# Chapitre 2

# Droites. Systèmes

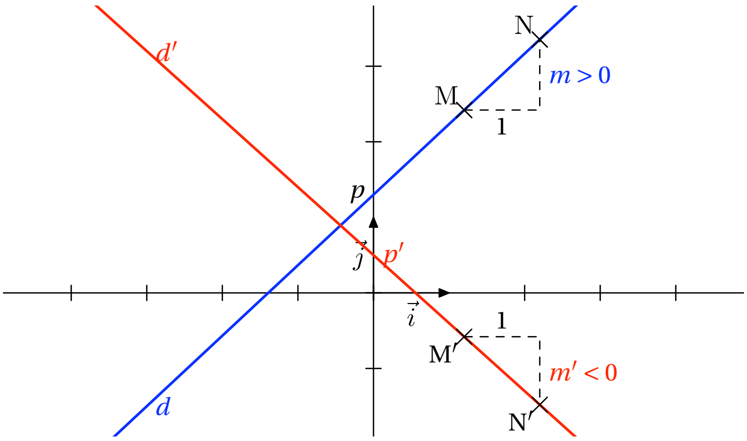
Dire que le point $M$ du plan a pour coordonnées $(x;y)$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ signifie que : $\overrightarrow{OM} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j}$. On note $M(x;y)$. $x$ est appelée l'abscisse de $M$ et $y$ son ordonnée. Si les axes du repère sont perpendiculaires, on dit que le repère et orthogonal, et si en plus l'unité est la même sur les deux axes, on dit que le repère est orthonormé.
Dans la suite du chapitre, le plan sera muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

## 2.1 Coefficient directeur

### 2.1.1 Définition

**Propriété 2.1**
Soit $(D)$ une droite du plan, non parallèle à l'axe des ordonnées. Pour tous les points $M$ et $N$ (distincts l'un de l'autre) de la droite $D$, le quotient : $m = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M}$ est constant.
Ce nombre $m$ est appelé *coefficient directeur* de la droite $D$.

**Remarque 2.1**
Si on choisit deux points $M$ et $N$ de la droite $D$ tels que $x_N - x_M = 1$, on a alors : $m = y_N - y_M$ ou encore $y_N = y_M + m$ :




**Exemple 2.1**
On donne $A(4;3)$ et $B(5;1,5)$. Déterminer le coefficient directeur $m$ de la droite $(AB)$.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1{,}5 - 3}{5 - 4} = -1{,}5$$

Cela signifie qu'un point de la droite $(AB)$ qui parcourt 1 unité horizontalement, va « descendre » de 1,5 unités verticalement[1].

### 2.1.2 Droites parallèles

**Propriété 2.2**
Soit deux droites $d_1$ et $d_2$, non parallèles à l'axe des ordonnées du repère :
– si $d_1$ et $d_2$ sont parallèles, alors elles ont le même coefficient directeur ;
– Réciproquement, si $d_1$ et $d_2$ ont le même coefficient directeur, alors elles sont parallèles.

**Remarque 2.2**
On peut aussi dire : les droites $d_1$ et $d_2$ sont parallèles *si et seulement si* elles ont le même coefficient directeur.

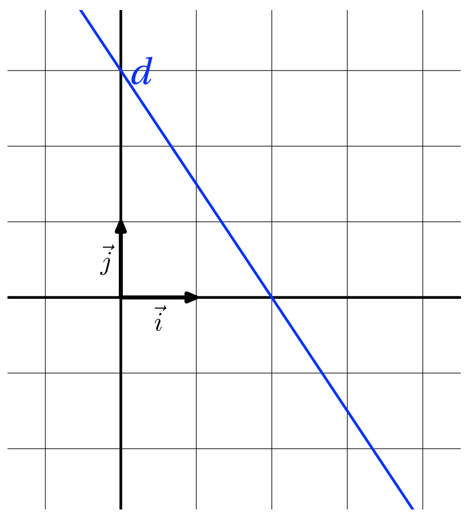
## 2.2 Équations de droites

### 2.2.1 Droites non parallèles à l'axe des ordonnées

**Propriété 2.3**
Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme $y = mx + p$. Cela signifie que :
– si un point a des coordonnées qui vérifient l'équation, alors il est sur la droite ;
– réciproquement, si un point est sur la droite, alors ses coordonnées vérifient l'équation.
L'équation $y = mx + p$ est appelée *équation réduite* de la droite $d$.
Le réel $p$ est appelé *ordonnée à l'origine* de la droite $d$ : c'est l'ordonnée du point d'intersection de $d$ est de l'axe des ordonnées.

**Exemple 2.2**
La droite d'équation $y = 2x-3$ a pour coefficient directeur 2 et pour ordonnée à l'origine -3. Elle passe donc par le point $P(0;-3)$, et si on se déplace sur la droite de 1 unité horizontalement, on se déplacera verticalement de 2 unités. Donc le point $A(0+1;-3+2)$ appartient aussi à la droite. Finalement $d$ est la droite $(AP)$ avec $A(1;-1)$ et $P(0;-3)$.

**Exemple 2.3**
Déterminer l'équation réduite de la droite $d$ tracée ci-contre :




L'équation réduite de la droite $d$ est de la forme $y = mx + p$. La droite $d$ coupe l'axe des ordonnées au point $P$ de coordonnées $(0;3)$ donc l'ordonnée à l'origine vaut 3 : $p = 3$.
La droite $d$ passe aussi par le point $A(2;0)$. On a donc $m = \frac{y_A - y_P}{x_A - x_P} = \frac{0-3}{2-0} = -1{,}5$.
Ainsi la droite $d$ a pour équation réduite : $y = -1{,}5x + 3$.

[1] En supposant le repère orthogonal.

### 2.2.2 Droite parallèle à l'axe des ordonnées

**Propriété 2.4**
Soit $d$ une droite parallèle à l'axe des ordonnées. Tous les points de la droite $d$ ont la même abscisse. Si on note $k$ cette abscisse, on dit que la droite $d$ a pour équation réduite $x = k$.

**Remarque 2.3** (Attention !)
La droite $d$ d'équation $x = k$ pas de coefficient directeur, ni d'ordonnée à l'origine.

## 2.3 Systèmes d'équations linéaires

### 2.3.1 Système de deux équations à deux inconnues

Un système de deux équations linéaires à deux inconnues $x$ et $y$ est un couple d'égalités comportants deux nombres inconnus que l'on note $x$ et $y$.

**Exemple 2.4**

$$\text{Soit } (S) : \begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ -2x + y = 5 \end{cases}$$

$(S)$ est un système de deux équations à deux inconnues. Le couple $(-1; 3)$ est solution de ce système car en remplaçant $x$ par $-1$ et $y$ par 3 dans chacune des deux équations du système, on obtient une égalité vraie :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 3 \times (-1) + 2 \times 3 = 3 \\ -2x + y = -2 \times (-1) + 3 = 5 \end{cases}$$

### 2.3.2 Interprétation graphique d'un système linéaire

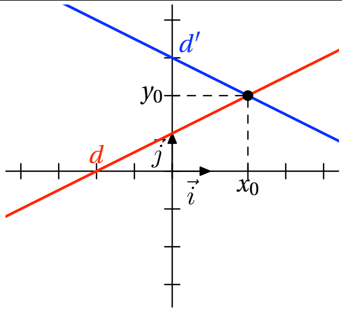
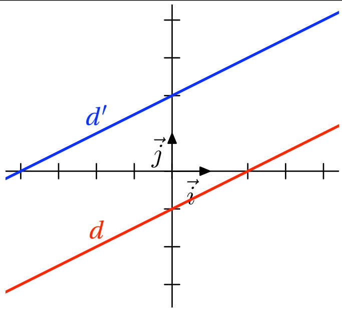
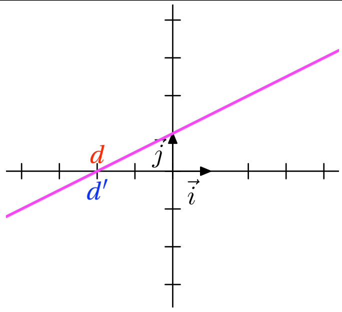
Une équation du type $ax + by = c$ peut toujours s'écrire sous la forme $y = mx + p$ (si $b \neq 0$) ou sous la forme $x = k$ (si $a \neq 0$). En effet, $a$ et $b$ ne peuvent pas être nuls simultanément.
Un système de deux équations linéaires peut donc être représenté par deux droites dans un repère. Les solutions du système sont alors les coordonnées des points qui vérifient les deux équations donc qui appartiennent aux deux droites.

**Propriété 2.5** (Rappel de seconde)
Soit $d$ et $d'$ sont les droites d'équations respectives $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$. Les droites $d$ et $d'$ sont parallèles si et seulement si $a'b - ab' = 0$.

On considère un système $(S)$ de deux équations linéaires à deux inconnues :

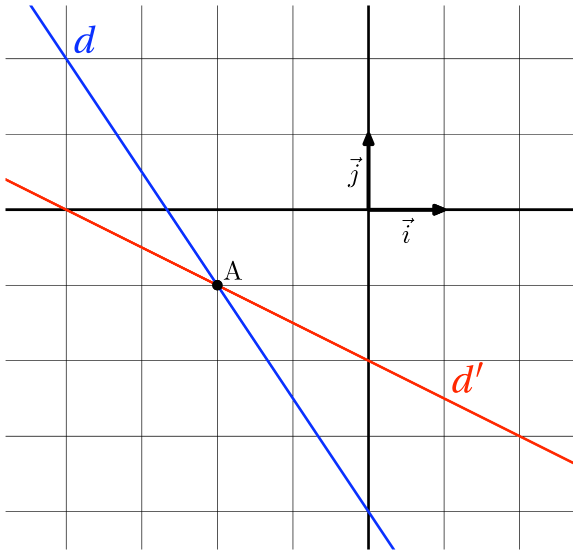
$$(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

On note $d$ et $d'$ les droites associées aux deux équations du système. On a alors trois possibilités :

| Si $ab' - a'b \neq 0$ | Si $ab' - a'b = 0$ | |
|---|---|---|
| | Ordonnées à l'origine distinctes : $\frac{c}{b} \neq \frac{c'}{b'}$ | Même ordonnée à l'origine : $\frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}$ |
| Les droites sont sécantes | Les droites sont strictement parallèles | Les droites sont confondues |
|   |   |   |
| Une unique solution $(x_0; y_0)$ | Pas de solution | Tous les couples de coordonnées des points des droites sont solution. |

**Exemple 2.5**

Résoudre graphiqement le système suivant : $\begin{cases} 3x + 2y = -8 \\ x + 2y = -4 \end{cases}$




On transforme les équations pour les obtenir sous la forme $y = mx + p$. On obtient le système suivant : $\begin{cases} 2y = -3x - 8 \\ 2y = -x - 4 \end{cases}$

Soit : $\begin{cases} y = -1{,}5x - 4 \\ y = -0{,}5x - 2 \end{cases}$

On trace les droites $d$ et $d'$ d'équations respectives $y = -1{,}5x - 4$ et $y = -0{,}5x - 2$ dans un même repère.

Ces deux droites se coupent au point $A$ de coordonnées $(-2; -1)$.
Donc $\mathscr{S} = \{(-2; -1)\}$.

### 2.3.3 Résolution algébrique d'un système linéaire

Pour résoudre un système de deux équations à deux inconnues, on va écrire successivement des systèmes *équivalents* aux précédents dans lesquels on va « éliminer » une des deux inconnues dans une des deux équations. Pour indiquer que chaque système est équivalent au précédent, on utilise le symbole « $\Leftrightarrow$ » (qui se lit « si et seulement si »).

**Exemple 2.6**

Résolvons algébriquement le système $(S)$ : $\begin{cases} 3x + 2y = -4 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$

| Résolution | Explication |
|---|---|
| $\begin{cases} 3x+2y=-4 \quad (L_1) \\ 2x+5y=1 \quad (L_2) \end{cases}$ | On écrit le système de départ en numérotant les lignes |
| $\Leftrightarrow \begin{cases} 2\times 3x+2\times 2y=2\times(-4) \quad (2L_1 \to L_1') \\ 3\times 2x+3\times 5y=3\times 1 \quad (3L_2 \to L_2') \end{cases}$ | On multiplie $L_1$ par $a_2$ et $L_2$ par $a_1$. |
| $\Leftrightarrow \begin{cases} 6x+4y=-8 \quad (L_1') \\ 6x+15y=3 \quad (L_2') \end{cases}$ | On réduit. |
| $\Leftrightarrow \begin{cases} 6x+4y=-8 \quad (L_1') \\ 0x+11y=3-(-8) \quad (L_2'-L_1' \to L_2'') \end{cases}$ | On soustrait les deux lignes. |
| $\Leftrightarrow \begin{cases} 6x+4y=-8 \quad (L_1') \\ y=\frac{11}{11}=1 \quad (L_2'') \end{cases}$ | On résout $(L_2'')$. |
| $\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-8-4}{6}=-2 \quad (L_1') \\ y=1 \quad (L_2'') \end{cases}$ | On reporte $y=1$ dans $(L_1')$ et on résout. |
| $\mathscr{S}=\{(-2;1)\}$ | On écrit l'ensemble solution. |