Chapitre 4

Probabilités

4.1 Introduction. Premières définitions

Le but des probabilités est d'essayer de rationaliser le hasard : quelles sont les chances d'obtenir un résultat suite à une expérience aléatoire ?
Quelles chances ai-je d'obtenir « pile » en lançant une pièce de monnaie ? Quelles chances ai-je d'obtenir « 6 » en lançant un dé ? Quelles chances ai-je de valider la grille gagnante du loto ?
Vocabulaire
L'objet d'une étude d'un phénomène aléatoire est appelé *expérience aléatoire*. Au cours d'une expérience aléatoire, les résultats possibles sont appelés les *éventualités* (notées généralement e_i). L'ensemble des n éventualités est appelé *l'univers* de l'expérience aléatoire. On le note généralement Ω (omega majuscule dans l'alphabet grec). Un *événement* est un ensemble constitué d'éventualités. Un évenement ne comportant qu'une seule éventualité est appelé *événement élémentaire*.

Exemple 4.1
On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6.
– les éventualités sont $e_1 = 1$, $e_2 = 2$, $e_3 = 3$, $e_4 = 4$, $e_5 = 5$, $e_6 = 6$;
– l'univers est donc $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$;
– on note A l'événement « obtenir un chiffre pair ». Alors $A = \{2; 4; 6\}$;
– on note B l'événement « obtenir un six ». Alors $B = \{6\}$: c'est un événement élémentaire.

4.2 Distribution de fréquences. Loi de probabilité

4.2.1 Distribution de fréquences

Lorsqu'on répète un grand nombre de fois la même expérience aléatoire en notant les résultats obtenus, on peut compter le nombre de fois où chaque événement élémentaire se produit, et ensuite calculer sa fréquence d'apparition. On obtient alors pour chaque éventualité e_i une fréquence $f_i = \frac{n_i}{N}$, où n_i est le nombre d'apparitions de e_i et N le nombre total d'expériences. On dit alors que la *distribution de fréquences* associée à ces N expériences aléatoires est la suite $(f_1; \dots; f_p)$.

Propriété 4.1
$(f_1; \dots; f_p)$ est une distribution de fréquences associée à N expériences aléatoires identiques.
– on a : $f_1 + \dots + f_p = 1$;

– si A est un événement, alors la fréquence de A, $f(A)$ est la somme des fréquences de toutes les éventualités constituant A.

Exemple 4.2
On lance cent fois de suite une fléchette sur une cible ayant cinq zones : noire, rouge, jaune, bleue et verte. Les résultats obtenus sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

zone touchée	noire	rouge	jaune	bleue	verte
nombre de touches	5	15	20	35	25
fréquence	0,05	0,15	0,20	0,35	0,25

La distribution de fréquences associée à ces cent lancers de fléchettes est donc :

$$(0{,}05; 0{,}15; 0{,}20; 0{,}35; 0{,}25)$$

4.2.2 Loi de probabilité

Exemple 4.3
Dans une urne on a placé huit boules numérotées de 1 à 8. On en tire une au hasard. Si les boules sont indiscernables au toucher, on a autant de chances d'en tirer une plutôt qu'une autre. On dit que la probabilité d'obtenir chaque boule est égale à $\frac{1}{8}$. On écrit :

$$p(1) = p(2) = \cdots = p(8) = \frac{1}{8}$$

On dit qu'on a défini une loi de probabilité sur l'ensemble $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

Plus généralement, on a la définition suivante :

Définition 4.1
Soit Ω un univers lié à une expérience aléatoire ayant n éventualités e_1, e_2,. . ., e_n.
Si à chaque événement élémentaire $\{e_i\}$ on associe un nombre $p_i \in [0; 1]$ tel que :

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

Alors on définit une loi de probabilité sur l'univers Ω. Chaque p_i est appelé *probabilité* de l'événement $\{e_i\}$. La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des éventualités composant A.

Conséquences :
– Ω est l'événement *certain* : $p(\Omega) = 1$;
– $\emptyset$ est l'événement *impossible* : $p(\emptyset) = 0$.

Exemple 4.4
En reprenant l'énoncé de l'exemple 4.3, on note A l'événement « obtenir un chiffre strictement supérieur à 5. On a alors $A = \{6; 7; 8\}$, et donc $p(A) = \frac{3}{8}$.

4.2.3 Loi des grands nombres

Pour une expérience aléatoire donnée ayant une loi de probabilité P, la distribution de fréquences obtenue sur un nombre d'expériences est proche de la loi de probabilité lorsque le nombre d'expériences est « très grand ».

4.2.4 Équiprobabilité

Les n événements élémentaires d'un univers Ω lié à une expérience aléatoire sont dits *équiprobables* si la probabilité de chacun d'eux est $\frac{1}{n}$.
Dans ce cas la probabilité d'un événement A est :

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

Remarque 4.1
Dans un exercice, pour signifier qu'on est dans une situation d'équiprobabilité on a généralement dans l'énoncé une expression du type :
– on lance un dé *non pipé*... ;
– on tire dans un jeu de cartes *non truqué*... ;
– dans une urne, il y a des boules *indiscernables au toucher*... ;
– on rencontre *au hasard* une personne parmi... ;
– ...

4.3 Quelques exemples de référence

Exemple 4.5 (le dé équilibré)
On lance un dé équilibré à six faces. On considère l'événement A : « obtenir un chiffre pair » et l'événement B : « obtenir un diviseur de six ». Calculer la probabilité de chacun de ces deux événements.
Le dé est équilibré donc on est dans une situation d'équiprobabilité. On a donc pour $1 \leq i \leq 6$, $p(i) = \frac{1}{6}$.
On a : $A = \{2; 4; 6\}$ et $B = \{1; 2; 3; 6\}$. Donc $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, et $p(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Exemple 4.6 (les boules de couleurs)
Dans une urne on place dix boules de couleurs numérotées. Les boules sont indiscernables au toucher et sont réparties comme suit :
– quatre boules rouges numérotées 1, 2, 3 et 4 ;
– trois boules blanches numérotées 1, 2 et 3 ;
– deux boules vertes numérotées 1 et 2 ;
– une boule jaune numérotée 1.
On tire au hasard une boule de l'urne. Calculer les probabilités des événements suivants :
– U : « obtenir une boule numérotée 1 » ;
– B : « obtenir une boule blanche » ;
– A : « obtenir un chiffre pair sur une boule rouge » ;
– I : « obtenir un chiffre impair ».
Les boules sont indiscernables au toucher et le tirage se fait au hasard, on est donc dans une situation d'équiprobabilité : chaque boule a une probabilité $p = \frac{1}{10}$ d'être tirée. En notant chaque éventualité par l'initiale de la couleur suivie du chiffre de la boule, on a :
– $U = \{R1; B1; V1; J1\}$, donc $p(U) = \frac{4}{10} = 0{,}4$;
– $B = \{B1; B2; B3\}$, donc $p(B) = \frac{3}{10} = 0{,}3$;
– $A = \{R2; R4\}$, donc $p(A) = \frac{2}{10} = 0{,}2$;
– $I = \{R1; R3; B1; B3; V1; J1\}$, donc $p(I) = \frac{6}{10} = 0{,}6$.

Exemple 4.7 (le jeu de cartes)
On choisit une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes non truqué. On appelle « figure » les rois, dames et valets. Calculer les probabilités des événements suivants :
– A : « obtenir une figure » ;
– B : « obtenir un pique » ;
– C : « obtenir un as ».
Le jeu de cartes n'est pas truqué et le choix se fait au hasard, on est donc dans une situation d'équiprobabilité : chaque carte a une probabilité $p = \frac{1}{52}$ d'être choisie :
– dans le jeu il y a $4 \times 3 = 12$ figures. Donc $p(A) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$;
– dans le jeu il y a 13 piques. Donc $p(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$;
– dans le jeu, il y a 4 as. Donc $p(C) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

Exemple 4.8 (non-équiprobabilité)
Un dé est pipé de sorte que les faces 1, 2, 3, 4 et 5 aient les probabilités suivantes d'apparaître :

$$p(1) = p(2) = p(3) = 0{,}1; p(4) = p(5) = 0{,}2;$$

1. Calculer $p(6)$.
2. Calculer $p(A)$ et $p(B)$ où A et B sont les événements définis dans l'exemple 4.5.

1. La somme de toutes les probabilités doit être égale à 1, donc :

$$p(6) = 1 - (p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5)) = 0,3$$

2. $p(A) = p(2) + p(4) + p(6) = 0{,}6$ et $p(B) = p(1) + p(2) + p(3) + p(6) = 0{,}6$.

Exemple 4.9 (rencontre)
Dans une classe, 20 % des élèves ont 16 ans, 35 % ont 17 ans, 30 % ont 18 ans et 15 % ont 19 ans. On rencontre au hasard un élève de cette classe. Calculer la probabilité qu'il ait « au moins 17 ans ». Même question pour « strictement plus de 17 ans ».
– On note A l'événement l'élève a au moins 17 ans. $p(A) = 35\% + 30\% + 15\% = 80\%$.
– On note B l'événement l'élève a strictement plus de 17 ans. $p(B) = 30\% + 15\% = 45\%$.

4.4 Intersection. Réunion

4.4.1 Événement. Événement contraire

Définition 4.2
Soit A un événement d'un univers Ω lié à une expérience aléatoire. On appelle *événement contraire* de A et on note $\overline{A}$ l'événement constitué de toutes les éventualités de Ω n'étant pas dans A.

Exemple 4.10
Dans le cas d'un jet de dé à six faces, les événements contraires des événements définis dans l'exemple 4.5 sont : $\overline{A}$: « obtenir un chiffre impair » et $\overline{B}$: « obtenir un 4 ou un 5 ».

Propriété 4.2
Soit A un événement d'un univers Ω de probabilité $p(A)$. Alors l'événement $\overline{A}$ a pour probabilité $1 - p(A)$.

4.4.2 Intersection. Réunion

Définition 4.3
Soit Ω un univers lié à une expérience aléatoire et P une loi de probabilité sur Ω. Soit A et B deux événements de Ω. Alors :
– l'événement constitué des éventualités appartenant à A *et* à B est noté $A \cap B$. (on lit « A inter B » ou « A et B ») ;
– l'événement constitué des éventualités appartenant à A *ou* à B ou aux deux est noté $A \cup B$. (on lit « A union B » ou « A ou B »).

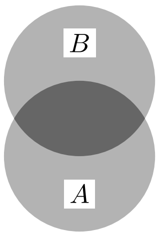
Exemple 4.11
On considère un jeu de 32 cartes. On note A l'événement « obtenir une figure », et B l'événement « obtenir un trèfle ».

1. Expliciter $A \cap B$ et $A \cup B$.
2. Calculer $p(A)$, $p(B)$, $p(A \cap B)$ et $p(A \cup B)$.
3. Calculer $p(A) + p(B)$ puis $p(A \cup B) + p(A \cap B)$.

1. $A \cap B$: « obtenir une figure trèfle »
   $A \cup B$: « obtenir une figure ou un trèfle ou une figure trèfle ».
2. $p(A) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$. $p(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$. $p(A \cap B) = \frac{3}{32}$. $p(A \cup B) = \frac{17}{32}$.
3. $p(A) + p(B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$. $p(A \cap B) + p(A \cup B) = \frac{3}{32} + \frac{17}{32} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$.

Propriété 4.3
Soit Ω un univers lié à une expérience aléatoire, et P une loi de probabilité sur Ω. Soit A et B deux événements de Ω. Alors on a :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$



Interprétation :
En comptant le nombre d'éventualités de A et en ajoutant le nombre d'éventualités de B, on compte deux fois les éventualités de $A \cap B$. D'où le « $-p(A \cap B)$ » dans la formule de la propriété 4.3

Exemple 4.12
Dans chacune des situations ci-dessous, A et B sont deux événements d'un univers Ω.

1. On donne $p(A) = 0{,}7$, $p(B) = 0{,}5$ et $p(A \cap B) = 0{,}3$. Calculer $p(A \cup B)$.
2. Peut-on avoir $p(A) = 0{,}7$, $p(B) = 0{,}65$ et $p(A \cap B) = 0{,}25$? Justifier.
3. On donne $p(A) = 0{,}5$, $p(A \cup B) = 0{,}7$ et $p(A \cap B) = 0{,}4$. Calculer $p(B)$.
4. On donne $p(A) = 0{,}65$, $p(B) = 0{,}32$ et $p(A \cup B) = 0{,}97$. Les événements A et B sont-ils incompatibles ?