Chapitre 4

Trigonométrie et repérage

Lorsque qu'on cherche une rue sur un plan de ville, on *repère* le rectangle où se trouve cette rue grâce à une lettre qui définit une colonne et un nombre qui définit une ligne du quadrillage sur le plan. Les marins ou les géographes *repèrent* un point sur la Terre grâce à sa longitude et sa latitude. Les astronomes ont besoin, eux, de trois mesures pour *repérer* un objet spatial, par exemple deux angles définissant une direction et une distance caractérisant l'éloignement de l'objet sur la direction.
Le *repérage* est donc indispensable dès lors qu'on cherche à définir la position d'un objet dans un espace. Les repères que nous avons utilisé jusqu'à présent sont dit *cartésiens*, adjectif créé en hommage à DESCARTES (1596 - 1650) mathématicien et philosophe français qui inventa en même temps que FERMAT (1601 - 1665) mais indépendamment de lui, le système de coordonnées que nous utilisons couramment. Les repères cartésiens utilisés jusqu'à présent permettent de positionner des points dans un plan. Ils peuvent être complétés par une troisième coordonnée permettant de se repérer dans l'espace à trois dimensions[1]. Ces repères ne sont pourtant pas les seuls permettant de positionner des objets, nous allons découvrir dans ce chapitre comment se repérer sur un plan avec un angle et un rayon : grâce aux *coordonnées polaires*.

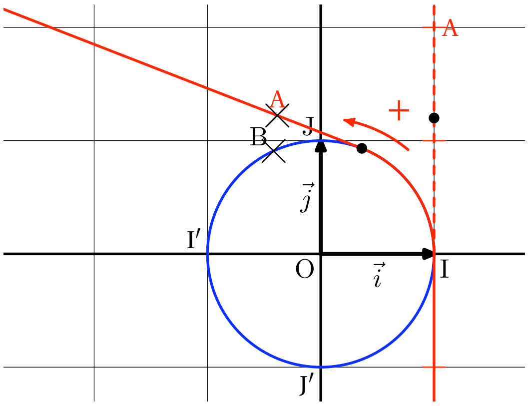
4.1 Trigonométrie

4.1.1 Enroulement de R sur le cercle trigonométrique

Définition 4.1
Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, le cercle de centre O et de rayon 1 est appelé *cercle trigonométrique*.
Sur ce cercle, le *sens direct* est contraire au sens de rotation des aiguilles d'une montre et le *sens indirect* est le sens de rotation des aiguilles d'une montre.

Sur la figure ci-après, on a tracé le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ ainsi qu'une droite graduée d d'origine I, parallèle à $(O;\vec{j})$ et de même unité que le repère.
La droite d représente l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels : à chaque réel x correspond le point de d qui a pour abscisse x sur la droite d. En « enroulant » cette droite d autour du cercle trigonométrique, à chaque point de d va correspondre un unique point de $\mathscr{C}$.
On dit que le point de $\mathscr{C}$ qui correspond au réel x est l'image de x sur le cercle trigonométrique.
Ainsi le point A d'abscisse 2 sur la droite d se retrouve sur le point B du cercle $\mathscr{C}$; 2 est alors une mesure de l'arc orienté IB et B est l'image du réel 2 sur le cercle trigonométrique.

[1] Et même par plus de coordonnées si on travaille, et c'est courant en mathématiques, dans des espaces ayant plus de trois dimensions.



On peut remarquer que A' d'abscisse $2 + 2\pi$ sur d se retrouve aussi en B après l'enroulement de d sur le cercle[2].

Définition 4.2
Le *radian* est une unité de mesure des angles. On note cette unité rad.

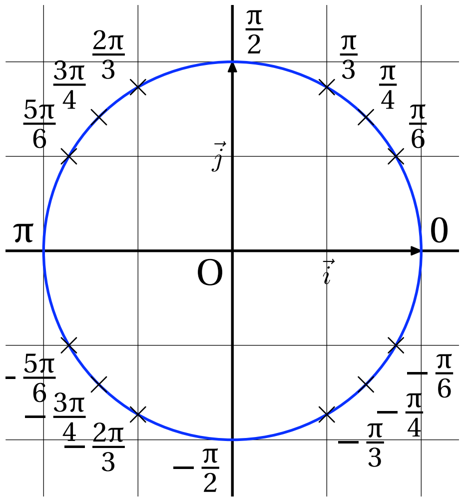
Un angle de centre O a pour mesure 1 rad s'il intercepte sur le cercle trigonométrique un arc de mesure 1.

Remarque 4.1
Les mesures d'un angle en degrés et en radians sont proportionnelles. On donne dans le tableau ci-dessous quelques correspondances :

mesure en degrés	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°	≈ 57°
mesure en radians	0 rad	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\pi}{2}$ rad	π rad	2π rad	1 rad

Remarque 4.2
On a vu que plusieurs points de la droite d qu'on enroule autour du cercle trigonométrique peuvent se retrouver sur le même point de ce cercle. Ainsi, un point du cercle trigonométrique peut être associé à plusieurs mesures d'angles différant d'un multiple de 2π.
On appelle *mesure principale* d'un angle exprimée en radians la mesure de cet angle qui est comprise dans l'intervalle $]-\pi\,;+\pi]$.

Ci-contre, quelques mesures principales d'angles (en radians) sur le cercle trigonométrique :



Exemple 4.1
Le point A correspond sur le cercle trigonométrique au réel $x = \frac{7\pi}{4}$. En plaçant A, on peut facilement trouver la mesure principale de l'angle correspondant : il s'agit de $-\frac{\pi}{4}$.
On remarque que $\frac{7\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2\pi$.

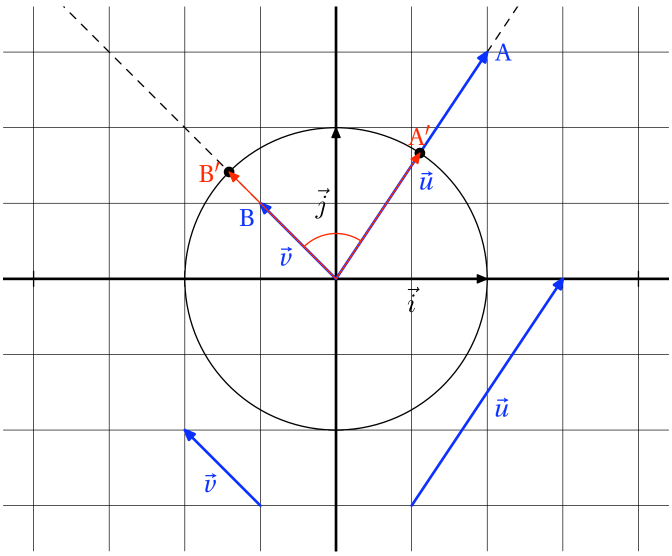
[2]Mais après avoir effectué un tour complet du cercle…

4.1.2 Angle de vecteurs non-nuls

Définition 4.3
Soit x et y deux réels quelconques. Soit M et N les images respectives de x et y sur le cercle trigonométrique du repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. *Les mesures* en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON})$ sont les réels $y-x+2k\pi$ où $k\in\mathbf{Z}$.
On note $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}) = y-x+2k\pi$, où $k\in\mathbf{Z}$.

Propriété 4.1
Soit M et N deux points du cercle trigonométrique du repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Il existe une unique mesure en radian α de l'angle $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON})$ appartenant à l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.
Cette mesure α est appelée *mesure principale* de l'angle orienté $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON})$.
On a alors $\widehat{MON} = |\alpha|$.

Définition 4.4
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Soit A et B les points du plan tels que $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$.
On note respectivement A' et B' les intersections des demi-droites $[OA)$ et $[OB)$ avec le cercle trigonométrique du repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Les mesures en radians de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$ sont alors les mesures en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB'})$.

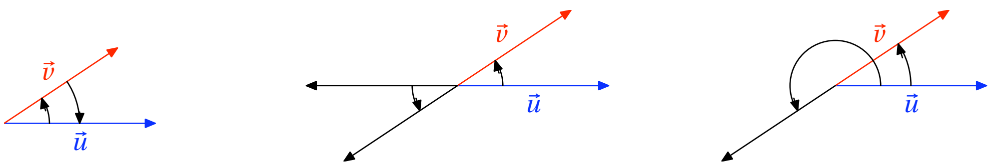


Propriété 4.2 (Relation de Chasles (admise))
Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls. On a :

$$(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u},\vec{w})+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$$

Propriété 4.3 (Conséquences)
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On a :

$$(\vec{v},\vec{u}) = -(\vec{u},\vec{v}); \qquad (-\vec{u},-\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v}); \qquad (\vec{u},-\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v})+\pi$$



Ces égalités sont vraies

à un multiple de 2π près, on dit « à $2k\pi$-près ».

4.1.3 Lignes trigonométriques

Une *ligne trigonométrique* est une expression désignant une des fonctions trigonométriques étudiées en classe de seconde : cosinus, sinus et tangente. Cette expression vient du fait que cosinus, sinus et tangente d'un réel sont les longueurs de segments (de lignes) sur une figure.

Définition 4.5
Soit x un réel et M son image sur le cercle trigonométrique du repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Le cosinus de x est le réel noté $\cos(x)$ égal à l'abscisse de M. Le sinus de x est le réel noté $\sin(x)$ égal à l'ordonnée de M.

Propriété 4.4 (déjà vue en seconde)
Pour tout réel x et tout entier relatif k on a :

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \qquad -1 \leq \sin(x) \leq 1$$
$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \qquad \cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$$
$$\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$$

On a vu que si x est un réel et k un entier relatif, les images de x et $x + 2k\pi$ sur le cercle trigonométrique sont confondues. On a alors la définition suivante :

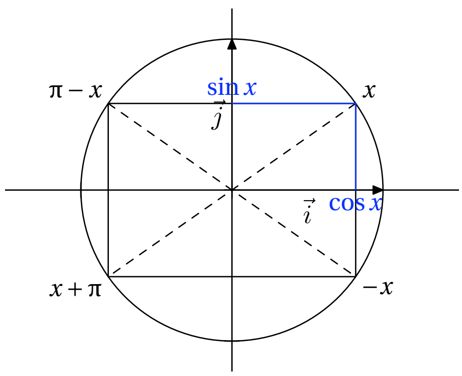
Définition 4.6
Le cosinus (resp. sinus) d'un angle orienté est le cosinus (resp. le sinus) d'une mesure en radians de cet angle orienté.

Propriété 4.5 (Angles associés)
Soit x un réel. On a :

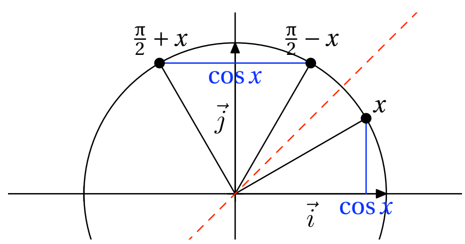
$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \sin(-x) = -\sin(x)$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi - x) = \sin(x)$$
$$\cos(x + \pi) = -\cos(x) \qquad \sin(x + \pi) = -\sin(x)$$
$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) \qquad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

Idée de la démonstration :

Les images des réels x, $\pi - x$, $\pi + x$ et $-x$ sur le cercle trigonométrique sont les sommets d'un rectangle de centre O et dont les axes de symétrie sont les axes du repère :



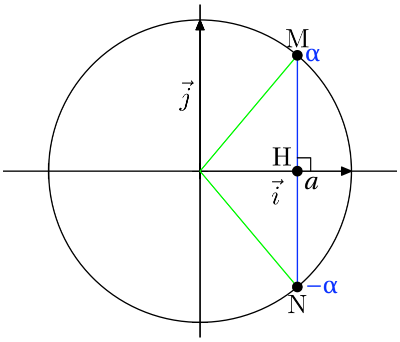
Les images des réels x et $\frac{\pi}{2} - x$ sur le cercle trigonométrique sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. Les images sur le cercle trigonométrique des réels $\frac{\pi}{2} - x$ et $\frac{\pi}{2} + x$ sont symétriques par rapport à $(O;\vec{j})$:

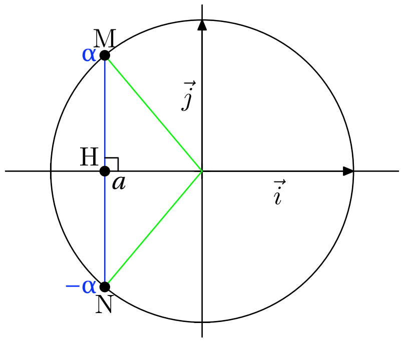


4.1.4 Équations

Résolution de l'équation $\cos x = a$

Distinguons plusieurs cas :
- si $|a| > 1$, l'équation n'a pas de solution car pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\cos x \leq 1$;
- si $|a| < 1$, la perpendiculaire à $(O; \vec{i})$ passant par $H(a; 0)$ coupe le cercle trigonométrique en deux points ; il existe donc deux points du cercle trigonométrique ayant pour abscisse a : les points M et N images des réels α et $-\alpha$ où $\alpha \in]0\,;\,\pi[$. L'équation $\cos x = a$ a donc deux solutions dans $]-\pi\,;\,\pi]$ et les solutions dans $\mathbf{R}$ sont les réels s'écrivant sous la forme $\alpha + 2k\pi$ et $-\alpha + 2k\pi$ où $k \in \mathbf{Z}$;

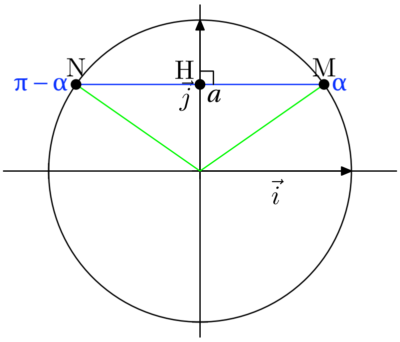


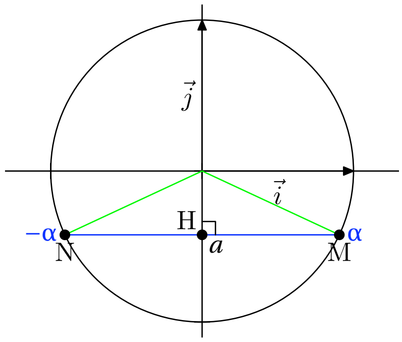


- si $a = 1$, les points M et N définis précédemment sont confondus et ont pour abscisse 1. L'équation $\cos x = a$ admet une unique solution dans $]-\pi\,;\,\pi]$: $x = 0$. Dans $\mathbf{R}$ les solutions sont les réels s'écrivant $2k\pi$ où $k \in \mathbf{Z}$;
- si $a = -1$, les points M et N définis précédemment sont confondus et ont pour abscisse -1. L'équation $\cos x = a$ admet une unique solution dans $]-\pi\,;\,\pi]$: $x = \pi$. Dans $\mathbf{R}$ les solutions sont les réels s'écrivant $\pi + 2k\pi$ où $k \in \mathbf{Z}$.

Résolution de l'équation $\sin x = a$

Distinguons plusieurs cas :
- si $|a| > 1$, l'équation n'a pas de solution car pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\sin x \leq 1$;
- si $|a| < 1$, la perpendiculaire à $(O; \vec{j})$ passant par $H(0; a)$ coupe le cercle trigonométrique en deux points ; il existe donc deux points du cercle trigonométrique ayant pour ordonnée a : les points M et N images des réels α et $\pi - \alpha$ où $\alpha \in]-\pi\,;\,\pi]$. L'équation $\sin x = a$ a donc deux solutions dans $]-\pi\,;\,\pi]$[3] et les solutions dans $\mathbf{R}$ sont les réels s'écrivant sous la forme $\alpha + 2k\pi$ et $\pi - \alpha + 2k\pi$ où $k \in \mathbf{Z}$;





- si $a = 1$, les points M et N définis précédemment sont confondus et ont pour ordonnée 1. L'équation $\sin x = a$ admet une unique solution dans $]-\pi\,;\,\pi]$: $x = \frac{\pi}{2}$. Dans $\mathbf{R}$ les solutions sont les réels s'écrivant $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbf{Z}$;

[3] Attention : une solution est α, l'autre est la mesure principale de $\pi - \alpha$ qui peut éventuellement être différente de $\pi - \alpha$.

– si $a = -1$, les points M et N définis précédemment sont confondus et ont pour ordonnée -1. L'équation $\sin x = a$ admet une unique solution dans $]-\pi\,;\,\pi]$: $x = -\frac{\pi}{2}$. Dans $\mathbf{R}$ les solutions sont les réels s'écrivant $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbf{Z}$.

Propriété 4.6 (Synthèse)
Soit x et y deux réels quelconques :
– l'égalité $\cos x = \cos y$ équivant à $x = \pm y + 2k\pi$;
– l'égalité $\sin x = \sin y$ équivaut à $x = y + 2k\pi$ ou $x = \pi - y + 2k\pi$.

Exemple 4.2
On considère l'équation (E) : $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{3})$.

1. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation (E).
2. Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi]$ l'équation (E).

1. En utilisant la propriété 4.5, on remarque que $\cos(\frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3})$.
   L'équation (E) est donc équivalente à $\sin(x) = \sin(\frac{\pi}{6})$. Les solutions sont donc :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. , k \in \mathbf{Z}$$

2. Parmi les solutions précédentes, cherchons celles qui ont dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$. On obtient deux solutions : $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.

4.2 Repérages du plan

4.2.1 Repérage cartésien

Définition 4.7
Un repère cartésien du plan est constitué d'un point O appelé origine du repère et de deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ non colinéaires. On le note $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Les coordonnées d'un point M du plan sont l'unique couple $(x; y)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
Les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ du plan sont l'unique couple $(x; y)$ tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

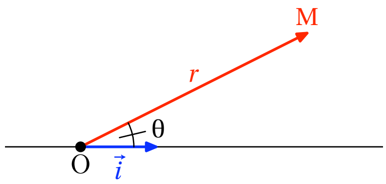
Remarque 4.3
Les droites $(O; \vec{i})$ et $(O; \vec{j})$ sont appelées les axes du repère. Si les axes sont perpendiculaires, on dit que le repère est orthogonal et si de plus les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont de même norme, on dit que le repère est orthonormal ou orthonormé.

Propriété 4.7
Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points et leurs coordonnées dans un repère.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.
Si le repère est orthonormé, on a $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

4.2.2 Repérage polaire

Pour se repérer dans le plan avec des coordonnées polaires, on a besoin d'un point origine O et d'un vecteur unitaire $\vec{i}$. Ce couple $(O; \vec{i})$ est appelé *repère polaire* du plan. O est le *pôle* et la demi-droite $[O; \vec{i})$ l'*axe polaire*.

Définition 4.8
Soit M un point du plan distinct de O. Un couple[1] de coordonnées polaires du point M est un couple $(r; \theta)$ où $r = OM \in \mathbf{R}_+$ et $\theta \in \mathbf{R}$ une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$. Ces coordonnées polaires sont relatives au *repère polaire* $(O; \vec{i})$



Remarque 4.4
Le repérage polaire consiste donc à donner un « cap » : l'angle formé avec le vecteur $\vec{i}$ et une distance appelée aussi rayon.

Remarque 4.5
Les coordonnées polaires d'un point du plan ne sont pas uniques : les coordonnées polaires $(2; \frac{\pi}{4})$ et $(2; \frac{9\pi}{4})$ sont celles d'un unique et même point du plan.
En imposant à θ une valeur dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ les coordonnées polaires sont alors uniques[4].

Remarque 4.6
Le repérage en coordonnées polaires permet de donner l'équation de certaines lignes très facilement. Par exemple l'équation $r = 3$ caractérise le cercle de centre O et de rayon 3.
Par contre l'équation caractérisant une parabole ou une droite quelconque est beaucoup plus difficile à écrire…

4.2.3 Changements de type de repérage

Soit M un point du plan. On note $(x; y)$ ses coordonnées cartésiennes et $(r; \theta)$ ses coordonnées polaires.
Passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires :
On a vu que dans le repérage polaire r est la distance OM, ainsi on a $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
θ est alors une mesure de l'angle tel que $\cos\theta = \frac{x}{r}$ et $\sin\theta = \frac{y}{r}$.

Passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes :
Les propriétés du cosinus et du sinus nous permettent d'obtenir : $\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right.$

Exemple 4.3
Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal du plan. Soit $A(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2})$ et $B(-5; 5)$ dans ce repère. Soit $C(2; \frac{2\pi}{3})$ dans le repère polaire $(O; \vec{i})$.

1. Déterminer les coordonnées polaires de A et B dans le repère polaire $(O; \vec{i})$.
2. Déterminer les coordonnées cartésiennes de C dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

[1]Attention : il n'est pas unique !
[4]C'est aussi le cas si on impose à θ d'être dans un intervalle du type $]\alpha\,;\,\alpha+2\pi]$, où α est un réel quelconque.

« *Si tous ceux qui croient avoir raison n'avaient pas tort, la vérité ne serait pas loin* »
PIERRE DAC