

**Exercice 6.**

$$\begin{aligned}
A &= \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

En utilisant la même méthode on obtient :

$$\begin{aligned}
B &= \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{7\pi}{8}\right) \\
&= \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) \\
&= \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \left(-\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)^2 + \left(-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2 \\
&= 2\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right) \\
&= 2\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right) \\
&= 2\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \\
&= 2 \times 1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

Attention : ne pas oublier que  $\cos^2(x) = (\cos(x))^2$

Donc  $\cos^2(\pi - x) = (\cos(\pi - x))^2 = (-\cos(x))^2 = \cos^2(x)$  (voir ligne 3 du calcul précédent et ligne 3 du calcul suivant).

Ou un peu plus rapide :

$$\begin{aligned}
B &= \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{7\pi}{8}\right) \\
&= \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) \\
&= \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \left(-\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2 + \left(-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2 \\
&= \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \\
&= 1 + 1 \\
&= 2
\end{aligned}$$