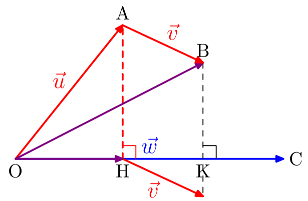
6.2.2 Propriétés algébriques

Propriété 6.3
Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan. Soit $k \in \mathbf{R}$. On a :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}; \quad (\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}; \quad (k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$$

Démonstration :
- les première et troisième égalités se démontrent aisément avec la propriété 6.2 car $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$;
- pour la deuxième : soit O un point du plan, on note A, B et C les points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$.



En utilisant la remarque 6.3, on a dans le cas de la figure ci-dessus :
$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = OK \times OC$ et :
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC} = OH \times OC + HK \times OC = (OH+HK) \times OC = OK \times OC$.
Donc : $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}$.

6.2.3 Dans un repère orthonormal

Propriété 6.4
Soit $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$. Alors :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$$

Démonstration :
On utilise la propriété 6.3.
On a $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\vec{u}\cdot\vec{v} &= (x\vec{i}+y\vec{j})\cdot(x'\vec{i}+y'\vec{j}) \\
&= (x\vec{i})\cdot(x'\vec{i}) + (x\vec{i})\cdot(y'\vec{j}) + (y\vec{j})\cdot(x'\vec{j}) + (y\vec{j})\cdot(y'\vec{j}) \\
&= xx'\vec{i}\cdot\vec{i} + (xy'+x'y)\vec{i}\cdot\vec{j} + yy'\vec{j}\cdot\vec{j} \\
&= xx' + yy'
\end{aligned}$$

En effet, en appliquant la propriété 6.2, le repère étant orthonormal, on a :

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = ||\vec{i}||^2\cos(0) = 1 \text{ et } \vec{i}\cdot\vec{j} = ||\vec{i}|| \times ||\vec{j}|| \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Chapitre 6

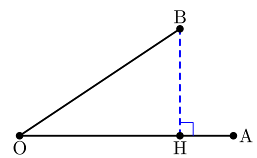
Produit scalaire

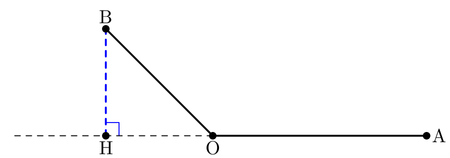
Le produit scalaire[1] (vient du latin *scolaris : escalier, échelle*) est une opération s'appliquant à deux vecteurs. Il a été inventé par deux physiciens Grassmann et Gibbs et a été baptisé ainsi par le mathématicien irlandais Hamilton (1805-1865).
En mathématiques, il permet d'utiliser les notions euclidiennes de distances, angles, orthogonalité dans des espaces de dimension quelconque. Il est aussi utilisé dans des notions beaucoup plus complexes qu'on ne détaillera pas ici.
En physique, il caractérise la notion de travail d'une force sur un déplacement mais est aussi utile en hydrodynamique, électromagnétisme, ...
Les vecteurs pouvant être vus sous plusieurs « aspects » (géométrique et algébrique), on retrouve plusieurs définitions équivalentes du produit scalaire. Nous allons les étudier dans ce chapitre et nous reviendrons sur ses applications dans le chapitre 8.

6.1 Produit scalaire de deux vecteurs

6.1.1 Projection orthogonale

Définition 6.1
Soit O, A et B trois points non-alignés du plan. Le projeté orthogonal de B sur la droite (OA) est le pied de la hauteur issue de B dans le triangle OAB. Sur les figures ci-dessous, H est le projeté orthogonal de B sur (OA) :



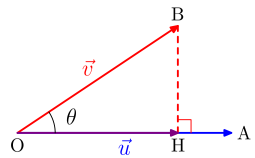


6.1.2 Produit scalaire

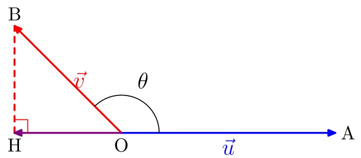
Définition 6.2
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Soit O un point du plan.
On note A et B les points du plan tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.
On appelle *produit scalaire* de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ tel que :

[1] Un scalaire est un « numérique » donc un nombre réel pour nous. C'est aussi un poisson, mais là, ça n'a plus rien à voir avec les maths ; pour plus de détails, parlez-en à votre prof de SVT préféré...

- si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;
- si $\vec{u} \neq 0$ et $\vec{v} \neq 0$ alors, en notant H le projeté orthogonal de B sur (OA),
  - si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de même sens, $\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OH$;
  - si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de sens contraire, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -OA \times OH$.



$\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OH$



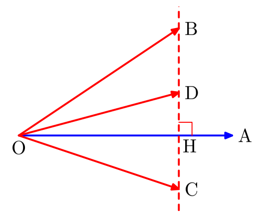
$\vec{u} \cdot \vec{v} = -OA \times OH$

Remarque 6.1
En notant θ l'angle (géométrique) formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on remarque que si θ est aigu, le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est positif et si θ est obtu, le produit scalaire est négatif.

Remarque 6.2
Le produit scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ par lui-même est noté $\vec{u}^2$. Il est égal à $||\vec{u}||^2$ et on l'appelle *carré scalaire* de $\vec{u}$.

Remarque 6.3
Sur la figure ci-contre, en appliquant la définition, on obtient facilement les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = OA \times OH$$



6.1.3 Vecteurs orthogonaux

Définition 6.3
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Soit O un point du plan et soit A et B les points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits *orthogonaux* si l'une des deux situations suivantes est réalisée :
- $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$;
- les droites (OA) et (OB) sont perpendiculaires.

Propriété 6.1
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Démonstration :
- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux, on a deux cas :
  - si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors le produit scalaire est évidemment nul ;
  - si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non-nuls, avec les notations de la définition 6.2, on a $(OA) \perp (OB)$, le projeté orthogonal de B sur (OA) est O donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OO = 0$.

- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Par définition, on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \pm OA \times OH$. On a deux cas possibles :
  - soit $OA = 0$ c'est-à-dire que $\vec{u} = \vec{0}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ;
  - soit $OH = 0$ c'est-à-dire que $\vec{v} = \vec{0}$ ou B appartient à la perpendiculaire à (OA) passant par O donc dans les deux cas, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

6.2 Autres expressions du produit scalaire

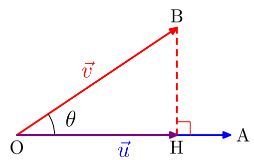
6.2.1 Géométriquement

Propriété 6.2
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. On note θ l'angle (géométrique) formé par ces vecteurs. Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\theta)$$

Démonstration :
Soit O un point du plan. On note A et B les points du plan tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$. Soit H le projeté orthogonal de B sur (OA). On note θ l'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\theta = \widehat{AOB}$.

Premier cas : $\theta \in [0\,;\,\frac{\pi}{2}]$.

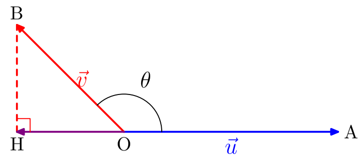


$\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OH$

Dans le triangle OBH rectangle en H on a $OH = OB\cos(\theta)$. Donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OB\cos(\theta) = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||\cos(\theta)$$

Deuxième cas : $\theta \in [\frac{\pi}{2}\,;\,\pi]$.



$\vec{u} \cdot \vec{v} = -OA \times OH$

Dans le triangle OBH rectangle en H on a $OH = OB\cos(\pi - \theta) = -OB\cos(\theta)$. Donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -OA \times (-OB\cos(\theta)) = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||\cos(\theta)$$