1 Le train

À midi, un train s'élance de la gare G à 90 km/h et décélère de façon continue de 5 km/h tous les quarts d'heure.

1. On note t le temps écoulé en heures, et $v(t)$ la vitesse de train en fonction de t.
   a. Quelle est la vitesse du train au bout d'une heure ? De trois heures ?
   b. Donner l'expression de $v(t)$ en fonction de t.
   c. Que peut-on dire de $v(t)$ si $t > 4{,}5$? Comment peut-on l'interpréter « concrétement » ?
2. On note $d(t)$ la distance comprise entre la gare G et le train T en fonction de la durée t toujours exprimée en heures. On admet que $d(t) = -10t^2 + 90t$.
   a. Combien vaut la distance GT au bout de 4h ? de 6h ?
   b. Compléter un tableau de valeurs pour $t \in [0\,;\,9]$, tracer la représentation graphique de d dans un repère (unités : 1 cm pour 1 h en abscisse et 1 cm pour 20 km en ordonnée).
   c. En utilisant le graphique précédent, répondre aux questions suivantes :
      – quelle est la distance maximale entre le tyrain et la gare ?
      – quelle est alors la vitesse du train ?
      – à quelle heure repassera-t-il par la gare ?
   d. Nous allons dans cette question retrouver ces résultats par le calcul :
      – montrer que $d(t) = -10(t - 4{,}5)^2 + 202{,}5$.
      – retrouver alors les résultats de la question précédente.

2 Géométrie dynamique

Nous allons dans cette partie utiliser le logiciel de géométrie dynamique GeoGebra disponible gratuitement à l'adresse http ://www.geogebra.org. Un petit mode d'emploi est disponible sur le site http ://reymarlioz.free.fr dans la rubrique « pour tous ».

2.1 Le rectangle inscrit

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 4$cm et $AC = 3$cm. M est un point du segment $[AC]$ et on note x la distance CM. N et P sont les points de $[BC]$ et $[AB]$ tels que $AMNP$ soit un rectangle. L'objectif de cet exercice est de déterminer la position de M pour que le rectangle $AMNP$ ait la plus grande aire possible.

1. **Étude préliminaire avec PC**[1]
   a. Faire une figure.
   b. Déterminer la longueur MN en fonction de x. En déduire l'aire $S(x)$ du rectangle $AMNP$ en fonction de x puis calculer cette aire pour plusieurs valeurs de x.
2. **Étude avec GeoGebra**
   Une fois le logiciel démarré, l'écran est divisé en trois fenêtre : au gauche, la fenêtre *algèbre* où sont résumés les objets créés, à droite la fenêtre *feuille de travail* où la construction géométrique est tracée et en bas la fenêtre *ligne de saisie* où on recopiera les *commandes* écrite sur cette fiche en `caractères machine à écrire`.
   Au fur et à mesure des constructions, on pourra effacer les noms des objets sur la feuille de travail en cliquant-droit sur l'objet et en déselectionnant l'option *afficher l'étiquette*.

[1]PC = Papier - Crayon...

1L-option GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS Activités 1

1 Le train

À midi, un train s'élance de la gare G à 90 km/h et décélère de façon continue de 5 km/h tous les quarts d'heure.

1. On note t le temps écoulé en heures, et $v(t)$ la vitesse de train en fonction de t.
   a. Quelle est la vitesse du train au bout d'une heure ? De trois heures ?
   b. Donner l'expression de $v(t)$ en fonction de t.
   c. Que peut-on dire de $v(t)$ si $t > 4{,}5$? Comment peut-on l'interpréter « concrétement » ?
2. On note $d(t)$ la distance comprise entre la gare G et le train T en fonction de la durée t toujours exprimée en heures. On admet que $d(t) = -10t^2 + 90t$.
   a. Combien vaut la distance GT au bout de 4h ? de 6h ?
   b. Compléter un tableau de valeurs pour $t \in [0\,;\,9]$, tracer la représentation graphique de d dans un repère (unités : 1 cm pour 1 h en abscisse et 1 cm pour 20 km en ordonnée).
   c. En utilisant le graphique précédent, répondre aux questions suivantes :
      – quelle est la distance maximale entre le tyrain et la gare ?
      – quelle est alors la vitesse du train ?
      – à quelle heure repassera-t-il par la gare ?
   d. Nous allons dans cette question retrouver ces résultats par le calcul :
      – montrer que $d(t) = -10(t - 4{,}5)^2 + 202{,}5$.
      – retrouver alors les résultats de la question précédente.

2 Géométrie dynamique

Nous allons dans cette partie utiliser le logiciel de géométrie dynamique GeoGebra disponible gratuitement à l'adresse http ://www.geogebra.org. Un petit mode d'emploi est disponible sur le site http ://reymarlioz.free.fr dans la rubrique « pour tous ».

2.1 Le rectangle inscrit

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 4$cm et $AC = 3$cm. M est un point du segment $[AC]$ et on note x la distance CM. N et P sont les points de $[BC]$ et $[AB]$ tels que $AMNP$ soit un rectangle. L'objectif de cet exercice est de déterminer la position de M pour que le rectangle $AMNP$ ait la plus grande aire possible.

1. **Étude préliminaire avec PC**[1]
   a. Faire une figure.
   b. Déterminer la longueur MN en fonction de x. En déduire l'aire $S(x)$ du rectangle $AMNP$ en fonction de x puis calculer cette aire pour plusieurs valeurs de x.
2. **Étude avec GeoGebra**
   Une fois le logiciel démarré, l'écran est divisé en trois fenêtre : au gauche, la fenêtre *algèbre* où sont résumés les objets créés, à droite la fenêtre *feuille de travail* où la construction géométrique est tracée et en bas la fenêtre *ligne de saisie* où on recopiera les *commandes* écrite sur cette fiche en `caractères machine à écrire`.
   Au fur et à mesure des constructions, on pourra effacer les noms des objets sur la feuille de travail en cliquant-droit sur l'objet et en déselectionnant l'option *afficher l'étiquette*.

[1]PC = Papier - Crayon...

a. Nous allons placer les points $A(-5;1)$, $B(-1;1)$ et $C(-5;4)$ dans le repère grâce aux commandes `A=(-5,1)`, puis `B=(-1,1)` et `C=(-5,4)` (attention le séparateur de coordonnées et une virgule et non pas un point-virgule). En cliquant sur l'icône *segment* , créer dans cet ordre les segments $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$ à la souris.

b. Placer un point M sur le segment $[AC]$ par la commande `M=Point[b]`. À noter qu'en commençant à écrire `po`, la commande `point[]` s'affiche automatiquement ; il suffit alors d'appuyer sur `Entrée` au clavier pour que le curseur se place entre les deux crochets !

c. Tracer la parallèle à (AB) passant par M en cliquant successivement sur l'icône , sur le segment $[AB]$ puis sur M.
Grâce à la commande `N=intersection[d,c]`, on créé le point N.

d. Recommencer l'étape précédente pour créer la droite e parallèle à (AC) passant par N puis P qui est l'intersection de cette droite e et du segment a.

e. Construire le rectangle $AMNP$ par la commande `R=polygone[A,M,N,P]`. Le rectangle est alors colorié[2] et dans la fenêtre, on peut observer « `R=2.95` » où 2,95 est l'aire du rectangle.
Déplacer M sur $[AC]$, le rectangle « bouge » et l'aire varie.
Quelle semble être la plus grande valeur possible atteinte par l'aire de ce rectangle ?

f. Pour se rapprocher de l'étude « théorique » de la question 1, on créé la variable t[3] égale à la longueur du segment CM grâce à la commande `t=segment[C,M]`.
Ainsi, à chaque valeur de t on associe un autre nombre R qui est l'aire du rectangle $AMNP$: on a défini une fonction *aire* sur l'intervalle $[0\,;3]$ (car le segment CM a une longueur comprise entre 0 et 3).
À chaque couple (t,R) on peut associer un point T dans le repère grâce à la commande `T=(t,R)`. Cliquer-droit sur le point T et sélectionner l'option *trace activée*. L'ensemble des positions des points T constitue la *représentation graphique* de la fonction *aire*.
Déterminer alors graphiquement la valeur de t (ou x) pour laquelle l'aire est la plus grande.

g. Pour terminer, vérifier que l'expression trouvée à la question 1b nous donne bien la même représentation graphique en écrivant la commande `S(x)=...` en remplaçant les `...` par l'expression trouvée alors.

3. **Démonstration**
On a $S(x) = -\frac{4}{3}x^2 + 4x$ et la valeur maximale de $S(x)$ semble être 3, atteinte pour $x = 1{,}5$.
a. Exprimer $S(x) - 3$ en fonction de x et l'écrire sous la forme $S(x) - 3 = -\frac{4}{3} \times f(x)$.
b. Factoriser $f(x)$ à l'aide d'une identité remarquable.
c. En déduire l'expression factorisée de $S(x) - 3$.
d. Quelle est la plus grande valeur de $S(x) - 3$? Justifier. Pour quelle valeur de x est-elle atteinte ? En déduire la plus grande valeur de $S(x)$.

2.2 La barre glissante

Sur le même principe, résoudre à l'aide de GeoGebra le problème suivant :
ABC est un triangle rectangle isocèle en A avec $AB = AC = 4$cm. M est un point du segment $[AB]$ et N est le point du segment $[AC]$ tel que $MN = 4$cm.
Déterminer la position de M pour que l'aire du triangle AMN soit maximale.
On pourra utiliser la commande `Cercle[M,4]` qui créé le cercle de centre M et de rayon 4.

[2]On peut changer de couleur en cliquant droit dessus et en choisissant *propriétés*. On peut aussi masquer les droites d et e en cliquant-droit dessus et en déselectionnant l'option *afficher l'objet*.
[3]On n'a pas le droit d'utiliser x qui est une lettre « réservée ».

1L-option GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS Activités 2

a. Nous allons placer les points $A(-5;1)$, $B(-1;1)$ et $C(-5;4)$ dans le repère grâce aux commandes `A=(-5,1)`, puis `B=(-1,1)` et `C=(-5,4)` (attention le séparateur de coordonnées et une virgule et non pas un point-virgule). En cliquant sur l'icône *segment* , créer dans cet ordre les segments $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$ à la souris.

b. Placer un point M sur le segment $[AC]$ par la commande `M=Point[b]`. À noter qu'en commençant à écrire `po`, la commande `point[]` s'affiche automatiquement ; il suffit alors d'appuyer sur `Entrée` au clavier pour que le curseur se place entre les deux crochets !

c. Tracer la parallèle à (AB) passant par M en cliquant successivement sur l'icône , sur le segment $[AB]$ puis sur M.
Grâce à la commande `N=intersection[d,c]`, on créé le point N.

d. Recommencer l'étape précédente pour créer la droite e parallèle à (AC) passant par N puis P qui est l'intersection de cette droite e et du segment a.

e. Construire le rectangle $AMNP$ par la commande `R=polygone[A,M,N,P]`. Le rectangle est alors colorié[2] et dans la fenêtre, on peut observer « `R=2.95` » où 2,95 est l'aire du rectangle.
Déplacer M sur $[AC]$, le rectangle « bouge » et l'aire varie.
Quelle semble être la plus grande valeur possible atteinte par l'aire de ce rectangle ?

f. Pour se rapprocher de l'étude « théorique » de la question 1, on créé la variable t[3] égale à la longueur du segment CM grâce à la commande `t=segment[C,M]`.
Ainsi, à chaque valeur de t on associe un autre nombre R qui est l'aire du rectangle $AMNP$: on a défini une fonction *aire* sur l'intervalle $[0\,;3]$ (car le segment CM a une longueur comprise entre 0 et 3).
À chaque couple (t,R) on peut associer un point T dans le repère grâce à la commande `T=(t,R)`. Cliquer-droit sur le point T et sélectionner l'option *trace activée*. L'ensemble des positions des points T constitue la *représentation graphique* de la fonction *aire*.
Déterminer alors graphiquement la valeur de t (ou x) pour laquelle l'aire est la plus grande.

g. Pour terminer, vérifier que l'expression trouvée à la question 1b nous donne bien la même représentation graphique en écrivant la commande `S(x)=...` en remplaçant les `...` par l'expression trouvée alors.

3. **Démonstration**
On a $S(x) = -\frac{4}{3}x^2 + 4x$ et la valeur maximale de $S(x)$ semble être 3, atteinte pour $x = 1{,}5$.
a. Exprimer $S(x) - 3$ en fonction de x et l'écrire sous la forme $S(x) - 3 = -\frac{4}{3} \times f(x)$.
b. Factoriser $f(x)$ à l'aide d'une identité remarquable.
c. En déduire l'expression factorisée de $S(x) - 3$.
d. Quelle est la plus grande valeur de $S(x) - 3$? Justifier. Pour quelle valeur de x est-elle atteinte ? En déduire la plus grande valeur de $S(x)$.

2.2 La barre glissante

Sur le même principe, résoudre à l'aide de GeoGebra le problème suivant :
ABC est un triangle rectangle isocèle en A avec $AB = AC = 4$cm. M est un point du segment $[AB]$ et N est le point du segment $[AC]$ tel que $MN = 4$cm.
Déterminer la position de M pour que l'aire du triangle AMN soit maximale.
On pourra utiliser la commande `Cercle[M,4]` qui créé le cercle de centre M et de rayon 4.

[2]On peut changer de couleur en cliquant droit dessus et en choisissant *propriétés*. On peut aussi masquer les droites d et e en cliquant-droit dessus et en déselectionnant l'option *afficher l'objet*.
[3]On n'a pas le droit d'utiliser x qui est une lettre « réservée ».