Pour certains des exercices qui suivent il peut être intéressant d'effectuer des calculs en s'aidant d'un tableur pour tester les résultats sur un grand nombre de valeurs possibles de $n$. (Comme par exemple dans l'exercice 6)

**Exercice 1.**

1. Proposer des entiers naturels non nuls $a$, $b$ et $c$ tels que $a$ divise $bc$ mais $a$ ne divise ni $b$ ni $c$.
2. Montrer que la somme de cinq entiers consécutifs est divisible par 5.
3. Est-ce que la somme de quatre entiers consécutifs est divisible par 4 ?

**Exercice 2.**
Soit $n$ un entier naturel non nul. L'objectif de cet exercice est de montrer que si l'entier $a$ divise $n+2$ et $3n-1$, alors $a$ divise 7.

1. Énoncer la propriété permettant de justifier que $a$ divise $3\times(n+1)+(-1)\times(3n-1)$.
2. Développer et réduire $3\times(n+1)+(-1)\times(3n-1)$.
3. Conclure.

**Exercice 3.**

1. Utiliser une méthode analogue à celle de l'exercice 2 pour montrer que pour tout entier naturel $n$, si l'entier $a$ divise $2n+5$ et $3n+1$ alors $a$ divise 13.
2. Soit $n$ un entier naturel tel que $n>3$. Utiliser une méthode analogue à celle de l'exercice 2 pour déterminer les entiers $a$ tels que $a$ divise $n-3$ et $a$ divise $2n+1$.

**Exercice 4.**
L'objectif de cet exercice est de déterminer pour quelle(s) valeur(s) de l'entier naturel $n$, le nombre $14n+8$ est-il divisible par $3n+5$.

1. Expliquer pourquoi $3n+5$ divise $14n+8$ et $3n+5$.
2. En déduire que $3n+5$ divise $14\times(3n+5)+(-3)\times(14n+8)$.
3. Développer et réduire $14\times(3n+5)+(-3)\times(14n+8)$.
4. Écrire la liste des diviseurs de 46. Expliquer pourquoi $3n+5$ est forcément un de ces nombres.
5. Résoudre dans $\mathbf{N}$ les équations $3n+5=d_i$ où les « $d_i$ » sont les diviseurs de 46.
6. Conclure.

**Exercice 5.**
Utiliser une méthode analogue à celle de l'exercice 4 pour répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer les entiers $n$ tels que $n-1$ divise $n+17$.
2. Déterminer les entiers $n$ tels que $n-4$ divise $3n+24$.
3. Déterminer les entiers $n$ tels que $5n+7$ divise $2n+16$.

**Exercice 6.**
Soit $n$ un entier naturel non nul. Quel est le reste de la division euclidienne de $(n+2)^2$ par $n+4$ ? Même question pour la division euclidienne de $7n+16$ par $2n+3$.
Pour la première question, on peut créer une feuille de calcul en indiquant dans la colonne A l'entier $n$, dans la colonne B l'entier $(n+2)^2$, dans la colonne C l'entier $n+4$ et enfin dans la colonne D le reste de la division euclidienne[1] de $(n+2)^2$ par $n+4$.

[1] Dans le tableur on obtient le reste de la division euclidienne de la cellule B2 par la cellule C2 grâce à la commande MOD(B2 ;C2)



**Exercice 7.**

1. Développer $(n+3)(3n^2-9n+16)$ où $n\in\mathbf{N}$.
2. En déduire que pour tout $n$, $3n^3-11n+48$ est divisible par $n+3$.

**Exercice 8.**
Soit $n$ un entier naturel. On pose $A=n(n^2+5)$.

1. On remarque que $n$ peut s'écrire sous une des trois formes $n=3k$, $n=3k+1$ ou $n=3k+2$ avec $k\in\mathbf{N}$.
   a. Montrer que si $n=3k$ alors $A$ est divisible par 3.
   b. Que peut-on conclure si $n=3k+1$ ? Si $n=3k+2$ ?
2. En déduire que pour tout $n\in\mathbf{N}$ l'entier $A$ est divisible par $A$.

**Exercice 9.**
Soit $n$ un entier naturel. On appelle *diviseur strict* de $n$ un diviseur de $n$ strictement inférieur à $n$.

1. Deux nombres sont dits *amiables* si la somme des diviseurs stricts de chacun d'eux est égal à l'autre. Montrer que 220 et 284 sont des nombres amiables. Qu'en est-il de 60 et 100 ?
2. Un nombre est dit *parfait* si la somme de ses diviseurs stricts est égale à lui-même. Trouver le seul nombre parfait compris entre 1 et 10. Même question entre 25 et 30.

**Exercice 10.**

1. Existe-t-il un entier naturel $x$ tel que $65+x^2$ soit le carré d'un entier $n$ ?
2. Résoudre l'équation suivante : $x^2=4y^2+3$ avec $x$ et $y$ entiers naturels.

**Exercice 11.**
Déterminer le pgcd des couples suivants : $(1\ 414;666)$, $(44\ 350;20\ 785)$, $(202;102)$, $(66\ 105;52\ 884)$, $(n;3n)$, $(n;n^2)$ où $n\in\mathbf{N}^*$.

**Exercice 12.**
Peut-on trouver des entiers $a$ et $b$ tels que $a+b=500$ et pgcd($a$,$b$)=7 ?

**Exercice 13.**
Soit $n$ un entier naturel non nul.

1. Montrer que pgcd($n$, $2n+5$)=pgcd($n$, 5).
2. Déterminer pgcd($n$, $2n+5$) lorsque $n=5k$.
3. Application : déterminer pgcd(153, 311).

**Exercice 14.**
Soit $n$ un entier naturel. On pose $a=3n+11$ et $b=n+6$.

1. Calculer $3b-a$. En déduire que pgcd($a$, $b$) est un diviseur de 7.
2. Montrer que pgcd($a$,$b$)=7 si et seulement si 7 divise $b$.
3. En déduire les $n$ pour lesquels pgcd($a$,$b$)=7.

**Exercice 15.**
Déterminer les diviseurs communs à 1 386 et 1 170. Même question pour 6 292 et 5 852 puis pour 1 326 et 1 482.