Exercice 1.

1. Le repère $(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK})$ est orthogonal car $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont portés par des arêtes issues d'un même sommet du pavé *droit*. De plus $AI = AJ = AK = 1$ cm donc ce repère est orthonormal.
2. $B(2;0;0)$, $D(0;5;0)$, $H(0;5;3)$ et $F(2;0;3)$.
3. Le centre du pavé droit est l'intersection des diagonales de $BFHD$ qui est un parallélogramme car $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$. Donc Le centre O du pavé droit est le milieu de $[BH]$.

$$\begin{cases} x_O = \frac{x_B+x_H}{2} = \frac{2+0}{2} = 1 \\ y_O = \frac{y_B+y_H}{2} = \frac{0+5}{2} = 2{,}5 \\ z_O = \frac{z_B+z_H}{2} = \frac{0+3}{2} = 1{,}5 \end{cases}$$

4. $BH^2 = (x_H - x_B)^2 + (y_H - y_B)^2 + (z_H - z_B)^2 = (-2)^2 + 5^2 + 3^2 = 38$. Donc la longueur d'une diagonale du pavé droit est $\sqrt{38}$ cm.

Exercice 2.

1. Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et de même, } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires si et seulement si il existe $k \in \mathbf{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$. En observant les ordonnées de ces vecteurs on obtient $k = 1$ et en observant les cotes, on obtient $k = 2$. Ceci est impossible donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Calculons $x_{\overrightarrow{AB}}x_{\overrightarrow{AC}} + y_{\overrightarrow{AB}}y_{\overrightarrow{AC}} + z_{\overrightarrow{AB}}z_{\overrightarrow{AC}} = 3 \times (-1) + 1 \times 1 + 1 \times 2 = 0$. Donc ces vecteurs sont orthogonaux.

2. Les coordonnées de $\overrightarrow{AD}$ sont $(1;3;5)$. Les points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ le sont. Cherchons s'il existe α et β tels que $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$. On résout le système suivant obtenu par les coordonnées des vecteurs :

$$\begin{cases} 1 = 3\alpha - \beta \\ 3 = \alpha + \beta \\ 5 = \alpha + 2\beta \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent $\alpha = 1$ et $\beta = 2$. On vérifient que ces valeurs respectent la dernière équation ce qui est le cas donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$. Donc ces trois vecteurs sont coplanaires. Donc les quatre points aussi.

Exercice 3.

1. $\overrightarrow{AB}(0;-3;3)$, $\overrightarrow{AC}(1;-1;3)$, $\overrightarrow{AD}(-3;-2;2)$ et $\overrightarrow{CD}(-4;-1;-1)$.
2. On calcule $xx' + yy' + zz' = 0 \times (-4) + (-3) \times (-1) + 3 \times (-1) = 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.
3. Les points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ le sont. Cherchons s'il existe α et β tels que $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$. On résout le système suivant obtenu par les coordonnées des vecteurs : $\begin{cases} -3 = 0\alpha + 1\beta \\ -2 = -3\alpha - \beta \\ 2 = 3\alpha + 3\beta \end{cases}$.

Les deux premières équations donnent $\alpha = \frac{5}{3}$ et $\beta = -3$. En remplaçant dans la dernière équation on obtient à droite : $3\alpha + 3\beta = 3 \times \frac{5}{3} + 3 \times (-3) = -4 \neq 2$ Donc les trois vecteurs ne sont pas coplanaires et les points A, B, C et D non plus.

4. Les droites (AB) et (CD) ne sont pas perpendiculaires car elles ne sont pas coplanaires donc non sécantes. Elles sont orthogonales strictement.

Exercice 4.

1. On calcule AB, AC et BC :

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = (-6)^2 + 2^2 + (-12)^2 = 184 \text{ donc } AB = \sqrt{184} = 2\sqrt{46}$$

De même, $AC = \sqrt{184} = 2\sqrt{46}$ et $BC = \sqrt{88} = 2\sqrt{22}$. On constate que $AB = AC$ donc ABC est isocèle en A.

2. ABC est isocèle en A donc la hauteur et la médiane issues de A sont confondues. Donc le pied de la hauteur issue de A est le milieu de $[BC]$. Ainsi :

$$x_H = \frac{x_B + x_C}{2} = -5; \quad y_H = \frac{y_B + y_C}{2} = 4; \quad z_H = \frac{z_B + z_C}{2} = -1$$

3. On calcule $AH = \sqrt{162} = 9\sqrt{2}$ (même formule qu'à la question 1). On a alors :

$$\mathscr{A}_{ABC} = \frac{BC \times AH}{2} = \frac{2\sqrt{22} \times 9\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{44} = 18\sqrt{11}$$

.

4. a. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{HS}$ sont $(-6 - \lambda - (-5)\,;\, 3\lambda + 7 - 4\,;\, \lambda - (-1))$. C'est à dire qu'on a :$VecHS \begin{pmatrix} -1-\lambda \\ 3\lambda + 3 \\ \lambda + 1 \end{pmatrix}$.

   b. On calcule « $xx' + yy' + zz'$ » :

$$xx' + yy' + zz' = -6(-1-\lambda) + 2(3\lambda + 3) + (-12)(lambda + 1) = 6\lambda + 6\lambda - 12\lambda + 6 + 6 - 12 = 0$$

   Donc pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^+$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HS}$ sont orthogonaux.

   c. Le vecteur $\overrightarrow{SH}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ donc la droite (SH) est orthogonale aux droites (AB) et (AC) qui sont sécantes. Donc on peut en déduire que la droite (SH) est orthogonale au plan (ABC).

   d.

$$SH^2 = (-1-\lambda)^2 + (3\lambda + 3)^2 + (\lambda + 1)^2 = 11\lambda^2 + 22\lambda + 11 = 11(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 11(\lambda + 1)^2$$

   e. (SH) est orthogonale à (ABC) donc $[SH]$ est la hauteur de la pyramide $SABC$. Ainsi :

$$\mathscr{V}_{SABC} = \frac{\mathscr{A}_{ABC} \times SH}{3} = \frac{18\sqrt{11} \times \sqrt{11(1+\lambda)^2}}{3} = \frac{18 \times \sqrt{11}^2 \times (1+\lambda)}{3} = 66(1+\lambda)$$

   car $(1 + \lambda) > 0$ donc $\sqrt{(1+\lambda)^2} = 1 + \lambda$.

   f. Ce volume est égal à 132 si et seulement si $66(1 + \lambda) = 132$ c'est à dire pour $\lambda = 1$.