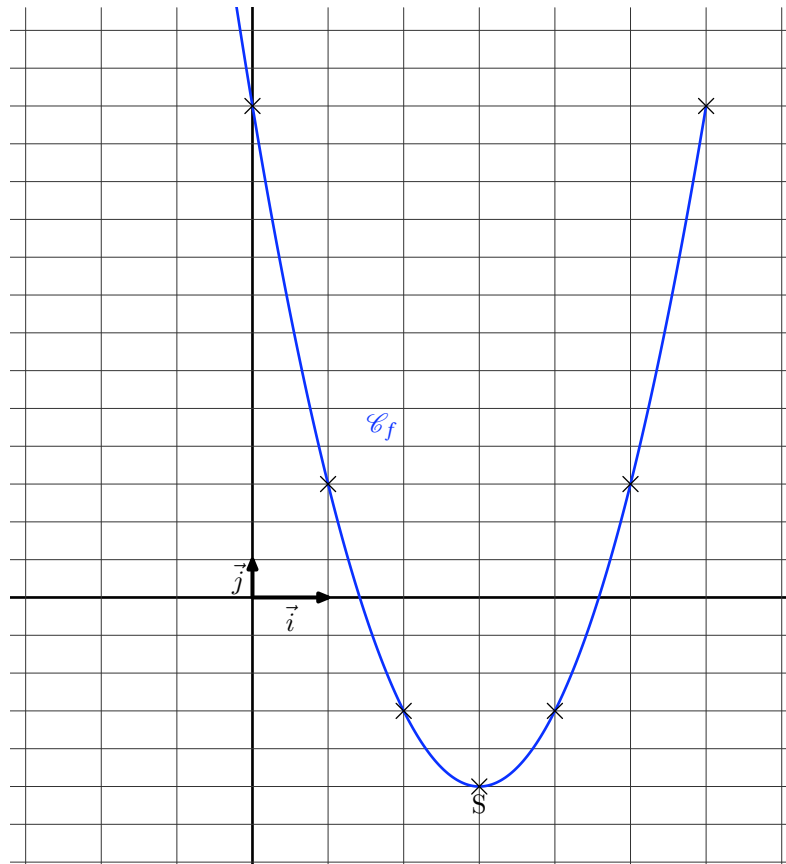
Soit  $f$  la fonction définie sur  $[-1; 6]$  par  $f(x) = 2x^2 - 12x + 13$ . On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère.

1. Dresser un tableau de valeurs de la fonction  $f$  pour  $x$  entier entre  $-1$  et  $6$ .
2. Placer ces points dans un repère puis tracer l'allure de  $\mathcal{C}_f$ .
3. Quel semble être le minimum atteint par  $f$ ? Pour quelle valeur de  $x$ ?
4. Montrer que  $f(x) = 2(x - 3)^2 - 5$ .
5. Déterminer les variations de  $f$  sur  $[-1; 3]$  puis sur  $[3; 6]$ .
6. Dresser le tableau de variations de  $f$  pour  $x \in [-1; 6]$ .
7. Démontrer le résultat constaté à la question 3.

1. On dresse un tableau de valeurs :

$x$	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	27	13	3	-3	-5	-3	3	13

2. On trace alors la courbe représentative de  $f$  dans le repère ci-dessous :



3. La fonction  $f$  semble admettre pour minimum la valeur  $-5$  pour  $x = 3$ .
4. On a :  $2(x - 3)^2 - 5 = 2(x^2 - 6x + 9) - 5 = 2x^2 - 12x + 13 = f(x)$ .

5. Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b \leq 3$ .

On a :  $a < b \leq 3$

On soustrait 3 :

Donc :  $a - 3 < b - 3 \leq 0$

La fonction  $x \mapsto x^2$  est décroissante sur  $\mathbf{R}^-$

Donc :  $(a - 3)^2 > (b - 3)^2$

On multiplie par 2 ( $2 > 0$ )

Donc :  $2(a - 3)^2 > 2(b - 3)^2$

On soustrait 5 :

Donc :  $2(a - 3)^2 - 5 > 2(b - 3)^2 - 5$

D'où :  $f(a) > f(b)$

Donc la fonction  $f$  est décroissante sur  $[-1; 3]$ .

De même sur  $[3; 6]$ , soit  $a$  et  $b$  tels que  $3 \leq a < b$  :

On a :  $3 \leq a < b$

On soustrait 3 :

Donc :  $0 \leq a - 3 < b - 3$

La fonction  $x \mapsto x^2$  est croissante sur  $\mathbf{R}^+$

Donc :  $(a - 3)^2 < (b - 3)^2$

On multiplie par 2 ( $2 > 0$ )

Donc :  $2(a - 3)^2 < 2(b - 3)^2$

On soustrait 5 :

Donc :  $2(a - 3)^2 - 5 < 2(b - 3)^2 - 5$

D'où :  $f(a) < f(b)$

Donc la fonction  $f$  est croissante sur  $[3; 6]$ .

6. On en déduit le tableau de variations de  $f$  sur  $[-1; 6]$  :

$x$	-1	3	6
$f$	27	-5	13

$$f(-1) = 2 \times (-1)^2 - 12 \times (-1) + 13 = 27 \text{ et } f(6) = 2 \times 6^2 - 12 \times 6 + 13 = 13.$$

## 4.6.2 Fonction homographique

### Exemple 4.2

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{3x-5}{x-2}$ . On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
- Montrer que pour  $x \in \mathcal{D}_f$ , on a  $f(x) = 3 + \frac{1}{x-2}$ .
- Déterminer les coordonnées des points d'intersection de  $\mathcal{C}_f$  avec les axes du repère.
- Étudier les variations de  $f$  sur  $] -\infty; 2[$  puis sur  $]2; +\infty[$ .
- En se limitant à l'ensemble  $[-3; 2[ \cup ]2; 7]$ , dresser le tableau de variations de  $f$ , puis un tableau de valeurs et enfin tracer la courbe représentative de  $f$  dans un repère.

- $f(x)$  existe pour  $x - 2 \neq 0$  soit  $x \neq 2$  :  $x = 2$  est une valeur interdite pour  $f$ .

Donc  $\mathcal{D}_f = ] -\infty; 2[ \cup ]2; +\infty[$ .

- On a :  $3 + \frac{1}{x-2} = \frac{3(x-2)}{x-2} + \frac{1}{x-2} = \frac{3x-6+1}{x-2} = \frac{3x-5}{x-2} = f(x)$ .

- Le point d'intersection  $A$  de  $\mathcal{C}_f$  avec l'axe des ordonnées a pour abscisse  $x_A = 0$  et donc pour ordonnée  $y_A = f(0) = \frac{5}{2}$ . Donc  $A(0; \frac{5}{2})$ .

Les points d'intersection de  $\mathcal{C}_f$  avec l'axe des abscisses ont pour ordonnée 0. On résout donc l'équation  $f(x) = 0$ . Un quotient est nul si et seulement si son dénominateur n'est pas nul et son numérateur est nul. Donc pour  $x \neq 2$ ,  $f(x) = 0$  si et seulement si  $3x - 5 = 0$  soit  $x = \frac{5}{3}$ . Donc  $\mathcal{C}_f$  coupe  $(Ox)$  en un seul point :  $B(\frac{5}{3}; 0)$ .

4. Pour étudier les variations de  $f$ , on utilise l'expression de  $f(x)$  trouvée à la question 2.

Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b < 2$ .

On a :  $a < b < 2$  On soustrait 2 :

Donc :  $a - 2 < b - 2 < 0$  La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est décroissante sur  $\mathbf{R}_-^*$

Donc :  $\frac{1}{a-2} > \frac{1}{b-2}$  On ajoute 3 :

Donc :  $3 + \frac{1}{a-2} > 3 + \frac{1}{b-2}$

D'où :  $f(a) > f(b)$

Donc la fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $] -\infty ; 2[$ .

De même, soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $2 < a < b$ .

On a :  $2 < a < b$  On soustrait 2 :

Donc :  $0 < a - 2 < b - 2$  La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est décroissante sur  $\mathbf{R}_+^*$

Donc :  $\frac{1}{a-2} > \frac{1}{b-2}$  On ajoute 3 :

Donc :  $3 + \frac{1}{a-2} > 3 + \frac{1}{b-2}$

D'où :  $f(a) > f(b)$

Donc la fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $]2 ; +\infty[$ .

5. On en déduit le tableau de variations :

Tableau de variations :

$x$	-3	2	7
$f$	2,8		3,2

Tableau de valeurs :

$x$	-3	0	1	3	4	7
$f(x)$	2,8	$\frac{5}{2}$	2	4	$\frac{7}{2}$	3,2

Courbe représentative :

