Chapitre 5

Dérivation

La notion de nombre dérivé, puis de fonction dérivée est née au XVII^e siècle (presque) simultanément chez deux scientifiques Leibniz (1646-1716) et Newton (1642-1727) à partir de deux problèmes très différents.
On a vu dans le chapitre 1 que Leibniz avait le premier parlé de fonction numérique. Il s'est aussi intéressé aux courbes représentatives de ces fonctions et en particulier aux droites joignant deux points d'une telle courbe. Les points $A(a; f(a))$ et $M(a+h; f(a+h))$ sont sur la courbe représentative d'une fonction f. Le coefficient directeur de la droite (AM) est $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
Qu'advient-il de ce coefficient directeur lorsque les deux points A et M sont très proches l'un de l'autre, « infiniment proches » ?
Newton s'est intéressé aux mouvements et en particulier aux vitesses d'objets en déplacement : à un instant t, un objet a parcouru une distance d_1, à l'instant $t+h$ $(h > 0)$, il a parcouru la distance d_2. Sa vitesse moyenne entre les instants t et $t+h$ est donc $V_m = \frac{d_2-d_1}{h}$. Que devient cette vitesse lorsque les instants t et $t+h$ sont très proches, « infiniment » proches ?
Dans les deux cas, on est amené à travailler sur des nombres « infiniment proches » et donc à devoir calculer des quotients de nombres « infiniment proches de 0 ». Pour cela, nous allons définir[1] la notion de *limite* qui a posé de nombreux soucis aux mathématiciens d'avant Newton et Leibniz (Voir par exemple les paradoxes de Zénon d'Alexandrie).

5.1 Taux de variation

Dans cette partie, f est une fonction numérique définie sur un intervalle I, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère. a et x sont deux réels distincts dans l'intervalle I privé de ses bornes. On note h le réel non nul tel que $x = a + h$.

5.1.1 Taux de variation

Définition 5.1
Le *taux de variation* de la fonction f entre a et x est le quotient :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Exemple 5.1
Pour f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2$, le taux de variation de f entre a et $a+h$ est :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = 2a+h$$

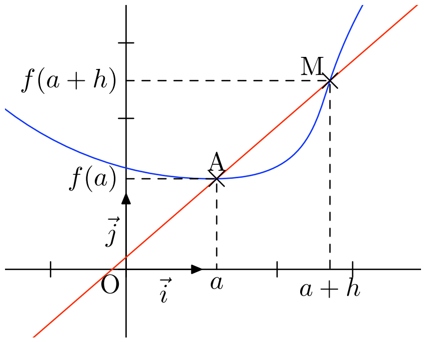
[1] Dans un premier temps de manière « intuitive » …

Exemple 5.2
Pour f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 4$, calculer le taux de variation de f entre a et $a+h$.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-2a-2h+4-(a^2-2a+4)}{h} = \frac{2ah+h^2-2h}{h} = 2a-2+h$$

5.1.2 Interprétation graphique

On note A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a, et M celui d'abscisse x.
Le taux de variation de la fonction f entre a et x, $\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$ est le coefficient directeur de la droite (AM).



5.2 Nombre dérivé

f est une fonction numérique définie sur un intervalle I, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère. a et x sont deux réels distincts dans l'intervalle I privé de ses bornes. On note h le réel non nul tel que $x = a + h$.

5.2.1 Nombre dérivé

Définition 5.2
Lorsque h se rapproche de plus en plus de 0 (soit quand x se rapproche de a), si le taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ devient de plus en plus proche d'un nombre réel l fixe, on dit que la limite lorsque h tend vers 0 de ce taux de variation vaut l. Dans ce cas on dit que f est *dérivable* en a et cette limite est appelée *nombre dérivé* de f en a. On note :

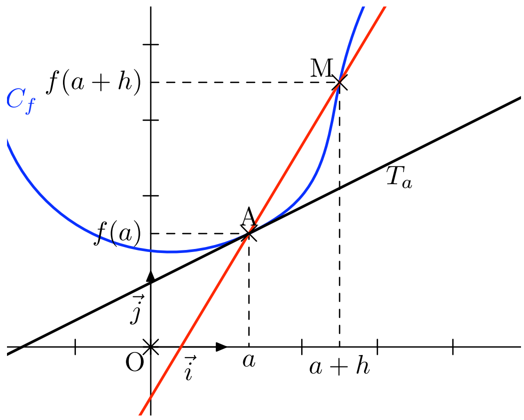
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l$$

5.2.2 Interprétation graphique

Lorsque h se rapproche de 0, le point M se rapproche de A, et la droite (AM) se rapproche d'une « position limite » appelée *tangente* à $\mathscr{C}$ au point A ; son coefficient directeur est alors $f'(a)$.

Propriété 5.1
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et dérivable en $a \in I$. La tangente T_a à la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour équation :

$$T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$$



5.2.3 Interprétation cinématique

On considère un objet en mouvement. On note t la durée en secondes de son parcours, et $y(t)$ la distance en mètres, parcourue après t secondes.
Le taux de variation de y entre deux instants t_1 et t_2 : $\frac{y(t_2)-y(t_1)}{t_2-t_1}$ est la vitesse moyenne de l'objet entre les instants t_1 et t_2.

Définition 5.3
Dans les conditions précédentes, la limite quand t_2 se rapproche de t_1 du taux de variation (c'est à dire le nombre dérivé de y en t_1) est appelée *vitesse instantanée* de l'objet à l'instant t_1.

$$V(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1} = \lim_{h \to 0} \frac{y(t_1 + h) - y(t_1)}{h}$$

Exemple 5.3
On lache un objet en chute libre. On note $x(t)$ la distance parcourue (en m) après t secondes. On admet que la distance parcourue s'exprime en fonction du temps de parcours par $x(t) = 4{,}9x^2$.
Calculer la vitesse instantanée de l'objet après une chute de t secondes.
On exprime le taux de variation de x entre les instants t et $t + h$:

$$v = \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \frac{4{,}9(t+h)^2 - 4{,}9t^2}{h}$$

En développant, réduisant et simplifiant, on obtient :

$$v = \frac{4{,}9(t^2 + 2th + h^2) - 4{,}9t^2}{h} = \frac{9,8th + 4{,}9h^2}{h} = 9,8t + 4{,}9h$$

Lorsque h tend vers 0, ce taux de variation se rapproche de $9{,}8t$: $\lim\limits_{h \to 0}(9{,}8t + 4{,}9t) = 9,8t$.
Donc la vitesse instantanée de l'objet en chute libre est donnée par l'expression $v(t) = x'(t) = 9{,}8t$.
Après 5 secondes de chute libre, la vitesse est de $9{,}8 \times 5 = 49$ m/s. (soit 179,4 km/h).

5.3 Fonction dérivée

5.3.1 Fonction dérivée

Soit f une fonction définie et dérivable en tout a d'un intervalle I. On a vu que pour $a \in I$, $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et on l'a appelée « nombre dérivé de f en a » et noté $f'(a)$.

Définition 5.4
Soit f une fonction dérivable en tout x d'un intervalle I, alors la fonction qui à x associe $f'(x)$ est appelée *fonction dérivée* de f sur I. On la note f'.

5.3.2 Approximation affine

On a vu que si f est une fonction dérivable en a alors au point $A(a; f(a))$, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente T_a. On pourrait montrer[2] que la tangente est la droite passant par A qui s'approche le plus de $\mathscr{C}_f$ « au voisinage » du point A.

[2]Rassurez-vous, l'emploi du conditionnel vous indique qu'on ne le fera pas ici. . . .

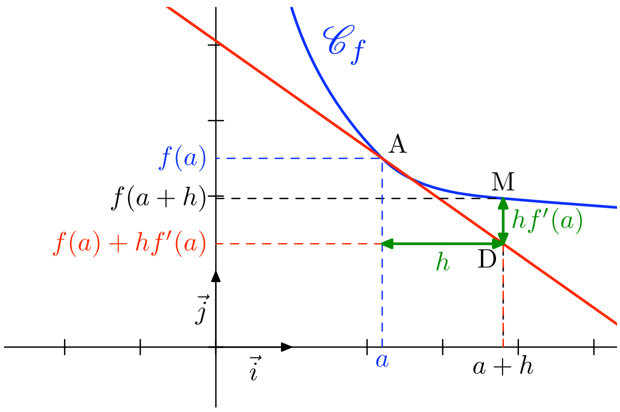
La tangente T_a est la droite d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. Elle est aussi la représentation graphique d'une fonction affine $x \mapsto f'(a)(x-a) + f(a)$. Cette fonction est appelée *meilleure approximation affine de f au voisinage de a.*
Depuis le début du chapitre (voir partie 5.1, page 39), on note h le réel tel que $x = a+h$; avec cette notation on peut écrire que la fonction $h \mapsto f'(a) \times h + f(a)$ est la meilleure approximation affine de la fonction $h \mapsto f(a+h)$ au voisinage de 0. Ceci s'écrit :

si f est dérivable en a alors $f(a+h) \approx f'(a) \times h + f(a)$ lorsque $h \approx 0$

Lorsqu'on calcule par une approximation on commet une erreur[3]. Il est intéressant de connaitre un ordre de grandeur[4] de l'erreur commise. Dans le cas qui nous intéresse, l'erreur commise en remplaçant $f(a+h)$ par $f'(a) \times h + f(a)$ est :

$$\begin{aligned} DM &= |f(a+h) - (f'(a) \times h + f(a))| \\ &= \left| h \times \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) \times h \right| \\ &= |h \times \epsilon(h)| \end{aligned}$$

où $\epsilon(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)$.
Or si h tend vers 0 alors $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers $f'(a)$ donc $\epsilon(h)$ tend vers 0.
Donc, lorsque h est proche de 0, $|\epsilon(h)|$ est aussi proche de 0 et donc l'ordre de grandeur de $|h| \times |\epsilon(h)|$ est inférieur à celui de $|h|$.



5.3.3 Méthode d'Euler[5]

Soit f une fonction numérique dont on ne connait que la dérivée f' et un point de la courbe représentative.
Pour tracer une courbe approchée de $\mathscr{C}_f$, nous allons effectuer plusieurs approximations affines successives.
Soit $A(a; f(a))$ le point connu de $\mathscr{C}_f$; la meilleure approximation affine de f au voisinage de a est $f(a+h) \approx f'(a) \times h + f(a)$ lorsque $h \approx 0$.
On se fixe une valeur de h « proche » de 0 :

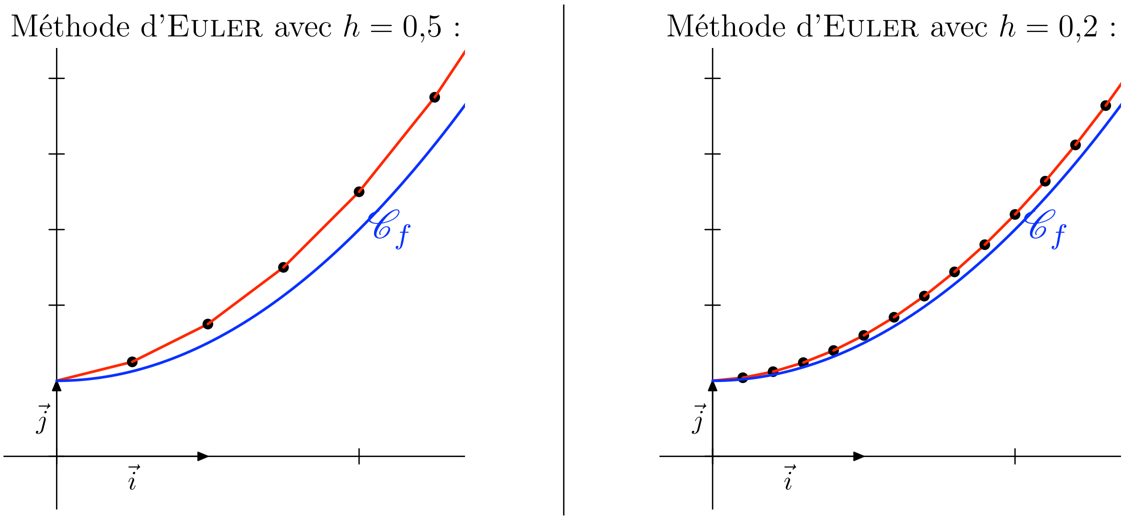
[3]Erreur qu'on commet volontairement, pour se simplifier les calculs, car on n'a pas toutes les informations nécessaires pour effectuer un calcul exact, ...

[4]Nous aurons l'occasion lors d'une séance de module ultérieure de préciser la notion d'ordre de grandeur.

[5]Leonhard Euler (1707-1783) : mathématicien suisse. Un des mathématiciens les plus productifs de tous les temps. Il a travaillé dans beaucoup de domaines (notre trigonométrie moderne provient essentiellement de son *Introductio* de 1748). Il est aussi l'inventeur de beaucoup de notations que nous utilisons encore aujourd'hui (π, Σ pour les sommes, r pour les rayons, A, B, ... pour les sommets d'un polygone, cos et sin, ...)

On a alors $y_1 = f'(a) \times h + f(a)$ qui est proche de $f(a+h)$; donc le point $M_1(a+h; y_1)$ est proche du point A_1 de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $a+h$.
En considérant que $f(a+h) \approx y_1$, on peut réitérer le procédé et donner la meilleur approximation de $f(a+h+h')$ au voisinage de 0 : $f(a+h+h') \approx f'(a+h+h') \times h' + y_1$ lorsque $h' \approx 0$.
En prenant $h' = h$, on pose alors $y_2 = f'(a+2h) \times h + y_1$; donc le point $M_2(a+2h; y_2)$ est proche du point A_2 de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $a+2h$.
On recommence en posant $y_3 = f'(a+3h) \times h + y_2$ qui est proche de $f(a+3h)$ donc $M_3(a+3h; y_3)$ est proche de $A_3 \in \mathscr{C}_f$ d'abscisse $a+3h\dots$

Exemple 5.4
Soit f la fonction telle que $f'(x) = x$ pour tout $x \in \mathbf{R}_+$ et dont la courbe passe par $A(0;1)$.
On pose $h = 0{,}2$ et on applique la méthode d'Euler :
$y_1 = f'(h) \times h + f(0) = h^2 + 1 = 1{,}04$: on place $M_1(0{,}2; 1{,}04)$.
$y_2 = f'(2h) \times h + y_1 = 2h^2 + 1{,}04 = 1{,}12$: on place $M_2(0{,}4; 1{,}12)$.
$y_3 = f'(3h) \times h + y_2 = 3h^2 + 1{,}12 = 1{,}24$: on place $M_3(0{,}6; 1{,}24)$.



5.3.4 Dérivées des fonctions usuelles

5.3.4.1 Fonction constante

Soit $k \in \mathbf{R}$ et $f : x \mapsto k$, pour $x \in \mathbf{R}$.
pour $h \neq 0$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{k-k}{h} = 0$.
Donc f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = 0$.
La dérivée d'une fonction constante est la fonction nulle.

5.3.4.2 La fonction $x \mapsto x^n, n \in \mathbf{N}^*$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^n$. Alors f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour $x \in \mathbf{R}$, on a $f'(x) = nx^{n-1}$.
Idée de la démonstration :
Soit $x \in \mathbf{R}$ et h un réel non nul. Calculons le taux de variation de f entre x et $x+h$.
On a d'abord $f(x+h) = (x+h)^n$. En développant cette expression on va obtenir des termes en x^n, en $x^{n-1} \times h$, en $x^{n-2} \times h^2$, ... et en h^n. En observant attentivement la manière de développer le produit $(x+h)(x+h)\dots(x+h)$, on remarque que le terme x^n apparaîtra une seule fois et

le terme $x^{n-1} \times h$ apparaîtra n fois. On a donc :

$$(x+h)^n = x^n + n \times x^{n-1}h + \ldots x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n$$

Donc :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{n \times x^{n-1}h + \ldots x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n}{h} = nx^{n-1} + hQ(x,h)$$

avec $Q(x,h)$ une expression polynomiale dépendant de x et de h : sa limite lorsque h tend vers 0 existe donc.
Ainsi, on obtient :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{x\to 0} \left(nx^{n-1} + hQ(x,h)\right) = nx^{n-1}$$

Remarque 5.1
On a donc les résultats suivants :
– si $f(x) = x$ alors pour $x \in \mathbf{R}$, on a $f'(x) = 1$;
– si $f(x) = x^2$ alors pour $x \in \mathbf{R}$, on a $f'(x) = 2x$;
– si $f(x) = x^3$ alors pour $x \in \mathbf{R}$, on a $f'(x) = 3x^2$;
– ….

Exemple 5.5
Soi f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^3$. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 de $\mathscr{C}$ est $f'(1)$. Pour calculer $f'(1)$ on peut utiliser deux méthodes :
– la définition du nombre dérivé : c'est la limite lorsque h tend vers 0 du taux de variation $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$;
– ou, et c'est plus rapide, la fonction dérivée de f : on a pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = 3x^2$; donc $f'(1) = 3 \times 1^2 = 3$.
De plus, on a $f(1) = 1^3 = 1$. L'équation de T_1 est donc : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$, soit $y = 3(x-1)+1$ ou encore, en réduisant : $T_1 : y = 3x - 2$.

5.3.4.3 Fonction inverse

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. Alors f est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ et pour $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
Démonstration :
Pour $x \neq 0$ et $h \neq 0$ tels que $x + h \neq 0$, on a :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \frac{-h}{x(x+h)h} = -\frac{1}{x(x+h)}$$

On a donc :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(-\frac{1}{x(x+h)}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

Exemple 5.6
Soit f la fonction inverse : pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Cette tangente T_1 a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.
Pour la déterminer nous avons besoin de $f'(1)$ et de $f(1) = \frac{1}{1} = 1$.
On a pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ donc $f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$.
Ainsi T_1 a pour équation $y = -1 \times (x-1) + 1$ soit $T_1 : y = -x + 2$.

5.3.4.4 Fonction racine carrée

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$. Alors f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et pour $x \in \mathbf{R}_+^*$, on a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Attention : f n'est pas dérivable en 0
Démonstation :
Pour $x \in \mathbf{R}_+^*$ et $h \in \mathbf{R}_+^*$ on a :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{\sqrt{x+h}^2-\sqrt{x}^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

On a donc :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

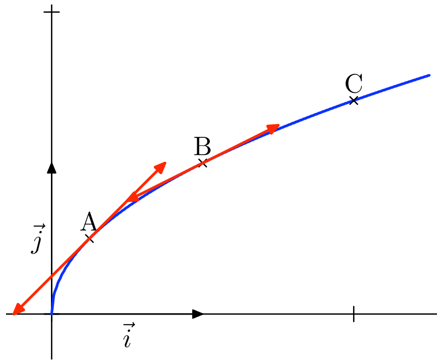
Si $x = 0$, pour $h > 0$, on a $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$. Ainsi, lorsque h tend vers 0, $\sqrt{h}$ aussi donc $\frac{1}{\sqrt{h}}$ prend des valeurs de plus en plus grandes. Donc la limite lorsque h tend vers 0 de ce taux de variation n'existe pas : la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

Application au tracé de la courbe :

Pour tracer la courbe représentant la fonction racine carrée on dresse un tableau de valeurs et pour chaque point de ce tableau on calcule le coefficient directeur de la tangente à la courbe en ce point, puis on détermine l'équation de la tangente :

a	$\frac{1}{4}$	1	2
$f(a)$	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$
$f'(a)$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$

- en $a = \frac{1}{4}$, l'équation de la tangente est : $y = 1 \times (x - \frac{1}{4}) + \frac{1}{2}$ soit $y = x + \frac{1}{4}$;
- en $a = 1$, l'équation de la tangente est : $y = \frac{1}{2}(x-1) + 1$ soit $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$;
- en $a = 2$, l'équation de la tangente est : $y = \frac{1}{2\sqrt{2}}(x-2) + \sqrt{2}$ soit $y = \frac{x\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}$.



5.3.4.5 Fonctions trigonométriques

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbf{R}$ et on a pour $x \in \mathbf{R}$, $\cos'(x) = -\sin(x)$ et $\sin'(x) = \cos(x)$.

5.4 Opérations sur les fonctions dérivables

5.4.1 Dérivée d'une somme

Propriété 5.2
Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. On note f la fonction définie sur I par $f(x) = u(x) + v(x)$ (on note aussi $f = u + v$ sur I). Alors la fonction f est dérivable sur I et pour $x \in I$, $f'(x) = u'(x) + v'(x)$. On note $f' = u' + v'$.

Exemple 5.7
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 + 3$.
f est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$, et pour $x \in \mathbf{R}$, on a : $f'(x) = 3x^2 + 2x$

5.4.2 Produit par un réel

Propriété 5.3
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, et λ un réel quelconque. On note f la fonction définie sur I par $f(x) = \lambda u(x)$ (on note $f = \lambda u$ sur I). Alors la fonction f est dérivable sur I et pour $x \in I$, $f'(x) = \lambda u'(x)$. On note $f' = \lambda u'$.

Exemple 5.8
Soit f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 2x^2$, et g définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = 4x^3 - 2x$.
Alors, $f'(x) = 2 \times 2x$ et $g'(x) = 4 \times 3x^2 - 2$.

Conséquence :
Les fonctions polynômes sont donc dérivables sur leur ensemble de définition.

5.4.3 Dérivée d'un produit

Propriété 5.4
Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = u(x)v(x)$. Alors, f est dérivable sur I et pour $x \in I$, $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. On note $f' = u'v + uv'$.

Exemple 5.9
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f(x) = x^3\sqrt{x}$.
f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables : f s'écrit $u \times v$ avec $\left\{\begin{array}{l} u(x) = x^3 \\ v(x) = \sqrt{x} \end{array}\right.$,
où u est dérivable sur $\mathbf{R}$ et v dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$.
On a donc : $\left\{\begin{array}{l} u'(x) = 3x^2 \\ v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{array}\right.$.
Avec ces notations, on a $f' = u'v + uv'$ donc :

$$\text{Pour } x > 0,\ f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (3x^2)\sqrt{x} + x^3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 3x^2\sqrt{x} + \frac{x^3}{2\sqrt{x}}.$$

En simplifiant, on obtient même :

$$f'(x) = 3x^2\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^3 \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = x^2\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2\sqrt{x} = \frac{7}{2}x^2\sqrt{x}$$