1 Vocabulaire

Soit f une fonction numérique définie sur un ensemble $\mathscr{D}$. Pour chaque valeur x de $\mathscr{D}$, la fonction f permet de calculer un autre nombre qu'on note $f(x)$.
Pour chaque x, le nombre $f(x)$ est unique : c'est *l'image* de x par la fonction f.
Si y est un nombre tel qu'il existe $x \in \mathscr{D}$ vérifiant $f(x) = y$ on dit que x est un *antécédent* de y par la fonction f. Un nombre y peut avoir plusieurs antécédents.

Exercice 1.
Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^2 - x - 1$.

1. Calculer les images de -3, de 5, de -2 et de 10.
2. Déterminer tous les antécédents de -1.

Exercice 2.
Reprendre les questions de l'exercice précédent pour la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 7}$.

2 Représentation graphique

Soit f une fonction. Pour chaque valeur x de l'ensemble de définition, on peut calculer $f(x)$. Si on appelle y le nombre $f(x)$, on obtient alors un couple $(x; y)$ qui peut être les coordonnées d'un point M dans un repère. L'ensemble des points M qui ont des coordonnées du type $(x; y)$ où $x \in \mathscr{D}_f$ et $y = f(x)$ est appelé *courbe représentative* de la fonction f dans le repère.

Exercice 3.
Pour chacune des figures ci-dessous, indiquer si la courbe tracée peut être la courbe représentative d'une fonction. Si c'est le cas, donner l'ensemble de définition de la fonction et les images des bornes de l'ensemble de définition.

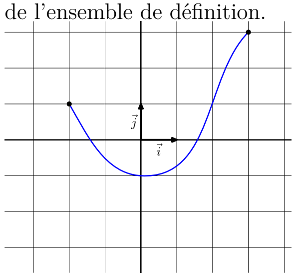


Figure 1

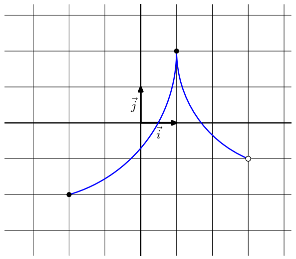


Figure 2

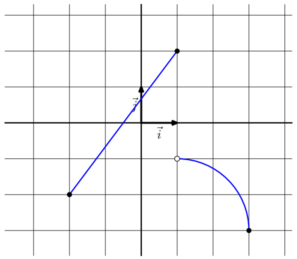


Figure 3

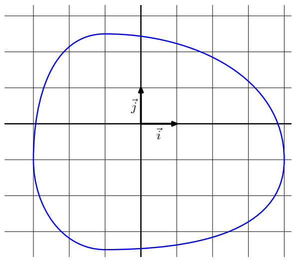


Figure 4

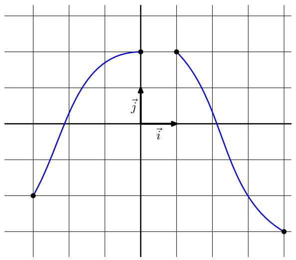


Figure 5

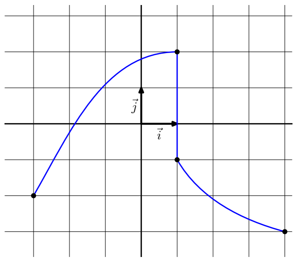


Figure 6

1re L option GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS Exercices 1

1 Vocabulaire

Soit f une fonction numérique définie sur un ensemble $\mathscr{D}$. Pour chaque valeur x de $\mathscr{D}$, la fonction f permet de calculer un autre nombre qu'on note $f(x)$.
Pour chaque x, le nombre $f(x)$ est unique : c'est *l'image* de x par la fonction f.
Si y est un nombre tel qu'il existe $x \in \mathscr{D}$ vérifiant $f(x) = y$ on dit que x est un *antécédent* de y par la fonction f. Un nombre y peut avoir plusieurs antécédents.

Exercice 1.
Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^2 - x - 1$.

1. Calculer les images de -3, de 5, de -2 et de 10.
2. Déterminer tous les antécédents de -1.

Exercice 2.
Reprendre les questions de l'exercice précédent pour la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 7}$.

2 Représentation graphique

Soit f une fonction. Pour chaque valeur x de l'ensemble de définition, on peut calculer $f(x)$. Si on appelle y le nombre $f(x)$, on obtient alors un couple $(x; y)$ qui peut être les coordonnées d'un point M dans un repère. L'ensemble des points M qui ont des coordonnées du type $(x; y)$ où $x \in \mathscr{D}_f$ et $y = f(x)$ est appelé *courbe représentative* de la fonction f dans le repère.

Exercice 3.
Pour chacune des figures ci-dessous, indiquer si la courbe tracée peut être la courbe représentative d'une fonction. Si c'est le cas, donner l'ensemble de définition de la fonction et les images des bornes de l'ensemble de définition.

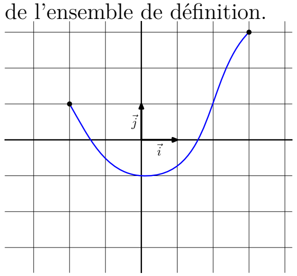


Figure 1

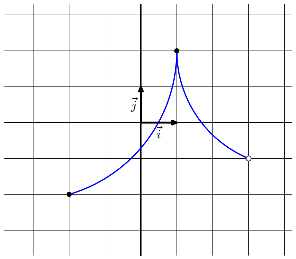


Figure 2

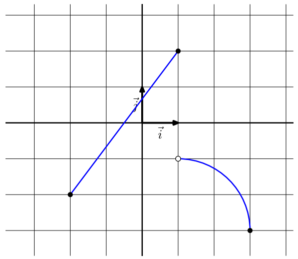


Figure 3

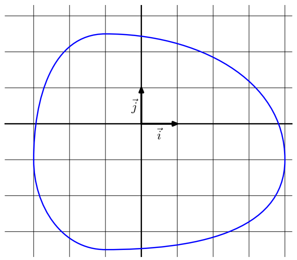


Figure 4

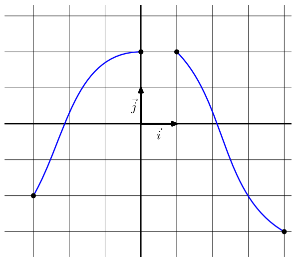


Figure 5

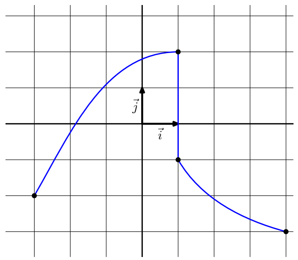
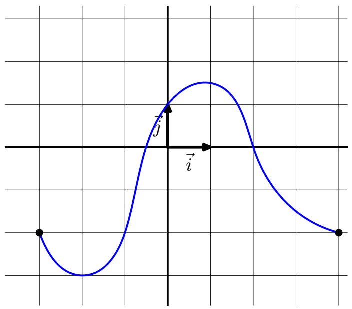


Figure 6

Exercice 4.

Sur le graphique ci-contre, on a tracé la représentation graphique d'une fonction f. Répondre aux questions ci-dessous en utilisant le graphique.



1. Déterminer $\mathscr{D}_f$.
2. Déterminer l'image de 1 et de -2.
3. Résoudre $f(x) = -2$.
4. Déterminer $f(0)$.
5. Déterminer la valeur minimale de $f(x)$. Pour quelle valeur de x ce minimum est-il atteint ?
6. Résoudre graphiquement $f(x) < -2$.
7. Résoudre graphiquement $f(x) \leq -2$.

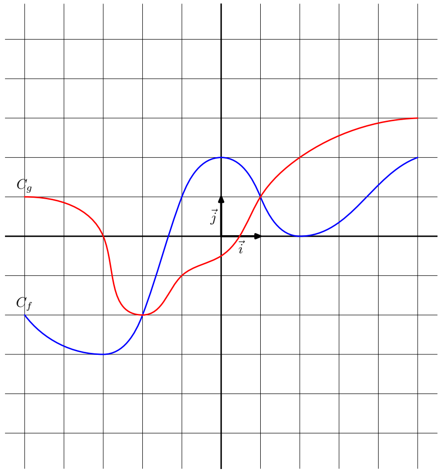
Exercice 5.

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-5; 5]$ dont les représentations graphiques sont données ci-dessous. On note h la fonction définie sur $[-5; 5]$ par $h(x) = f(x) + g(x)$.

1. Dresser les tableaux de variations de f et de g.
2. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-5	-3	-1	0	2	5
$f(x)$						
$g(x)$						
$h(x)$						

3. Tracer sur le graphique ci-contre l'allure de la courbe représentant la fonction h.
4. Résoudre graphiquement :
   a. l'équation $g(x) = f(x)$.
   b. l'inéquation $g(x) \geq f(x)$.
5. Comparer les solutions de l'équation $h(x) = f(x)$ avec celles de l'équation $g(x) = 0$.
6. On note t la fonction définie sur $[-5; 5]$ par $t(x) = g(x) - 3$. Tracer l'allure de $\mathscr{C}_t$.



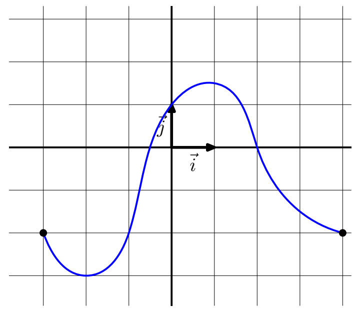
3 Variations d'une fonction

On dit d'une fonction f qu'elle est *strictement croissante* sur un intervalle I lorsque :
pour tout $a \in I$ et tout $b \in I$, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$; Les antécédents et leurs images sont rangés dans le *même* ordre. Graphiquement cela se traduit par une courbe qui « monte » lorsqu'on se déplace de la gauche vers la droite.
On dit d'une fonction f qu'elle est *strictement décroissante* sur un intervalle I lorsque :
pour tout $a \in I$ et tout $b \in I$, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$; les antécédents et leurs images sont rangés dans l'ordre *contraire*. Graphiquement cela se traduit par une courbe qui « descend » lorsqu'on se déplace de la gauche vers la droite.

1re L option Généralités sur les fonctions Exercices 2

Exercice 4.

Sur le graphique ci-contre, on a tracé la représentation graphique d'une fonction f. Répondre aux questions ci-dessous en utilisant le graphique.



1. Déterminer $\mathscr{D}_f$.
2. Déterminer l'image de 1 et de -2.
3. Résoudre $f(x) = -2$.
4. Déterminer $f(0)$.
5. Déterminer la valeur minimale de $f(x)$. Pour quelle valeur de x ce minimum est-il atteint ?
6. Résoudre graphiquement $f(x) < -2$.
7. Résoudre graphiquement $f(x) \leq -2$.

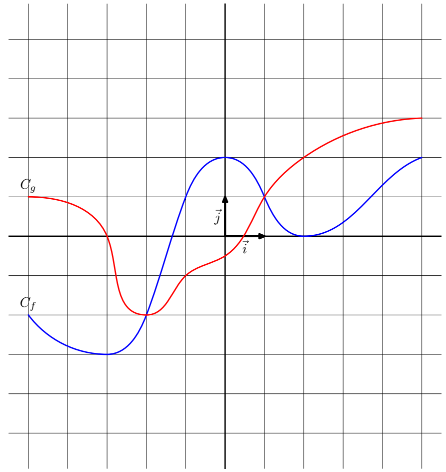
Exercice 5.

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-5; 5]$ dont les représentations graphiques sont données ci-dessous. On note h la fonction définie sur $[-5; 5]$ par $h(x) = f(x) + g(x)$.

1. Dresser les tableaux de variations de f et de g.
2. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-5	-3	-1	0	2	5
$f(x)$						
$g(x)$						
$h(x)$						

3. Tracer sur le graphique ci-contre l'allure de la courbe représentant la fonction h.
4. Résoudre graphiquement :
   a. l'équation $g(x) = f(x)$.
   b. l'inéquation $g(x) \geq f(x)$.
5. Comparer les solutions de l'équation $h(x) = f(x)$ avec celles de l'équation $g(x) = 0$.
6. On note t la fonction définie sur $[-5; 5]$ par $t(x) = g(x) - 3$. Tracer l'allure de $\mathscr{C}_t$.



3 Variations d'une fonction

On dit d'une fonction f qu'elle est *strictement croissante* sur un intervalle I lorsque :
pour tout $a \in I$ et tout $b \in I$, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$; Les antécédents et leurs images sont rangés dans le *même* ordre. Graphiquement cela se traduit par une courbe qui « monte » lorsqu'on se déplace de la gauche vers la droite.
On dit d'une fonction f qu'elle est *strictement décroissante* sur un intervalle I lorsque :
pour tout $a \in I$ et tout $b \in I$, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$; les antécédents et leurs images sont rangés dans l'ordre *contraire*. Graphiquement cela se traduit par une courbe qui « descend » lorsqu'on se déplace de la gauche vers la droite.

Exercice 6.
Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$. On sait que f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;3]$ et qu'elle est strictement croissante sur $[3\,;+\infty[$. De plus $f(3)=2$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x)>0$. Justifier soigneusement.

Exercice 7.
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x)=x^2+4x+5$.

1. Calculer les images de tous les entiers compris entre -5 et 2.
2. Placer les points correspondants à chaque couple $(x\,;f(x))$ dans un repère. (unités : 1 cm en abscisse et 0,5 cm en ordonnée), puis tracer l'allure de la courbe représentative de $\mathscr{C}_f$.
3. Quel semble être le minimum atteint par la fonction f ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?
4. Exprimer $f(x)-1$ en fonction de x et factoriser l'expression obtenue. En déduire la confirmation du résultat conjecturé à la question précédente.
5. On se fixe $a \in]-\infty\,;-2]$ et $b \in]-\infty\,;-2]$ tels que $a<b$. En utilisant les variations de la fonction carré, montrer que $f(a)>f(b)$. En déduire les variations de f sur $]-\infty\,;-2]$.

Exercice 8 (On pourra s'inspirer de l'exercice précédent)**.**
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x)=x^2-6x-2$.

1. Montrer que -11 est le minimum de f sur $\mathbf{R}$.
2. Montrer que f est décroissante sur $]-\infty\,;3]$ et croissante sur $[3\,;+\infty[$.

Exercice 9.
On considère la fonction polynôme f définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x)=2x^2-4x-6$.

1. Déterminer les réels α et β tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x)=2(x-\alpha)^2-\beta$.
2. En déduire la valeur de x pour laquelle $f(x)$ est minimal.
3. Étudier les variations de f sur $]-\infty;1[$, puis sur $]1;+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de f.
4. En utilisant la question 1, résoudre l'équation $f(x)=0$.
5. Compléter un tableau de valeurs, puis tracer l'allure de la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2;4]$.

Exercice 10.
On considère la fonction g définie par $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de g.
2. Montrer que pour $x \in \mathscr{D}_g$, on a $g(x)=2+\dfrac{3}{x-1}$.
3. Étudier les variations de g sur $]-\infty;1[$, puis sur $]1;+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de g.
4. Compléter un tableau de valeurs et tracer la représentation graphique de g sur $[-3;5]$.

1re L option — Généralités sur les fonctions — Exercices 3

Exercice 6.
Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$. On sait que f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;3]$ et qu'elle est strictement croissante sur $[3\,;+\infty[$. De plus $f(3)=2$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x)>0$. Justifier soigneusement.

Exercice 7.
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x)=x^2+4x+5$.

1. Calculer les images de tous les entiers compris entre -5 et 2.
2. Placer les points correspondants à chaque couple $(x\,;f(x))$ dans un repère. (unités : 1 cm en abscisse et 0,5 cm en ordonnée), puis tracer l'allure de la courbe représentative de $\mathscr{C}_f$.
3. Quel semble être le minimum atteint par la fonction f ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?
4. Exprimer $f(x)-1$ en fonction de x et factoriser l'expression obtenue. En déduire la confirmation du résultat conjecturé à la question précédente.
5. On se fixe $a \in]-\infty\,;-2]$ et $b \in]-\infty\,;-2]$ tels que $a<b$. En utilisant les variations de la fonction carré, montrer que $f(a)>f(b)$. En déduire les variations de f sur $]-\infty\,;-2]$.

Exercice 8 (On pourra s'inspirer de l'exercice précédent)**.**
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x)=x^2-6x-2$.

1. Montrer que -11 est le minimum de f sur $\mathbf{R}$.
2. Montrer que f est décroissante sur $]-\infty\,;3]$ et croissante sur $[3\,;+\infty[$.

Exercice 9.
On considère la fonction polynôme f définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x)=2x^2-4x-6$.

1. Déterminer les réels α et β tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x)=2(x-\alpha)^2-\beta$.
2. En déduire la valeur de x pour laquelle $f(x)$ est minimal.
3. Étudier les variations de f sur $]-\infty;1[$, puis sur $]1;+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de f.
4. En utilisant la question 1, résoudre l'équation $f(x)=0$.
5. Compléter un tableau de valeurs, puis tracer l'allure de la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2;4]$.

Exercice 10.
On considère la fonction g définie par $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de g.
2. Montrer que pour $x \in \mathscr{D}_g$, on a $g(x)=2+\dfrac{3}{x-1}$.
3. Étudier les variations de g sur $]-\infty;1[$, puis sur $]1;+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de g.
4. Compléter un tableau de valeurs et tracer la représentation graphique de g sur $[-3;5]$.

4 Parité

On dit d'une fonction qu'elle est *paire* si :
– Son ensemble de définition est symétrique par rapport à l'origine (i.e. si $x \in \mathscr{D}_f$ alors $-x \in \mathscr{D}_f$).
– Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(-x) = f(x)$.
On dit d'une fonction qu'elle est *impaire* si :
– Son ensemble de définition est symétrique par rapport à l'origine (i.e. si $x \in \mathscr{D}_f$ alors $-x \in \mathscr{D}_f$).
– Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$.
Étudier la parité d'une fonction signifie « déterminer si une fonction est paire, impaire ou ni l'un ni l'autre ».

Exercice 11.
Déterminer l'ensemble de définition puis étudier la parité des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto x^2; \quad g : x \mapsto 3x; \quad h : x \mapsto 2x^2+3; \quad m : x \mapsto 3x^2+2x; \quad n : x \mapsto 2x^3+x$$

$$p : x \mapsto 2\sqrt{x}; \quad q : x \mapsto \sqrt{x^2+3}; \quad r : x \mapsto \sqrt{x^2-1}; \quad s : x \mapsto \sqrt{3x-5}$$

Exercice 12.
Dans chacun des cas suivants, étudier la parité de la fonction f.

1. f est définie sur $[-3\,;\,5]$ par $f(x) = 3x^2 - 5$.
2. f est définie sur $]-\infty\,;\,-3] \cup [3\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{3}{x^3+x}$.
3. f est définie sur $[-4\,;\,4[$ par $f(x) = \frac{3x^2-1}{x^2+1}$.
4. f est définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4+3}$.

Exercice 13.
Soit f une fonction paire définie sur $[-5\,;\,5]$. On donne : $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 0$, $f(-3) = -1$, $f(-4) = 0$ et $f(-5) = 3$.

1. Dresser un tableau de valeurs de la fonction f pour tous les x entiers compris entre -5 et 5.
2. Placer les points correspondants dans un repère et tracer l'allure de la courbe représentant la fonction f.
3. Que constate-t-on ? Justifier.

Exercice 14.
Soit f une fonction impaire définie sur $[-5\,;\,5]$. On donne : $f(1) = 2$, $f(2) = 0$, $f(-3) = 1{,}5$, $f(-4) = 2$ et $f(-5) = 0$.

1. Combien vaut $f(0)$? Justifier.
2. Dresser un tableau de valeurs de la fonction f pour tous les x entiers compris entre -5 et 5.
3. Placer les points correspondants dans un repère et tracer l'allure de la courbe représentant la fonction f.
4. Que constate-t-on ? Justifier.

1re L option — Généralités sur les fonctions — Exercices 4

4 Parité

On dit d'une fonction qu'elle est *paire* si :
– Son ensemble de définition est symétrique par rapport à l'origine (i.e. si $x \in \mathscr{D}_f$ alors $-x \in \mathscr{D}_f$).
– Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(-x) = f(x)$.
On dit d'une fonction qu'elle est *impaire* si :
– Son ensemble de définition est symétrique par rapport à l'origine (i.e. si $x \in \mathscr{D}_f$ alors $-x \in \mathscr{D}_f$).
– Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$.
Étudier la parité d'une fonction signifie « déterminer si une fonction est paire, impaire ou ni l'un ni l'autre ».

Exercice 11.
Déterminer l'ensemble de définition puis étudier la parité des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto x^2; \quad g : x \mapsto 3x; \quad h : x \mapsto 2x^2+3; \quad m : x \mapsto 3x^2+2x; \quad n : x \mapsto 2x^3+x$$

$$p : x \mapsto 2\sqrt{x}; \quad q : x \mapsto \sqrt{x^2+3}; \quad r : x \mapsto \sqrt{x^2-1}; \quad s : x \mapsto \sqrt{3x-5}$$

Exercice 12.
Dans chacun des cas suivants, étudier la parité de la fonction f.

1. f est définie sur $[-3\,;\,5]$ par $f(x) = 3x^2 - 5$.
2. f est définie sur $]-\infty\,;\,-3] \cup [3\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{3}{x^3+x}$.
3. f est définie sur $[-4\,;\,4[$ par $f(x) = \frac{3x^2-1}{x^2+1}$.
4. f est définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4+3}$.

Exercice 13.
Soit f une fonction paire définie sur $[-5\,;\,5]$. On donne : $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 0$, $f(-3) = -1$, $f(-4) = 0$ et $f(-5) = 3$.

1. Dresser un tableau de valeurs de la fonction f pour tous les x entiers compris entre -5 et 5.
2. Placer les points correspondants dans un repère et tracer l'allure de la courbe représentant la fonction f.
3. Que constate-t-on ? Justifier.

Exercice 14.
Soit f une fonction impaire définie sur $[-5\,;\,5]$. On donne : $f(1) = 2$, $f(2) = 0$, $f(-3) = 1{,}5$, $f(-4) = 2$ et $f(-5) = 0$.

1. Combien vaut $f(0)$? Justifier.
2. Dresser un tableau de valeurs de la fonction f pour tous les x entiers compris entre -5 et 5.
3. Placer les points correspondants dans un repère et tracer l'allure de la courbe représentant la fonction f.
4. Que constate-t-on ? Justifier.