Cours de mathématiques

Thomas Rey

Classe de première ES
30 mai 2008

« *Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve.* »
EUCLIDE D'ALEXANDRIE

Table des matières

1 Les pourcentages **7**
1.1 Variation en pourcentage . . . 7
1.1.1 Calcul d'une variation . . . 7
1.1.2 Expression d'une variation en pourcentage . . . 7
1.2 Successions d'augmentations et réductions . . . 8
1.3 Variation d'un pourcentage . . . 8
1.3.1 Variation d'un pourcentage . . . 8
1.3.2 Notion d'indice . . . 8
1.4 Pourcentage de pourcentage . . . 9
1.5 Addition et comparaison de pourcentages . . . 9
1.5.1 Addition de pourcentages . . . 9
1.5.2 Comparaison de pourcentages . . . 10

2 Les systèmes **11**
2.1 Équations de droites . . . 11
2.2 Système de deux équations à deux inconnues . . . 12
2.2.1 Définition . . . 12
2.2.2 Résolution graphique. Nombre de solutions . . . 12
2.3 Méthodes de résolution . . . 13
2.3.1 Par substitution . . . 13
2.3.2 Par combinaisons linéaires . . . 13
2.3.3 Méthode de Gauss . . . 14
2.4 Système d'inéquations . . . 14
2.4.1 Inéquation à deux inconnues . . . 14
2.4.2 Système d'inéquations . . . 15
2.5 Programmation linéaire . . . 16

3 Généralités sur les fonctions numériques **19**
3.1 Généralités . . . 19
3.2 Résolutions graphiques d'équations et d'inéquations . . . 20
3.3 Fonctions usuelles . . . 21
3.3.1 Fonctions linéaires et affines . . . 21
3.3.2 La fonction carrée . . . 22
3.3.3 La fonction inverse . . . 22
3.3.4 La fonction racine carrée . . . 22
3.4 Variations d'une fonction . . . 22
3.4.1 Fonction affine . . . 23
3.4.2 Fonction carrée . . . 23
3.4.3 Fonction inverse . . . 24
3.4.4 Fonction racine carrée . . . 24

3.5 Fonctions associées . . . 24
3.5.1 Fonction $x \mapsto f(x) + \beta$ . . . 24
3.5.2 Fonction $x \mapsto f(x + \alpha)$ . . . 25
3.5.3 Fonction $x \mapsto f(x + \alpha) + \beta$ . . . 25
3.5.4 Variations des fonctions associées . . . 25
3.6 Opérations sur les fonctions . . . 26
3.6.1 Somme de fonctions . . . 26
3.6.2 Produit d'une fonction par un réel . . . 26
3.6.3 Fonction composée . . . 27

4 Le second degré 29
4.1 Équation du second degré . . . 29
4.1.1 Définitions . . . 29
4.1.2 Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ . . . 29
4.2 Interprétation graphique . . . 30
4.2.1 Résolution graphique d'une équation du second degré . . . 30
4.2.2 Situation d'une parabole par rapport à l'axe des abscisses . . . 31
4.3 Inéquation du second degré . . . 32
4.4 Factorisation d'un trinôme du second degré . . . 33

5 Dérivation 35
5.1 Taux de variation . . . 35
5.1.1 Taux de variation . . . 35
5.1.2 Interprétation graphique . . . 35
5.2 Nombre dérivé . . . 36
5.2.1 Nombre dérivé . . . 36
5.2.2 Interprétation graphique . . . 36
5.2.3 Interprétation cinématique . . . 36
5.2.4 Approximation affine . . . 37
5.3 Fonction dérivée . . . 37
5.3.1 Fonction dérivée . . . 37
5.3.2 Dérivées des fonctions usuelles . . . 37
5.4 Opérations sur les fonctions dérivables . . . 39
5.4.1 Dérivée d'une somme . . . 39
5.4.2 Produit par un réel . . . 39
5.4.3 Dérivée d'un produit . . . 40
5.4.4 Dérivée d'un quotient . . . 40
5.5 Fonction dérivée et sens de variation . . . 41
5.5.1 Variations d'une fonction affine . . . 41
5.5.2 Théorèmes . . . 41

6 Statistiques 43
6.1 Graphiques . . . 43
6.1.1 Vocabulaire . . . 43
6.1.2 Histogramme . . . 43
6.1.3 Diagramme en bâtons . . . 44
6.2 Paramètres de position . . . 45
6.2.1 Le mode . . . 45
6.2.2 La médiane . . . 45

6.2.3 La moyenne 46
6.3 Paramètres de dispersion 47
6.3.1 L'étendue 47
6.3.2 Les quantiles 47
6.3.3 Application : les diagrammes en boîtes 48
6.3.4 Variance et écart type 49
6.4 Moyennes mobiles 50

7 Probabilités 51
7.1 Introduction. Premières définitions 51
7.2 Distribution de fréquences. Loi de probabilité 51
7.2.1 Distribution de fréquences 51
7.2.2 Loi de probabilité 52
7.2.3 Loi des grands nombres 52
7.2.4 Équiprobabilité 53
7.3 Quelques exemples de référence 53
7.4 Intersection. Réunion 54
7.4.1 Événement. Événement contraire 54
7.4.2 Intersection. Réunion 55

8 Les suites 57
8.1 Suite de nombres réels 57
8.1.1 Définition 57
8.1.2 Mode de génération 57
8.2 Variations d'une suite 60
8.3 Suites arithmétiques 60
8.3.1 Définition 60
8.3.2 Calcul du terme général 60
8.3.3 Calcul de la somme des premiers termes 61
8.4 Suites géométriques 62
8.4.1 Définition 62
8.4.2 Calcul du terme général 62
8.4.3 Calcul de la somme des premiers termes 63

9 Comportement asymptotique 65
9.1 Limites d'une fonction lorsque x tend vers $+\infty$ 65
9.1.1 Limite infinie en $+\infty$ 65
9.1.2 Limite réelle en $+\infty$. Asymptote horizontale en $+\infty$ 66
9.2 Limite d'une fonction lorsque x tend vers $-\infty$ 67
9.2.1 Limite infinie en $-\infty$ 67
9.2.2 Limite réelle en $-\infty$. Asymptote horizontale en $-\infty$ 67
9.2.3 Asymptote oblique 68
9.3 Limite d'une fonction lorsque x tend vers un réel a 68
9.3.1 Limite infinie en a 69
9.3.2 Limite finie en a 70
9.4 Théorèmes sur les limites 70
9.4.1 Limite d'une somme 70
9.4.2 Limite d'un produit 70
9.4.3 Limite d'un quotient $\frac{f}{g}$ 70

9.4.4 Formes indéterminées 71
9.5 Exemples 71
9.5.1 Étude de fonction 71
9.5.2 Levée d'indétermination 72

A Second degré **73**

B Calculatrices et statistiques **75**

C Dérivées des fonctions usuelles **77**

Chapitre 1

Les pourcentages

1.1 Variation en pourcentage

1.1.1 Calcul d'une variation

Propriété 1.1
Si une quantité passe d'une valeur x_0 à une valeur x_1 sa variation en pourcentage vaut :

$$\frac{x_1 - x_0}{x_0} \times 100$$

Exemple 1.1
Au cours d'un mois, le prix du baril de pétrole est passé de 68 \$ à 72 \$. En pourcentage, son augmentation est de :

$$\frac{72 - 68}{68} \times 100 \approx 5{,}88$$

Le prix du baril a augmenté d'environ 5,88 %.

1.1.2 Expression d'une variation en pourcentage

Propriété 1.2
Augmenter un nombre de x % revient à le multiplier par $(1 + \frac{x}{100})$. De même, diminuer un nombre de x % revient à le multiplier par $(1 - \frac{x}{100})$.

En effet, soit A un nombre. L'augmentation de A de x % vaut : $A \times \frac{x}{100}$. Donc, le nombre A augmenté de x % vaut : $A + A \times \frac{x}{100} = A(1 + \frac{x}{100})$.

Exemple 1.2
Un ordinateur coûtait 1300 €. Maurice obtient une réduction de 15 %. Il va payer :

$$1300 \times \left(1 - \frac{15}{100}\right) = 1300 \times 0{,}85 = 1105 \text{ €}.$$

Exemple 1.3
Le baril de pétrole brut coûte 65,1 \$. Il a augmenté de 5 % le mois dernier.
Il y a un mois, il coûtait x \$.

$$x \times \left(1 + \frac{5}{100}\right) = 65{,}1 \text{ donc } x = \frac{65{,}1}{1{,}05} = 62 \text{ \$ le baril.}$$

Exemple 1.4
Sur mon livret d'épargne, je possède 553,50 €. Il y a un an j'avais 540 €, et je n'ai fait ni versement, ni retrait. Le coefficient d'augmentation est de $\frac{553{,}5}{540} = 1{,}025$. Donc le taux d'intérêts de mon livret est de $1{,}025 - 1 = 0{,}025 = 2{,}5$ % par an.

1.2 Successions d'augmentations et réductions

Propriété 1.3
Augmenter un nombre de x %, puis de y % revient à le multiplier par :

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right)\left(1 + \frac{y}{100}\right)$$

(à adapter pour les diminutions ou les combinaisons d'augmentation et de diminutions)

Exemple 1.5
Un article coûtait 240 €. Il subit une augmentation de 10 %, puis il est soldé à -40 %. Son prix soldé est :

$$240 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) \times \left(1 - \frac{40}{100}\right) = 240 \times 1{,}10 \times 0{,}60 = 158{,}40 \text{ €}.$$

Exemple 1.6
un article coûtait 80 €, il augmente de 10 %, puis il baisse de 10 %. son nouveau prix n'est pas 80 € mais :

$$80 \times 1{,}10 \times 0{,}90 = 79{,}20 \text{ €}.$$

1.3 Variation d'un pourcentage

1.3.1 Variation d'un pourcentage

Un pourcentage est l'expression d'un quotient de dénominateur 100. Il sert à comparer facilement des rapports de grandeurs. On l'obtient généralement par le calcul d'un rapport $\frac{x}{y}, y \neq 0$. La variation du pourcentage peut donc être liée à une variation de x, ou à une variation de y.

Exemple 1.7
Dans un ménage, le loyer est de 750 € pour des revenus de 3000 €. Le loyer représente donc $\frac{750}{3000} = 0{,}25 = 25$ % des revenus. Un an plus tard, le loyer représente 30 % des revenus. Cette variation est peut-être dûe à une augmentation du loyer : $\frac{x}{3000} = 0{,}30$ donc $x = 900$ € ; ou encore à une baisse des revenus : $\frac{750}{y} = 0{,}30$ donc $y = \frac{750}{0{,}30} = 2500$ €. On peut même imaginer un mélange des deux !

1.3.2 Notion d'indice

Pour exprimer plus facilement l'évolution d'une grandeur en pourcentage à partir d'une date t_0, on créé un *indice* (généralement fixé à la valeur 100) à cette date, puis on exprime les autres valeurs de cet indice en calculant des quatrièmes proportionnelles :

date	t_0	t_i
valeur	A_0	A_i
indice	100	$I_{i/0}$

Ici, l'indice $I_{i/0} = 100 \times \dfrac{A_i}{A_0}$.

Exemple 1.8
Le CAC 40 est l'indice de la bourse de Paris. On a fixé sa valeur à 1 000 le 31 décembre 1987. Depuis il évolue en fonction du cours des actions des entreprises qui le composent.

1.4 Pourcentage de pourcentage

Propriété 1.4
Prendre t_1 % de t_2 % d'un nombre A c'est effectuer le calcul suivant :

$$\frac{t_1}{100} \times \frac{t_2}{100} \times A$$

Exemple 1.9
Dans une classe de 32 élèves, 75 % des élèves étudient l'anglais en LV1, et parmi eux, 37,5 % étudient l'italien en LV2. Le nombre d'élèves de la classe étudiant l'anglais en LV1 et l'italien en LV2 est 37,5% de 75% de 32 élèves ; soit :

$$\frac{37{,}5}{100} \times \frac{75}{100} \times 32 = 0{,}75 \times 0{,}375 \times 32 = 9 \text{ élèves}$$

1.5 Addition et comparaison de pourcentages

1.5.1 Addition de pourcentages

L'addition de deux pourcentages n'a de sens que lorsque ces pourcentages représentent deux parties sans élement commun d'un même ensemble.

Exemple 1.10
Dans une classe, 85 % des élèves ont un ordinateur et parmi eux, 15 % ont une connexion internet bas-débit, et 65 % ont une connexion internet haut-débit. Si on considère comme ensemble de référence, les élèves qui ont un ordinateur, on peut dire que 65% + 15% = 80 % des élèves ayant un ordinateur ont accès à internet.

Exemple 1.11
Au dernier contrôle de maths, 20 % des élèves ont eu plus de 16/20, et 50 % ont eu plus de 12/20. La somme de ces pourcentages n'a aucun sens car l'ensemble des élèves ayant eu plus de 16 est contenu dans l'ensemble des élèves ayant eu plus de 12.

Propriété 1.5
On note A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. L'ensemble $A \cup B$ (on lit A union B) est constitué des éléments qui appartiennent à A ou à B (ou aux deux). L'ensemble $A \cap B$ (on lit A inter B) est constitué des éléments qui appartiennent à A et à B. En notant p_A la proportion de A dans E, ..., on a :

$$p_{A\cup B} = p_A + p_B - p_{A\cap B}$$

Exemple 1.12
Dans une classe de 25 élèves (population E), 10 élèves ont eu entre 10 et 14 au contrôle de maths (population A), et 12 élèves ont eu entre 12 et 16 (population B). On sait que 15 élèves ont eu entre 10 et 16. Calculer le nombre d'élèves ayant eu entre 12 et 14.

Soit n l'effectif cherché. $A \cup B$ est l'ensemble des élèves ayant eu entre 10 et 16, et $A \cap B$ est l'ensemble des élèves ayant eu entre 12 et 14. On a :

$$p_{A\cup B} = p_A + p_B - p_{A\cap B}$$

$$\text{soit : } \frac{15}{25} = \frac{10}{25} + \frac{12}{25} - \frac{n}{25}$$

$$\text{d'où : } n = 10 + 12 - 15 = 7$$

1.5.2 Comparaison de pourcentages

Propriété 1.6

Lorsque deux pourcentages portent sur des ensembles distincts, l'ordre des pourcentages, n'est pas obligatoirement le même que celui des données absolues.

Exemple 1.13

Le loyer d'une famille A aux revenus mensuels de 3000 € est de 750 €. Le loyer d'une famille B aux revenus mensuels de 2100 € est de 630 €.

Famille	Loyer en €	loyer en % des revenus
A	750	$\frac{750}{3000} = 25$ %
B	630	$\frac{630}{2100} = 30$ %

En données absolues, c'est la famille A qui paye un loyer plus important, mais en pourcentage des revenus, c'est la famille B qui paye le plus.

> « *Parler pour ne rien dire et ne rien dire pour parler sont les deux principes majeurs et rigoureux de ceux qui feraient mieux de la fermer avant de l'ouvrir* »
> Pierre Dac

Chapitre 2

Les systèmes

2.1 Équations de droites

Propriété 2.1
Dans un repère une droite d a une équation du type :

$y = mx + p$ si la droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.

$x = c$ si la droite est parallèle à l'axe des ordonnées.

Cela signifie que si $M \in d$ alors ses coordonnées vérifient l'équation de d et réciproquement les points $M(x; y)$ vérifiant une équation du type $y = mx + p$ ou $x = c$ sont alignés sur une droite d.

Dans le premier cas, m est appelé *coefficient directeur* et p est appelé *ordonnée à l'origine* de la droite.

Exemple 2.1
Pour chacune des équations suivantes, déterminer, s'il existe, le coefficient directeur de la droite :

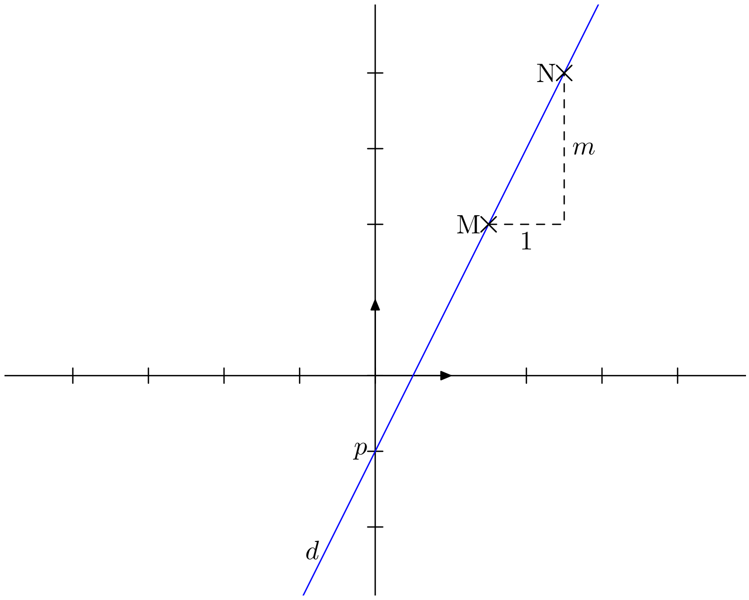
$$5x + y = -2; \qquad 2x - 3y = 1; \qquad \frac{3}{4}x + \frac{1}{3}y - 4 = 0; \qquad 2x + 3y = 1 - 5x + 3y$$

Remarque 2.1
Une équation de droite peut toujours s'écrire sous la forme $ux + vy + w = 0$, avec $(u; v) \neq (0; 0)$.

Propriété 2.2 (Rappel)
Dire que deux droites d'équations respectives $y = m_1x + p_1$ et $y = m_2x + p_2$ sont parallèles équivaut à dire que $m_1 = m_2$.

Propriété 2.3
Dire que deux droites d'équations respectives $u_1x + v_1y + w_1 = 0$ et $u_2x + v_2x + w_2$ sont parallèles équivaut à dire que $u_1v_2 = u_2v_1$.

Interprétation graphique de m et p :
p est l'ordonnée du point d'intersection de d avec l'axe des ordonnées (yy').
m est la différence des ordonnées de deux points M et N de d tels que $x_N = x_M + 1$.



2.2 Système de deux équations à deux inconnues

2.2.1 Définition

Définition 2.1
Un système de deux équations à deux inconnues x et y est un couple d'équations d'inconnues x et y. Une solution du système est un couple de nombres $(x_0; y_0)$ vérifiant les deux équations.

2.2.2 Résolution graphique. Nombre de solutions

Exemple 2.2
On considère le système $S_1 : \begin{cases} 2x + y = 1 \\ -2x + y = -5 \end{cases}$.

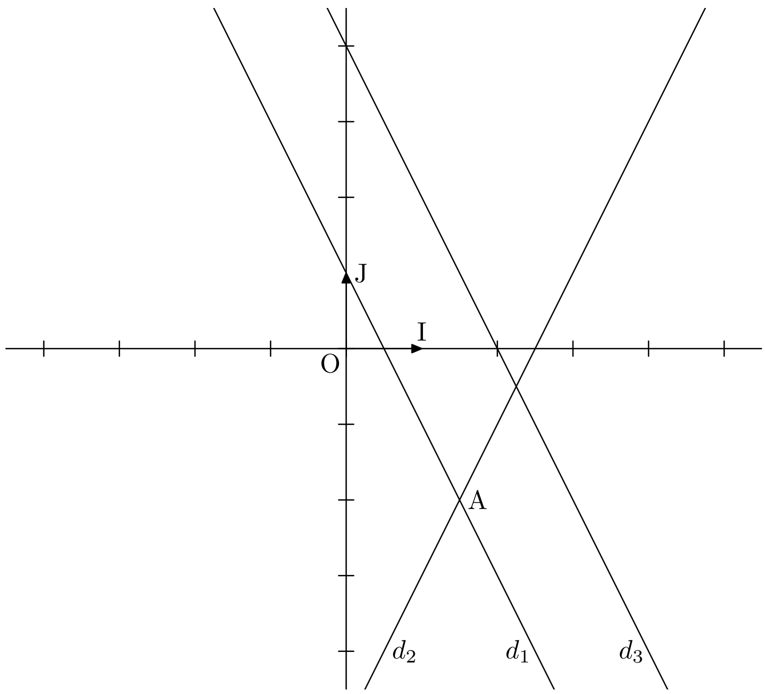
1. Tracer les droites d_1 et d_2 d'équations respectives $2x + y = 1$ et $-2x + y = -5$ dans un repère. Nommer A leur point d'intersection et lire les coordonnées de A.
2. Résoudre le système par le calcul.

Exemple 2.3
On considère le système $S_2 : \begin{cases} 2x + y = 1 \\ -3x - \frac{3}{2}y = -6 \end{cases}$. On note d_3 la droite d'équation $-3x - \frac{3}{2}y = -6$

1. Tracer d_3 dans le même repère que l'exemple 2.2. Que peut-on dire de d_1 et d_3 ?
2. Que peut-on en déduire pour le système S_2 ?

Exemple 2.4
On considère le système $S_3 : \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2} \end{cases}$.

1. Écrire chacune des deux équations de S_3 sous la forme $y = mx + p$.
2. Que peut-on en déduire pour le nombre de solutions du système ? Donner plusieurs exemples.



2.3 Méthodes de résolution

2.3.1 Par substitution

Exemple 2.5

Résoudre dans $\mathbf{R}$ le système suivant : $\begin{cases} 4x + y = 7 & (L_1) \\ 3x - 2y = 8 & (L_2) \end{cases}$

Il s'agit d'exprimer une inconnue en fonction de l'autre à l'aide d'une des deux équations et de la remplacer par l'expression obtenue dans l'autre équation :

Avec L_1, on obtient $y = 7 - 4x$. En remplaçant dans L_2, on obtient : $3x - 2(7 - 4x) = 8$. En résolvant cette dernière équation, on obtient $11x = 22$ soit $x = 2$. On calcule alors y : $y = 7 - 4 \times 2 = -1$.

Donc, si le système a une solution elle est égale à $(2; -1)$. Il reste à vérifier que cette solution convient : $4x + y = 4 \times 2 + (-1) = 7$ et $3x - 2y = 3 \times 2 - 2 \times (-1) = 8$.

Donc $\mathscr{S} = \{(2; -1)\}$.

Remarque 2.2

Cette méthode n'est à utiliser[1] que lorsqu'une inconnue s'exprime *très facilement* en fonction de l'autre.

2.3.2 Par combinaisons linéaires

Exemple 2.6

Résoudre par combinaisons linéaires le système suivant : $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 5x + 4y = -3 \end{cases}$

On multiplie la première équation par 5, puis la deuxième par 2 et on soustrait les deux équations membres à membres. Ainsi, si un couple $(x_0; y_0)$ est solution du système, alors y_0 sera solution de cette équation obtenue par soustraction :

[1] et encore ...

$$(10x-15y)-(10x+8y)=40-(-6) \text{ soit : } -23y=46$$

On obtient $y=-2$ et on remplace dans une des deux équations : $2x-3\times(-2)=8$ donc $x=\frac{2}{2}=1$.

Ainsi, si une solution existe, c'est le couple $(1;-2)$. On vérifie : $\begin{cases} 2\times 1-3\times(-2)=2+6=8 \\ 5\times 1+4\times(-2)=5-8=-3 \end{cases}$

Donc la solution du système est $\mathscr{S}=\{(1;-2)\}$.

2.3.3 Méthode de Gauss

Le but de cette méthode est de trouver un système triangulaire *équivalent* au système de départ (c'est à dire ayant le même ensemble solution). Pour cela on va effectuer des combinaisons linéaires sur les lignes du système.

Exemple 2.7

Résoudre le système (S) : $\begin{cases} 3x+2y-5z=-25 & (L_1) \\ x+6y-z=-13 & (L_2) \\ 2x-4y+2z=18 & (L_3) \end{cases}$

$(S)\Longleftrightarrow \begin{cases} 3x+2y-5z=-25 & (L_1) \\ -16y-2z=14 & (L_1-3L_2\to L_2') \\ 16y-16z=-104 & (2L_1-3L_3\to L_3') \end{cases}$

$(S)\Longleftrightarrow \begin{cases} 3x+2y-5z=-25 & (L_1) \\ -16y-2z=14 & (L_2') \\ -18z=-90 & (L_2'+L_3'\to L_3'') \end{cases}$

$(S)\Longleftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-25-2\times\frac{3}{2}+5\times 5}{3}=1 \\ y=\frac{14+2\times 5}{-16}=-\frac{3}{2} \\ z=\frac{-90}{-18}=5 \end{cases}$

La solution du système est $\mathscr{S}=(1;-\frac{3}{2};5)$. (Contrairement aux deux méthodes précédentes, la vérification n'est pas nécessaire puisqu'on a procédé tout au long de la résolution par équivalences.)

2.4 Système d'inéquations

2.4.1 Inéquation à deux inconnues

Propriété 2.4

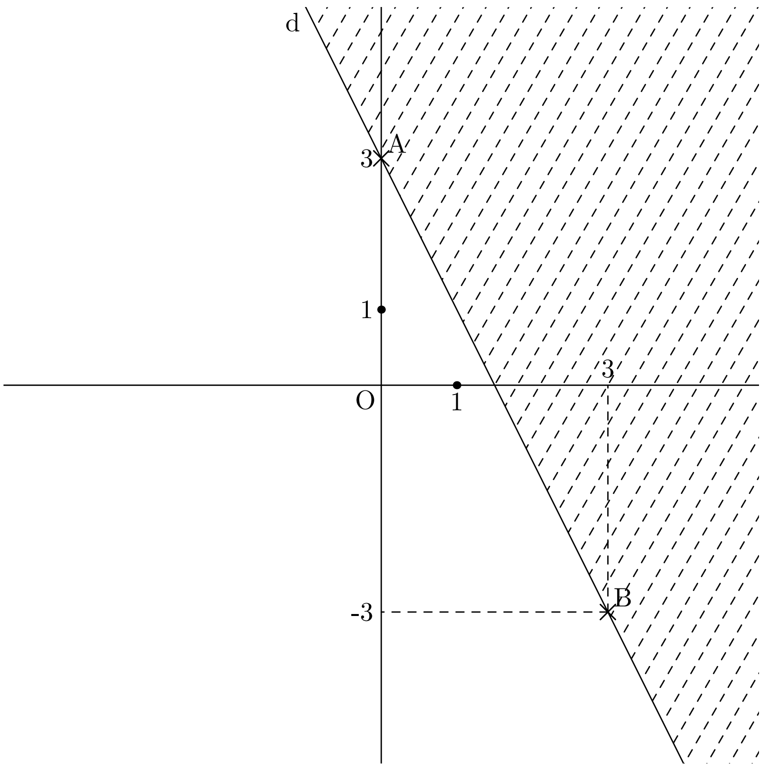
Les solutions d'une inéquation à deux inconnues x et y du type $ux+vy+w<0$ sont les coordonnées des points appartenant à l'un des deux demi-plans délimités par la droite d'équation $ux+vy+w=0$.

Exemple 2.8

On considère l'inéquation à deux inconnues x et y suivante : $2x+y-3\leq 0$. On trace la droite d d'équation $2x+y-3=0$: d passe par les points $A(0,3)$ et $B(3;-3)$.

Puisque graphiquement, la solution correspond à un demi-plan délimité par d, il suffit de vérifier si les coordonnées de O, l'origine du repère, vérifient l'inéquation. Dans ce cas O ferait partie du demi-plan solution ; dans le cas contraire, le demi-plan solution serait celui ne contenant pas O.

Pour $x = y = 0$, on a : $2x + y - 3 = -3$ et $-3 \leq 0$ donc le demi-plan solution est le demi-plan contenant le point O : on hachure l'autre demi-plan. De plus l'inégalité est *large* ($\leq$ ou $\geq$) donc la droite d fait partie de la solution. Dans le cas d'une inégalité *stricte* ($<$ ou $>$) la droite ne fait pas partie de la solution.



2.4.2 Système d'inéquations

Pour résoudre un système d'inéquations à deux inconnues, on trace les droites correspondant à chaque inéquation, pour chacune d'elles, on hachure le demi-plan qui ne convient pas. La solution du système correspond donc graphiquement aux points du plan qui ne sont pas hachurés du tout.

Exemple 2.9

On considère le système S : $\begin{cases} 2x + y - 3 \leq 0 \\ x - y + 2 \geq 0 \\ x > -3 \\ y > -4 \end{cases}$

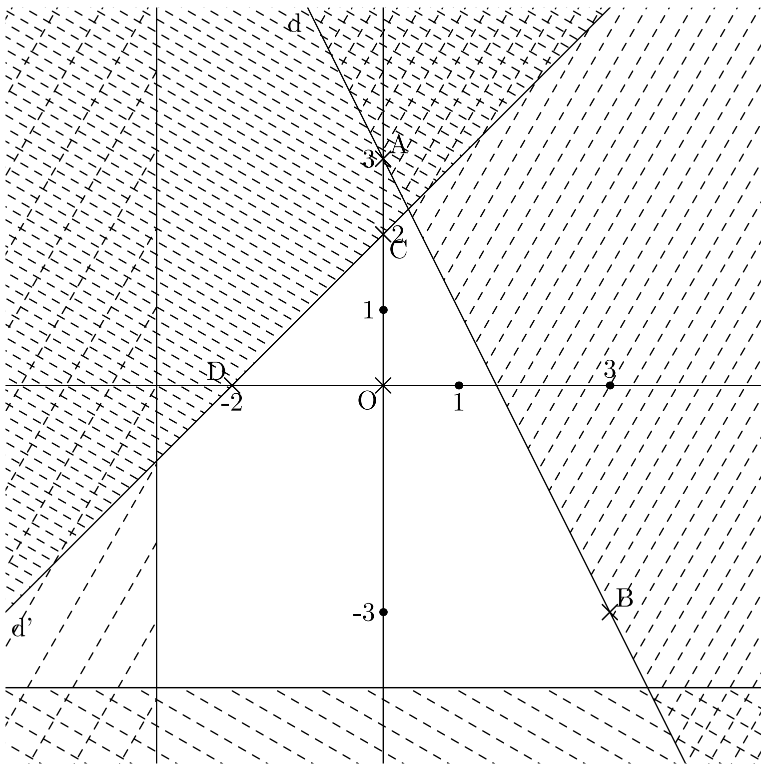
La première inéquation a déjà été résolue dans l'exemple 2.8 : il s'agit du demi plan contenant O et délimité par d d'équation $2x + y - 3 = 0$.

On trace donc d' d'équation $x - y + 2 = 0$: elle passe par $C(0;2)$ et par $D(-2;0)$. On teste si les coordonnées de O vérifient l'inéquation correspondante : $x - y + 2 = 0 - 0 + 2 = 2 \geq 0$. Donc on hachure le demi-plan délimité par d' qui ne contient pas O.

On trace ensuite Δ d'équation $x = -3$ et on hachure le demi-plan situé à gauche de Δ.

On trace enfin Δ' d'équation $y = -4$ et on hachure le demi-plan inférieur à Δ'.

La solution de notre système correspond donc à l'intérieur du quadrilatère resté non hachuré, les frontières d et d' étant incluses, et les frontières Δ et Δ' étant exclues.



2.5 Programmation linéaire

Exemple 2.10
Une entreprise fabrique deux types de produits notés A et B en utilisant la même matière première et deux machines : M_1 et M_2.
Pour fabriquer le produit A, on a besoin de 6 kg de matière première et il faut utiliser M_1 pendant deux heures et M_2 pendant deux heures.
Pour fabriquer le produit B, on a besoin de 2 kg de matière première et il faut utiliser M_1 pendant deux heures et M_2 pendant quatre heures.
Les machines M_1 et M_2 ne sont respectivement disponibles que pendant 120 et 180 heures. La matière première à utiliser est limitée à 300 kg.
Le bénéfice b réalisé est de 400 € pour le produit A et de 200 € pour le produit B.
On désigne par x et y les nombres respectifs de produits A et B fabriqués.

1. Montrer que le système vérifié par x et y est le suivant : $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + y \leq 150 \\ x + y \leq 60 \\ x + 2y \leq 90 \end{cases}$
2. Représenter graphiquement le polygone des contraintes.
3. Calculer le bénéfice maximal ainsi que les valeurs de x et y pour l'obtenir.

1. x et y sont des nombres de produits fabriqués, il sont doncs positifs ou nuls.

   La masse de matière première est inférieure ou égale à 300 kg donc $6x + 2y \leq 300$; soit, en divisant les deux membres par 2 $(2 > 0)$, on obtient : $3x + y \leq 150$.

   La machine M_1 ne peut fonctionner que 120 heures au total donc : $2x + 2y \leq 120$; soit en divisant par 2 : $x + y \leq 60$.

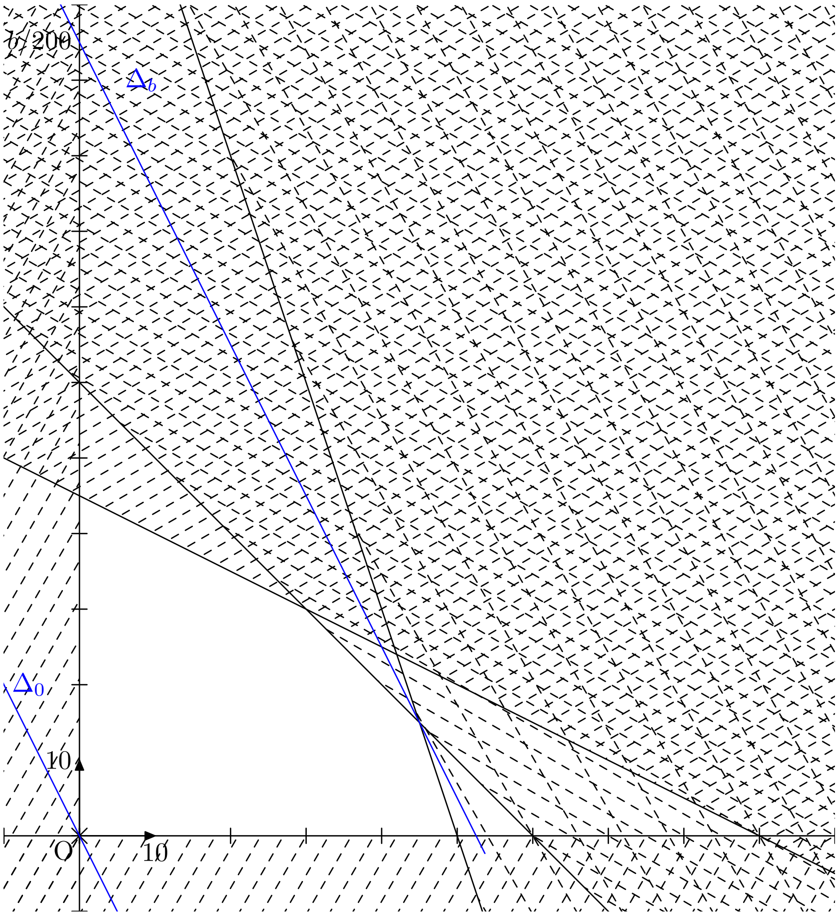
La machine M_2 ne peut fonctionner que 180 heures au total donc : $2x + 4y \leq 180$; soit en divisant par 2 : $x + 2y \leq 90$.

D'où le système annoncé.

2. On trace les droites d'équations respectives :

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad 3x + y = 150, \qquad x + y = 60, \qquad x + 2y = 90$$

On hachure ensuite les demi-plans qui ne sont pas solutions des inéquations correspondantes, et on obtient le graphique ci-dessous :



La solution du système est le polygone non hachuré, frontières comprises.

3. Le bénéfice est $b = 400x + 200y$. En exprimant y, on obtient : $y = -2x + \frac{b}{200}$. Traçons la droite Δ_0 correspondant aux couples $(x; y)$ pour lesquels le bénéfice est de 0 €. Son équation réduite est $y = -2x$.

On va chercher ensuite la droite Δ_b parallèle à Δ_0 qui a l'ordonnée à l'origine la plus grande possible tout en ayant un point à coordonnées entières en commun avec le domaine solution du système. On obtient la droite d'équation $y = -2x + 105$; Soit un bénéfice de $105 \times 200 = 21000$ €. Ce bénéfice est obtenu pour le couple $(45; 15)$ soit une production de 45 produits A et 15 produits B.

« *Ce que l'on conçoit bien s'énonce clairement et les mots pour le dire arrivent aisément.* »
Nicolas Boileau

Chapitre 3

Généralités sur les fonctions numériques

3.1 Généralités

Définition 3.1
Une fonction numérique permet d'associer à chaque nombre x d'un ensemble D un autre nombre que l'on note $f(x)$. On note :

$$f: \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Le nombre $f(x)$ est appelé *image* de x par la fonction f. L'image d'un nombre par une fonction numérique est unique.
x est appelé *antécédent* de $f(x)$ par f. Un nombre peut avoir plusieurs antécédents.

Exemple 3.1
On définit la fonction f sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 - 5$. On a :

$$f: \begin{array}{ccl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - 5 \\ 1 & \longmapsto & 1^2 - 5 = -4 \\ -5 & \longmapsto & (-5)^2 - 5 = 20 \\ \frac{5}{2} & \longmapsto & \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 = \frac{25}{4} - 5 = \frac{5}{4} \\ \pi & \longmapsto & \pi^2 - 5 \approx 4{,}87 \end{array}$$

Dans cet exemple 20 a deux antécédents car l'équation $x^2 - 5 = 20$ a deux solutions : $x = 5$ et $x = -5$.
Par contre -6 n'a pas d'antécédent car $x^2 - 5 = -6$ n'a pas de solution. (car $x^2 = -1$ n'en a pas.)

Définition 3.2
Soit f une fonction numérique. On appelle *ensemble de définition* de f et on note généralement $\mathscr{D}_f$ l'ensemble des nombres pour lesquels $f(x)$ existe.

Exemple 3.2
On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3x+2}{x-1}$. Le nombre $f(x)$ existe pour tout $x \neq 1$.
En effet si $x = 1$, pour calculer $f(x)$, il faudrait diviser par 0 ce qui est impossible. Donc $\mathscr{D}_f = \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

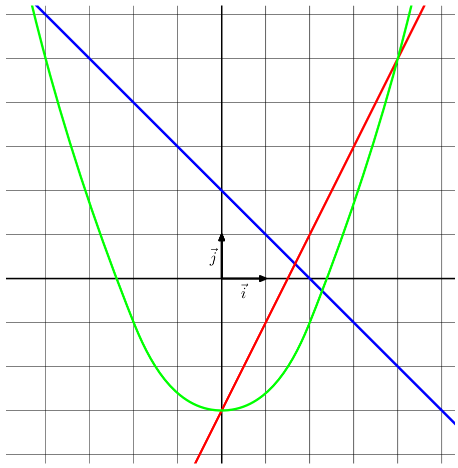
Définition 3.3
Soit f une fonction numérique. Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on pose $y = f(x)$. À chaque couple $(x; y)$ on peut donc associer un point dans un repère. L'ensemble de ces points est appelé *courbe représentative* de la fonction f. On la note généralement $\mathscr{C}_f$.

Exemple 3.3
On a tracé ci-contre les représentations graphiques de trois fonctions f, g, et h. Associer à chaque fonction sa courbe représentative sachant que pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$f(x) = 2x - 3$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$$

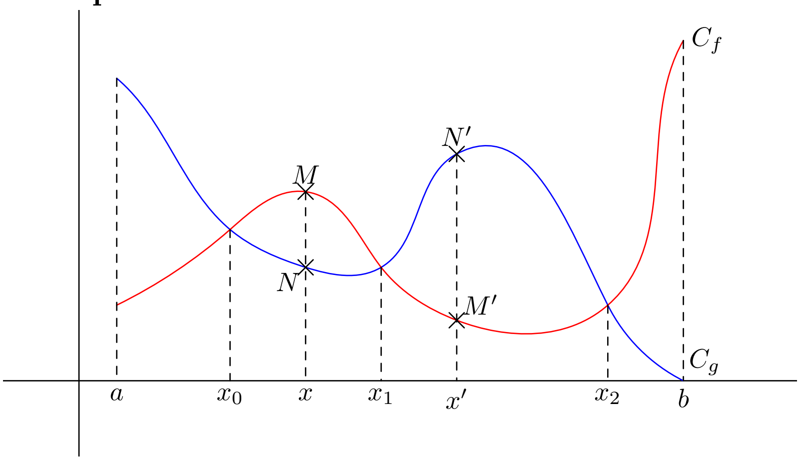
$$h(x) = -x + 2$$



3.2 Résolutions graphiques d'équations et d'inéquations

Soit f et g deux fonctions numériques définies sur un intervalle $[a; b]$.
- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ c'est trouver les *abscisses* des points d'intersections de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
- Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$, c'est trouver les *abscisses* des points $M(x; f(x))$ et $N(x; g(x))$ tels que M est au dessus de N.

Exemple 3.4



Sur la figure ci-dessus, on a tracé les représentations graphiques de deux fonctions f et g définies sur $[a; b]$.
L'équation $f(x) = g(x)$ admet trois solutions : $\mathscr{S} = \{x_0; x_1; x_2\}$.
La solution de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ est $S = [x_0; x_1] \cup [x_2; b]$.
Par exemple, pour $x \in [x_0; x_1]$, on a bien $M(x; f(x))$ qui est au dessus de $N(x; g(x))$. Par contre pour $x' \in [x_1; x_2]$, on a $M(x'; f(x'))$ qui est en dessous de $N(x'; g(x'))$.

3.3 Fonctions usuelles

3.3.1 Fonctions linéaires et affines

Définition 3.4
Soit a et b deux réels.
Une fonction f définie par $f(x) = ax$ est appelée fonction *linéaire*.
Une fonction f définie par $f(x) = ax + b$ est appelée fonction *affine*.

Remarque 3.1
Une fonction linéaire est aussi affine (en prenant $b = 0$). La réciproque est fausse.

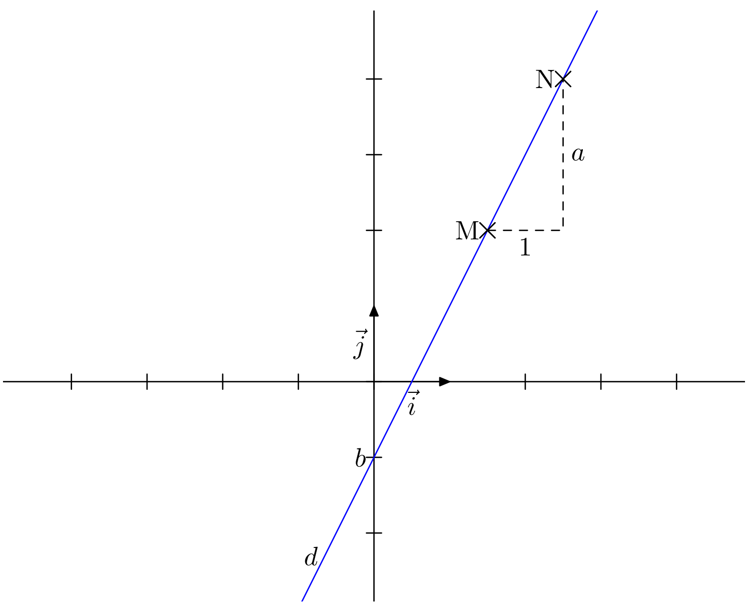
Propriété 3.1
Dire que f est une fonction linéaire, équivaut à dire que pour tous $x_1 \in \mathbf{R}, x_2 \in \mathbf{R}$, on a :

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

Propriété 3.2
- La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère.
- La représentation graphique d'une fonction affine est une droite (ne passant pas nécessairement par l'origine du repère).

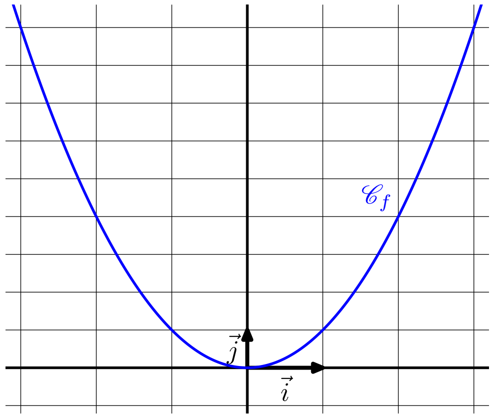
Vocabulaire :
Soit f une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$, et d sa représentation graphique.
- le réel a est appelé *coefficient directeur* de la droite d.
- le réel b est appelé *ordonnée à l'origine* de la droite d.

Interprétation graphique de a et b :
b est l'ordonnée du point d'intersection de d avec l'axe des ordonnées (yy').
a est la différence des ordonnées de deux points M et N de d tels que $x_N = x_M + 1$.
Plus généralement, si A et B sont deux points de d, $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.



3.3.2 La fonction carrée

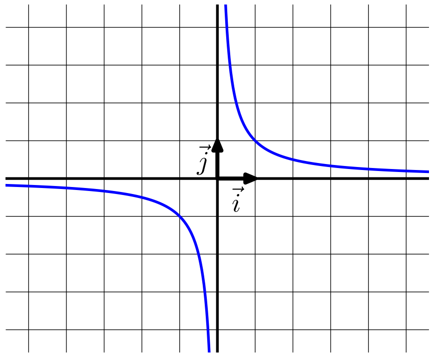
Définition 3.5
La fonction carrée est la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2$.
Sa représentation graphique dans un repère orthogonal est une parabole de sommet l'origine du repère.



Remarque 3.2
On a $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ donc l'axe des ordonnées est axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction carrée.

3.3.3 La fonction inverse

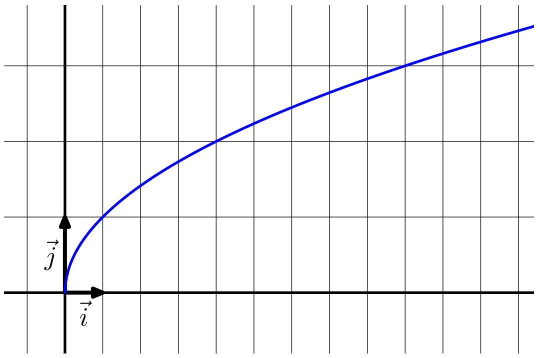
Définition 3.6
La fonction inverse est la fonction f définie sur $\mathbf{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.
Sa représentation graphique dans un repère orthogonal est une hyperbole d'asymptotes les axes du repère.



Remarque 3.3
On a $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$ donc l'origine du repère est centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction inverse.

3.3.4 La fonction racine carrée

Définition 3.7
La fonction racine carrée est la fonction f définie sur $\mathbf{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
Sa représentation graphique dans un repère orthogonal est une demi-parabole de sommet l'origine du repère et d'axe horizontal (elle est tournée vars la droite).



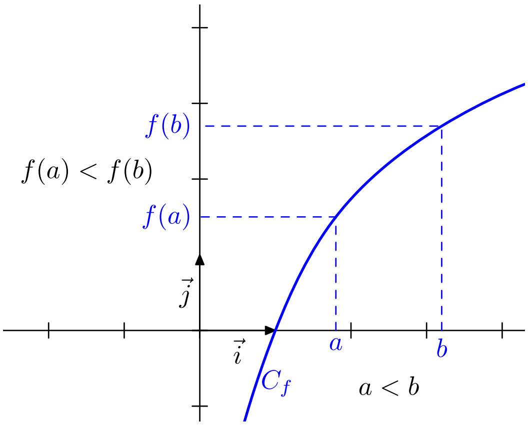
3.4 Variations d'une fonction

Définition 3.8
On dit qu'une fonction f est *strictement croissante* sur un intervalle I si pour tout a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) < f(b)$.
On dit qu'une fonction f est *strictement décroissante* sur un intervalle I si pour tout a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) > f(b)$.

Remarque 3.4
Graphiquement, lorsqu'une fonction est croissante, sa courbe « monte » lorsqu'on se déplace de

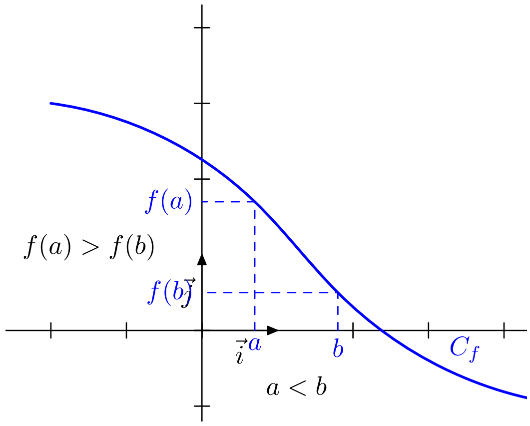
la gauche vers la droite. Lorsqu'une fonction est décroissante, sa courbe « descend » lorsqu'on se déplace de la gauche vers la droite.

Fonction strictement croissante :



Pour tous les réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) < f(b)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ « monte » lorsqu'on se déplace vers la droite.

Fonction strictement décroissante :



Pour tous les réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) > f(b)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ « descend » lorsqu'on se déplace vers la droite.

3.4.1 Fonction affine

Propriété 3.3
Une fonction affine est :
- croissante si son coefficient directeur est positif,
- décroissante si son coefficient directeur est négatif.

Exemple 3.5
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 3x + 2$.
Soit a et b deux réels tels que $a < b$. on a donc $3a < 3b$ car $3 > 0$ et donc $3a + 2 < 3y + 2$. Ainsi on obtient que $f(a) < f(b)$. Donc f est croissante sur $\mathbf{R}$.

3.4.2 Fonction carrée

Propriété 3.4
La fonction carrée $(x \mapsto x^2)$ est décroissante sur $\mathbf{R}^-$ et croissante sur $\mathbf{R}^+$.

Démonstration :
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2$.
Soit a et b deux réels tels que $0 \leq a < b$. En multipliant les deux membres de la deuxième inégalité par a on obtient : $a^2 \leq ab$ car $a \geq 0$. De même, en les multipliant par b on obtient : $ab < b^2$ car $b > 0$. Donc finalement, on a : $a^2 \leq ab < b^2$. Donc $f(a) < f(b)$. Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbf{R}^+$.
Soit a et b deux réels tels que $a < b \leq 0$. En multipliant les deux membres de la première inégalité par a on obtient : $a^2 > ab$ car $a < 0$. De même, en les multipliant par b on obtient : $ab \geq b^2$ car $b \leq 0$. Donc finalement, on a : $a^2 > ab \geq b^2$. Donc $f(a) > f(b)$. Ainsi f est strictement décroissante sur $\mathbf{R}^-$.

3.4.3 Fonction inverse

Propriété 3.5
La fonction inverse ($x \mapsto \frac{1}{x}$) est décroissante sur $\mathbf{R}_-^*$ et sur $\mathbf{R}_+^*$.

Démonstration :
Pour $x \neq 0$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Étudions les variations de f sur $]0;+\infty[$:
Soit $0 < a < b$. $\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a} = \dfrac{a-b}{ab}$. Or $ab > 0$ et $a < b$ donc $a - b < 0$. Donc $\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a} < 0$ donc $f(b) < f(a)$. Ainsi f est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$.
On démontrerait de même que f est décroissante sur $\mathbf{R}_-^*$.

Remarque 3.5 (Attention !)
La fonction inverse n'est pas décroissante sur $\mathbf{R}^*$.
En effet : $-2 < 2$ et $f(-2) < f(2)$.

3.4.4 Fonction racine carrée

Propriété 3.6
La fonction racine carrée ($x \mapsto \sqrt{x}$) est croissante sur $\mathbf{R}_+$.

Démonstration :
Soit a et b deux réels positifs tels que $0 \leq a < b$ et f la fonction racine carrée.
Cherchons le signe de $f(b) - f(a)$:

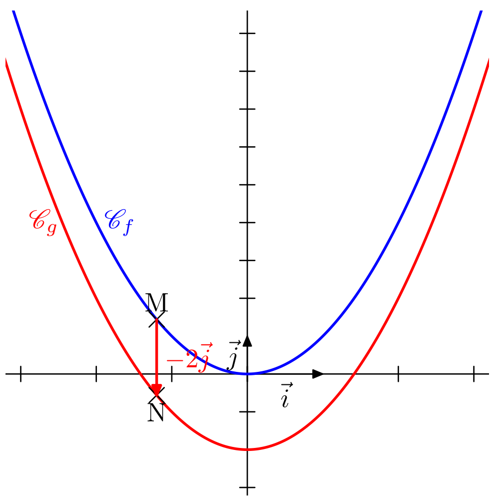
$$f(b) - f(a) = \sqrt{b} - \sqrt{a} = (\sqrt{b} - \sqrt{a})\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{b})^2 - (\sqrt{a})^2}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} = \frac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$$

Or $a < b$ donc $b - a > 0$ et de plus, $\sqrt{b} + \sqrt{a} > 0$ donc $f(b) - f(a) > 0$ et donc f est croissante sur $\mathbf{R}_+$.

3.5 Fonctions associées

3.5.1 Fonction $x \mapsto f(x) + \beta$

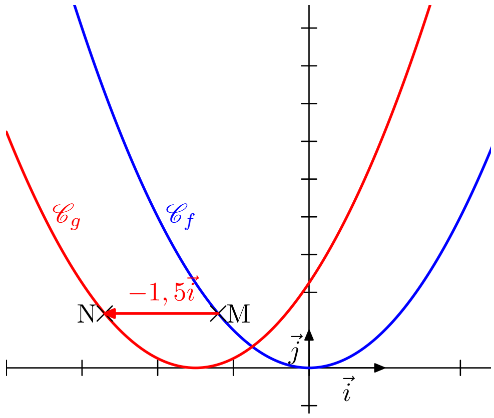
Propriété 3.7
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit β un réel quelconque. On considère la fonction g définie sur I par $g(x) = f(x) + \beta$.
La courbe représentative de la fonction g est l'image de la courbe représentative de la fonction f par la translation de vecteur $\beta\vec{j}$.



Exemple 3.6
Sur la figure ci-contre on a tracé la fonction f définie par $f(x) = x^2$ et la fonction g définie par $g(x) = f(x) - 2$. On a $\mathscr{C}_g$ qui est l'image de $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $-2\vec{j}$.

3.5.2 Fonction $x \mapsto f(x+\alpha)$

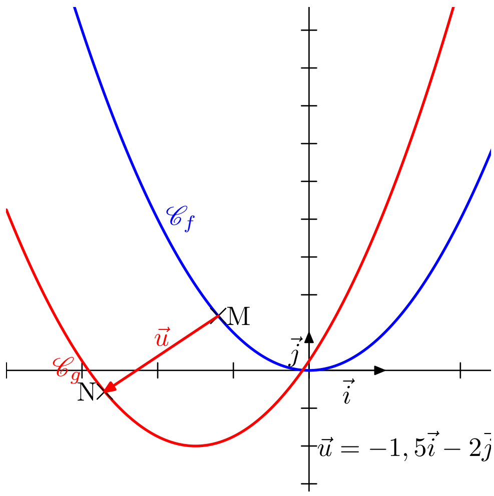
Propriété 3.8
Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]a\,;\,b[$. Soit α un réel quelconque. On considère la fonction g définie sur $]a-\alpha\,;\,b-\alpha[$ par $g(x) = f(x+\alpha)$.
La courbe représentative de la fonction g est l'image de la courbe représentative de la fonction f par la translation de vecteur $-\alpha\vec{\imath}$.



Exemple 3.7
Sur la figure ci-contre on a tracé la fonction f définie par $f(x) = x^2$ et la fonction g définie par $g(x) = f(x+1{,}5)$. On a $\mathscr{C}_g$ qui est l'image de $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $-1{,}5\vec{\imath}$.

3.5.3 Fonction $x \mapsto f(x+\alpha)+\beta$

Propriété 3.9
Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]a\,;\,b[$. Soit α et β deux réels quelconques. On considère la fonction g définie sur $]a-\alpha\,;\,b-\alpha[$ par $g(x) = f(x+\alpha)+\beta$.
La courbe représentative de la fonction g est l'image de la courbe représentative de la fonction f par la translation de vecteur $-\alpha\vec{\imath}+\beta\vec{\jmath}$.



Exemple 3.8
Sur la figure ci-contre on a tracé la fonction f définie par $f(x) = x^2$ et la fonction g définie par $g(x) = f(x+1{,}5)-2$. On a $\mathscr{C}_g$ qui est l'image de $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $-1{,}5\vec{\imath}-2\vec{\jmath}$.

3.5.4 Variations des fonctions associées

Propriété 3.10
Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]a\,;\,b[$ et strictement monotone sur I. Soit α et β deux réels quelconques.
- La fonction g définie sur I par $g(x) = f(x)+\beta$ a les mêmes variations que f sur I.
- La fonction h définie sur $I' =]a-\alpha\,;\,b-\alpha[$ par $h(x) = f(x+\alpha)$ a les mêmes variations sur I' que f sur I (mais « décalées » de $-\alpha$ unités).

Exemple 3.9
Soit f une fonction définie sur $[-5\,;\,5]$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	-5	-2	3	5
f	4 ↘	0 ↗	2 ↘	-3

Soit g, h et p les fonctions définies par :

$$g(x) = f(x) - 3; \qquad h(x) = f(x+2); \qquad p(x) = f(x-3) + 4$$

La fonction g est définie sur $[-5\,;\,5]$ et son tableau de variation est :

x	-5		-2		3		5
f	1	↘	-3	↗	-1	↘	-6

Pour que $h(x)$ existe il faut que $f(x+2)$ existe soit $-5 \leq x+2 \leq 5$ donc $-7 \leq x \leq 3$. Ainsi $\mathscr{D}_h = [-7\,;\,3]$.
De même, on obtient facilement que $\mathscr{D}_p = [-2\,;\,8]$. Les tableaux de variations de h et p sont alors :

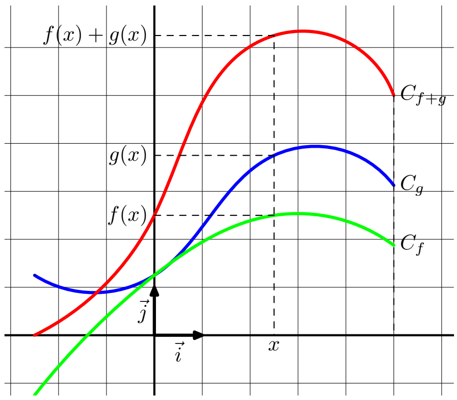
x	-7		-4		1		3
f	4	↘	0	↗	2	↘	-3

x	-2		1		6		8
f	8	↘	4	↗	6	↘	1

3.6 Opérations sur les fonctions

3.6.1 Somme de fonctions

Définition 3.9
Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I. On dit que la fonction h est la *somme* des fonctions f et g, si pour tout $x \in I$, $h(x) = f(x) + g(x)$.

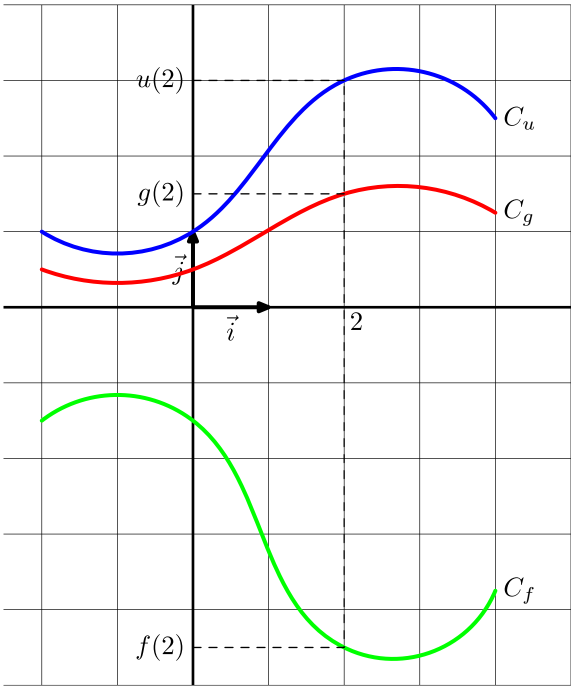


Propriété 3.11
Si f et g sont deux fonctions strictement croissantes (resp. décroissantes) sur un intervalle I, alors la fonction $h = f + g$ est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.

3.6.2 Produit d'une fonction par un réel

Définition 3.10
Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et k un réel. On dit que la fonction g est le produit de f par k si pour tout $x \in I$, $g(x) = k \times f(x)$.

Exemple 3.10
Sur le graphique ci-dessous, la fonction f définie sur $I = [-2; 4]$ est le produit de la fonction u par $-1{,}5$, et la fonction g définie sur $I = [-2; 4]$ est le produit de la fonction u par $\frac{1}{2}$: pour tout $x \in I$, on a : $f(x) = -1{,}5u(x)$ et $g(x) = \frac{1}{2}u(x)$.



Propriété 3.12
Si $k > 0$, les fonctions f et kf ont le même sens de variation.
Si $k < 0$, les fonctions f et kf ont des sens de variation contraires.

3.6.3 Fonction composée

Définition 3.11
Soit g une fonction, et $\mathscr{D}_g$ son ensemble de définition. Soit u une fonction définie sur I telle que pour tout $x \in I, u(x) \in \mathscr{D}_g$.
La fonction f *composée* de u suivie de g définie sur I est la fonction qui à tout x de I associe le nombre $f(x) = g\left(u(x)\right)$.
On la note $f = g \circ u$. On dit aussi que f est la composée de g par u.

$$\begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{u} & \mathscr{D}_g & \xrightarrow{g} & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & u(x) & \longmapsto & g(u(x)) \\ & \multicolumn{3}{c}{\xrightarrow[f]{\hspace{6em}}} & \end{array}$$

Exemple 3.11
Soit u la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $u(x) = x^2+3$, et g la fonction définie sur $\mathbf{R}^+$ par $g(x) = \sqrt{x}$.
Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $u(x) > 0$, on peut donc calculer $g\left(u(x)\right)$.
La fonction f définie par $f(x) = g\left(u(x)\right)$, est la fonction *composée* u suivie de g. C'est à dire $f(x) = \sqrt{x^2+3}$.

Remarque 3.6 (Attention)
L'ordre des fonctions a un sens : dans l'exemple précédent, on appelle h la fonction composée g suivie de u. Pour $x \geq 0$, on a : $h(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2 + 3 = x + 3$. Et pour $x \geq 0$, $h(x) \neq f(x)$.

Exemple 3.12
Soit u et g les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par $u(x) = 2x + 3$ et $g(x) = x^2$. On note f et h les fonctions définies par : $f = g \circ u$ et $h = u \circ g$. On a :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{R} & \xrightarrow{u} & \mathbf{R} & \xrightarrow{g} & \mathbf{R} \\
x & \longmapsto & u(x) & \longmapsto & g(u(x)) \\
2 & \longmapsto & 7 & \longmapsto & 49 \\
0 & \longmapsto & 3 & \longmapsto & 9 \\
x & \longmapsto & 2x+3 & \longmapsto & (2x+3)^2 \\
 & \multicolumn{3}{c}{\xrightarrow[f]{\hspace{6em}}} &
\end{array}$$

Finalement f est définie par $f(x) = (2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$.
De même, on a :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{R} & \xrightarrow{g} & \mathbf{R} & \xrightarrow{u} & \mathbf{R} \\
x & \longmapsto & g(x) & \longmapsto & u(g(x)) \\
2 & \longmapsto & 4 & \longmapsto & 11 \\
0 & \longmapsto & 0 & \longmapsto & 3 \\
x & \longmapsto & x^2 & \longmapsto & 2x^2+3 \\
 & \multicolumn{3}{c}{\xrightarrow[h]{\hspace{6em}}} &
\end{array}$$

Finalement, g est définie par $g(x) = 2x^2 + 3$.

Exemple 3.13
Tracer la représentation graphique de la fonction f qui est la composée de la fonction g suivie de h définies par $g(x) = x + 2$, et $h(x) = |x|$.

« *Si tous ceux qui croient avoir raison n'avaient pas tort, la vérité ne serait pas loin* »
Pierre Dac

Chapitre 4

Le second degré

4.1 Équation du second degré

4.1.1 Définitions

Définition 4.1
Une équation du second degré à une inconnue x est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$, avec a, b et c trois réels et $a \neq 0$.

Exemple 4.1
L'équation $(3x + 2)^2 = 5x$ est une équation du second degré.
En effet, elle peut s'écrire $9x^2 + 12x + 4 = 5x$; soit $9x^2 + 7x + 4 = 0$.
L'équation $(3x - 2)^2 - 9x^2 + 1 = 0$ n'est pas une équation du second degré car elle s'écrit $9x^2 - 12x + 4 - 9x^2 + 1 = 0$; soit $-12x + 5 = 0$.

Définition 4.2
On appelle *discriminant* de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ le nombre réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

Exemple 4.2
Le discriminant de l'équation $-2x^2 - 5x + 3 = 0$ est $\Delta = (-5)^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 25 + 24 = 49$.

4.1.2 Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

L'existence de solutions à l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dépend du signe de Δ :

Théorème 4.1
Soit $ax^2 + bx + c = 0$ un équation du second degré et Δ son discriminant.

si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution.

si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes : $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{array} \right.$

si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.

Remarque 4.1
Lorsque a et c sont de signes contraires (et non nuls), le produit $-ac$ est strictement positif donc $b^2 - 4ac > 0$, et donc l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes.

Exemple 4.3
Résoudre l'équation $x^2 - 3x = -4$.

On écrit cette équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ et on obtient $x^2 - 3x + 4 = 0$.

On calcule $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9 - 16 = -7 < 0$. Donc cette équation n'a pas de solution : $\mathscr{S} = \emptyset$.

Exemple 4.4
Résoudre l'équation $\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{18} = 0$

On calcule $\Delta = \left(-\dfrac{5}{3}\right)^2 - 4 \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{25}{18} = \dfrac{25}{9} - \dfrac{25}{9} = 0$.

L'équation a donc une unique solution $x_0 = -\dfrac{-\frac{5}{3}}{2 \times \frac{1}{2}} = \frac{5}{3}$.

Exemple 4.5
Résoudre l'équation $2x^2 + \frac{11}{2}x - \frac{3}{2} = 0$.

On calcule $\Delta = \left(\dfrac{11}{2}\right)^2 - 4 \times 2 \times \left(-\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{121}{4} + 12 = \dfrac{169}{4} > 0$. Donc l'équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-\frac{11}{2} - \sqrt{\frac{169}{4}}}{2 \times 2} = \frac{-\frac{11}{2} - \frac{13}{2}}{4} = -\frac{24}{8} = -3.$$

$$x_2 = \frac{-\frac{11}{2} + \sqrt{\frac{169}{4}}}{2 \times 2} = \frac{-\frac{11}{2} + \frac{13}{2}}{4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

$\mathscr{S} = \left\{-3\,;\, \frac{1}{4}\right\}$.

4.2 Interprétation graphique

4.2.1 Résolution graphique d'une équation du second degré

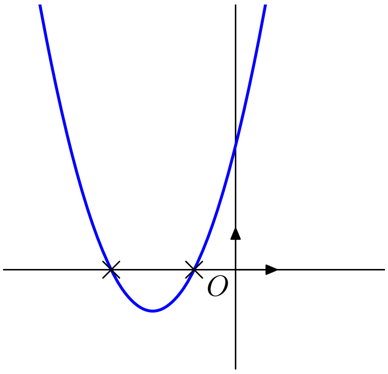
Soit $(E) : ax^2 + bx + c = 0$ une équation du second degré ($a \neq 0$).

On peut associer à (E) une fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$; trinôme du second degré. Les solutions de (E) sont alors les réels x tels que $f(x) = 0$. Ces nombres sont appelés les *racines* du trinôme du second degré f.

La représentation graphique de f dans un repère orthogonal est une parabole $\mathscr{P}_f$. Graphiquement, les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les *abscisses* des points d'intersection de $\mathscr{P}_f$ et de la droite d'équation $y = 0$ (axe des abscisses).

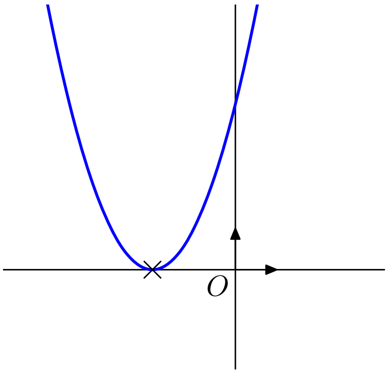
Exemple 4.6
On considère trois fonctions f, g et h, trinômes du second degré et $\mathscr{P}_f$, $\mathscr{P}_g$, $\mathscr{P}_h$, leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal.

$f(x) = x^2 + 4x + 3$



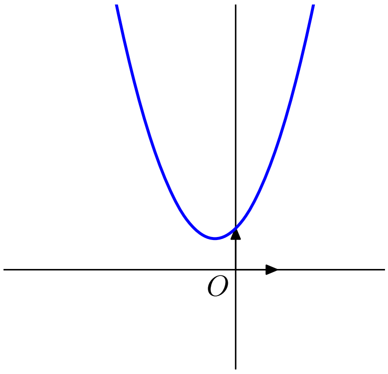
$\mathscr{P}_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses $x_1 = -3$ et $x_2 = -1$. L'équation $f(x) = 0$ a donc deux solutions : -3 et -1.
On peut retrouver ce résultat par le calcul :
$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 > 0$.
Les solutions sont :
$\frac{-4-\sqrt{4}}{2} = -3$, et $\frac{-4+\sqrt{4}}{2} = -1$

$g(x) = (x+2)^2$



$\mathscr{P}_g$ est *tangent* à l'axe des abscisses en un point d'abscisses $x_0 = -2$. L'équation $g(x) = 0$ a donc une solution : -2.
On peut retrouver ce résultat par le calcul :
$g(x) = x^2 + 4x + 4$, donc :
$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$.
La solution est :
$\frac{-4}{2} = -2$

$h(x) = x^2 + x + 1$



$\mathscr{P}_h$ et l'axe des abscisses n'ont pas de point commun : l'équation $h(x) = 0$ n'a pas de solution.
On peut retrouver ce résultat par le calcul :
$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$.
Donc l'équation n'a pas de solution.

4.2.2 Situation d'une parabole par rapport à l'axe des abscisses

On peut se poser le problème inverse du paragraphe précédent : soit $\mathscr{P}$ une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ dans un repère orthogonal. On ne connait pas la position précise de $\mathscr{P}$ dans le repère, mais on peut étudier sa position par rapport à l'axe des abscisses ; en effet :

si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions donc $\mathscr{P}$ coupe l'axe des abscisses en deux points ;

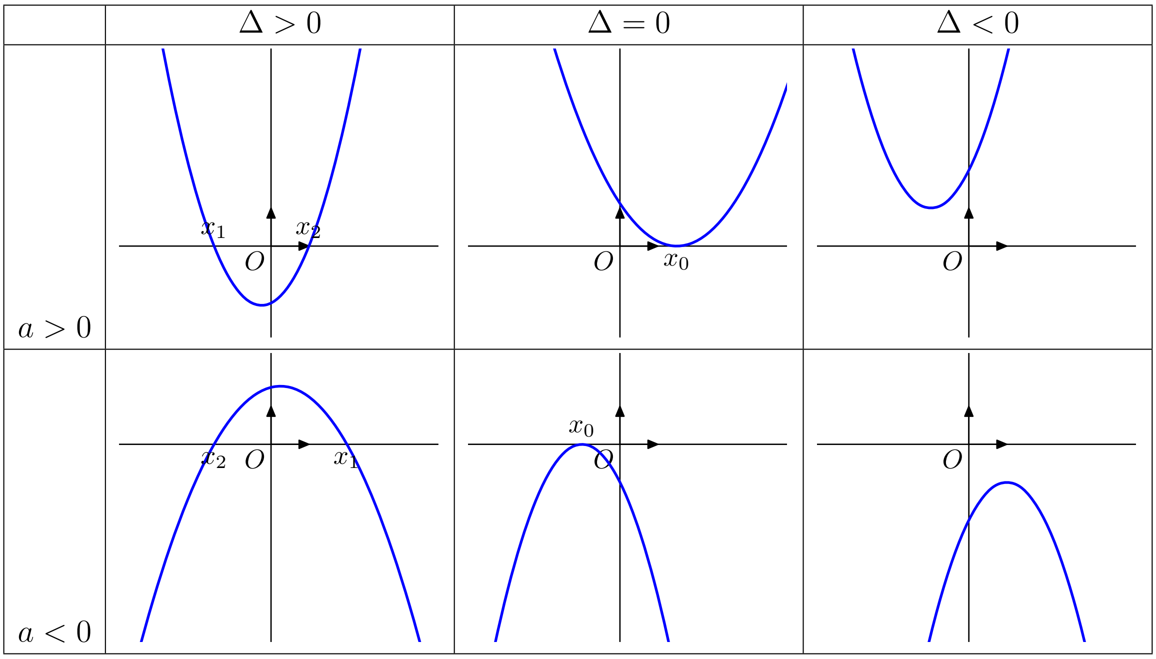
si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution : on dit que $\mathscr{P}$ est *tangente* à l'axe des abscisses ;

si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution donc $\mathscr{P}$ ne rencontre pas l'axe des abscisses.

De plus, on montre facilement à l'aide du paragraphe 3.6.2 du chapitre 3 (produit d'une fonction par un réel) que si $a > 0$, la parabole est « tournée » vers le haut, et si $a < 0$, la parabole est « tournée » vers le bas.

On regroupe les résultats dans le tableau suivant en notant :

- $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$.
- $\Delta = b^2 - 4ac$ avec $x_0 = -\frac{b}{2a}$ si $\Delta = 0$ et $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ si $\Delta > 0$.



4.3 Inéquation du second degré

Une inéquation du second degré peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c \geq 0$ ou $ax^2 + bx + c > 0$ avec $a \neq 0$.

Théorème 4.2
Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

si $\Delta < 0$, pour tout $x \in \mathbf{R}$, le nombre $ax^2 + bx + c$ est du signe de a.

si $\Delta = 0$, pour tout $x \neq -\frac{b}{2a}$, le nombre $ax^2 + bx + c$ est du signe de a.

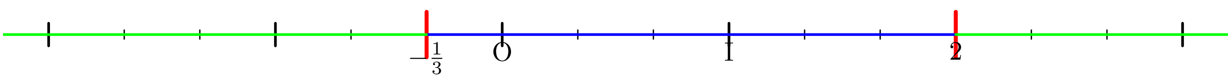
si $\Delta > 0$, le nombre $ax^2 + bx + c$

- est du signe de a pour x « à l'extérieur des racines » de $ax^2 + bx + c$,
- est du signe contraire de a « à l'intérieur des racines » de $ax^2 + bx + c$.

Exemple 4.7
On considère le trinôme $6x^2 - 10x - 4$. $\Delta = 10^2 - 4 \times 6 \times (-4) = 196$. Les racines du trinôme sont :

$$x_1 = \frac{10 - \sqrt{196}}{2 \times 6} = -\frac{1}{3} \text{ et } x_2 = \frac{10 + \sqrt{196}}{2 \times 6} = 2$$

Représentons sur un axe gradué « l'intérieur » et « l'extérieur » des racines :



En vert : « l'extérieur » des racines, et en bleu « l'intérieur » des racines.

- Pour $x \in \left]-\frac{1}{3}; 2\right[$ (x à l'intérieur des racines), $6x^2 - 10x - 4$ est du signe contraire de 6 soit $6x^2 - 10x - 4 < 0$
- Pour $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[\cup \left]2; +\infty\right[$ (x à l'extérieur des racines), $6x^2 - 10x - 4$ est du signe de 6 soit $6x^2 - 10x - 4 > 0$

On regroupe ces résultats dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$6x^2-10x-4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Interprétation graphique :
La représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto 6x^2 - 10x - 4$ est une parabole $\mathscr{P}$ tournée vers le haut car le coefficient $a = 6$ est positif. De plus le discriminant du polynôme du second degré f est strictement positif donc la courbe $\mathscr{P}$ coupe l'axe des abscisses en deux points dont les abscisses sont les racines du polynôme. Si x est entre les racines, alors le point de la courbe $\mathscr{P}$ d'abscisse x est en dessous de l'axe des abscisses : $f(x) < 0$. Si x est « à l'extérieur » des racines alors le point de la courbe $\mathscr{P}$ d'abscisse x est au dessus de l'axe des abscisses : $f(x) > 0$.

Un trinôme : quatre inéquations possibles
- La solution de l'inéquation $6x^2 - 10x - 4 > 0$ est : $\mathscr{S} =]-\infty\,;\,-\frac{1}{3}[\cup]2\,;\,+\infty[$.
- La solution de l'inéquation $6x^2 - 10x - 4 \geq 0$ est : $\mathscr{S} =]-\infty\,;\,-\frac{1}{3}] \cup [2\,;\,+\infty[$.
- La solution de l'inéquation $6x^2 - 10x - 4 < 0$ est : $\mathscr{S} =]-\frac{1}{3}\,;2\,[$.
- La solution de l'inéquation $6x^2 - 10x - 4 \leq 0$ est : $\mathscr{S} = [-\frac{1}{3}\,;\,2]$.

Exemple 4.8
Résoudre l'inéquation $2x^2 - 3x - 3 < x^2 - 5x$.
L'inéquation proposée peut s'écrire sous la forme $2x^2 - 3x - 3 - x^2 + 5x < 0$ soit $x^2 + 2x - 3 < 0$.
On calcule le discriminant : $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$. Les racines sont $x_1 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2} = -3$ et $x_2 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2} = 1$.
Le trinôme $x^2 + 2x - 3$ est strictement négatif pour x à l'intérieur des racines soit $x \in]-3; 1[$.

4.4 Factorisation d'un trinôme du second degré

On admet le théorème suivant :

Théorème 4.3
On considère le trinôme $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. On a alors trois cas possibles :
- si ce trinôme n'a pas de racine ($\Delta < 0$), il ne peut pas être factorisé ;
- si ce trinôme a une racine unique x_0 ($\Delta = 0$), on a : $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$;
- si le trinôme a deux racines x_1 et x_2, ($\Delta > 0$), on a : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Exemple 4.9
En reprenant le trinôme de l'exemple 4.7 :

$$6x^2 - 10x - 4 = 6\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 2)$$

« *He who cans, does. He who cannot, teaches.* »
G.B. Shaw

Chapitre 5

Dérivation

5.1 Taux de variation

Dans cette partie, f est une fonction numérique définie sur un intervalle I, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère. a et x sont deux réels distincts dans l'intervalle I. On note h le réel non nul tel que $x = a + h$.

5.1.1 Taux de variation

Définition 5.1
Le *taux de variation* de la fonction f entre a et x est le quotient :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Avec $x = a + h$, ce quotient s'écrit aussi : $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

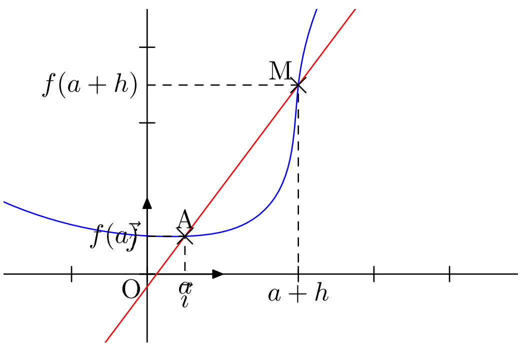
Exemple 5.1
Pour f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2$, le taux de variation de f entre a et $a + h$ est :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = 2a + h$$

Exercice 5.1
Pour f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x + 1$, calculer le taux de variation de f entre a et $a + h$.

5.1.2 Interprétation graphique

On note A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a, et M celui d'abscisse x.
Le taux de variation de la fonction f entre a et x, $\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$ est le coefficient directeur de la droite (AM).



5.2 Nombre dérivé

f est une fonction numérique définie sur un intervalle I, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère. a et x sont deux réels distincts dans l'intervalle I. On note h le réel non nul tel que $x = a + h$.

5.2.1 Nombre dérivé

Définition 5.2
Lorsque h se rapproche de plus en plus de 0 (soit quand x se rapproche de a), si le taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ devient de plus en plus proche d'un nombre réel l fixe, on dit que la limite lorsque h tend vers 0 de ce taux de variation vaut l. On note :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l$$

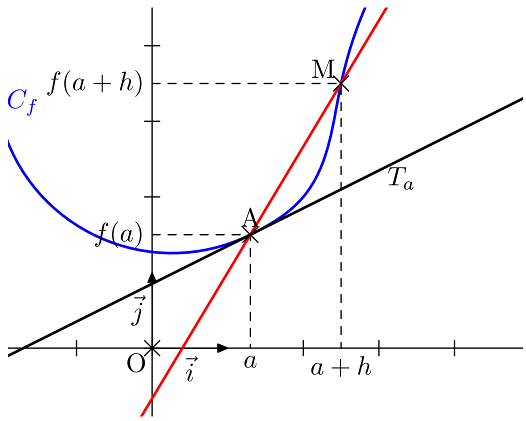
Dans ce cas, on dit que f *est dérivable en* a, et l est *le nombre dérivé* de f en a. Ce nombre dérivé est noté $f'(a)$. Ainsi on a :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \text{ lorsque cette limite existe}$$

5.2.2 Interprétation graphique

Lorsque h se rapproche de 0, le point M se rapproche de A, et la droite (AM) se rapproche de la *tangente* à $\mathscr{C}$ au point A.
Ainsi, $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a.
Conséquence :
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et dérivable en $a \in I$. La tangente T_a à la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour équation :

$$T_a : y = f'(a)\,(x-a) + f(a)$$



5.2.3 Interprétation cinématique

On considère un objet en mouvement. On note t la durée en secondes de son parcours, et $y(t)$ la distance en mètres, parcourue après t secondes.
Le taux de variation de y entre deux instants t_1 et t_2 : $\frac{y(t_2)-y(t_1)}{t_2-t_1}$ est la vitesse moyenne de l'objet entre les instants t_1 et t_2.

Définition 5.3
Dans les conditions précédentes, la limite quand t_2 se rapproche de t_1 du taux de variation (c'est à dire le nombre dérivé de y en t_1) est appelée *vitesse instantanée* de l'objet à l'instant t_1.

$$V(t_1) = \lim_{t_2\to t_1} \frac{y(t_2)-y(t_1)}{t_2-t_1} = \lim_{h\to 0} \frac{y(t_1+h)-y(t_1)}{h}$$

Exemple 5.2
On lache un objet en chute libre. On note $x(t)$ la distance parcourue (en m) après t secondes. On admet que la distance parcourue s'exprime en fonction du temps de parcours par $x(t) = 4{,}9x^2$.
Calculer la vitesse instantanée de l'objet après une chute de t secondes.
On exprime le taux de variation de x entre les instants t et $t+h$:

$$v = \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \frac{4{,}9(t+h)^2 - 4{,}9t^2}{h}$$

En développant, réduisant et simplifiant, on obtient :

$$v = \frac{4{,}9(t^2 + 2th + h^2) - 4{,}9t^2}{h} = \frac{9,8th + 4{,}9h^2}{h} = 9,8t + 4{,}9h$$

Lorsque h tend vers 0, ce taux de variation se rapproche de 9,8t : $\lim\limits_{h\to 0}(9{,}8t + 4{,}9t) = 9,8t$.
Donc la vitesse instantanée de l'objet en chute libre est donnée par l'expression $v(t) = x'(t) = 9{,}8t$.
Après 5 secondes de chute libre, la vitesse est de $9{,}8 \times 5 = 49$ m/s. (soit 179,4 km/h).

5.2.4 Approximation affine

Exemple 5.3
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x$. Il n'est pas trop difficile de calculer mentalement les images par f de 1, 3, -2 etc.... Par contre, si on souhaite calculer $f(0{,}98)$ ou $f(1{,}01)$ c'est plus difficile.
On exprime $f(1+h) = (1+h)^3 - 2(1+h) = -1 + h + 3h^2 + h^3$. Pour h proche de 0, $3h^2 + h^3$ est encore plus proche de 0, et donc $f(1+h)$ est voisin de $-1+h$. On dit que $-1+h$ est une approximation affine de f au voisinage de 1.
Ainsi, on a $f(0{,}98) = f(1 + (-0{,}02)) \approx -1 + (-0{,}02) = -1{,}02$
et $f(1{,}01) \approx -0{,}99$.

De façon générale, si f est une fonction dérivable en a, on a :
$f(a+h) \approx f(a) + f'(a) \times h$, lorsque h est « proche » de 0.

5.3 Fonction dérivée

5.3.1 Fonction dérivée

Soit f une fonction définie et dérivable en tout a d'un intervalle I. On a vu que pour $a \in I$, $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et on l'a appelée « nombre dérivé de f en a » et noté $f'(a)$.

Définition 5.4
Soit f une fonction dérivable en tout x d'un intervalle I, alors la fonction qui à x associe $f'(x)$ est appelée *fonction dérivée* de f sur I. On la note f'.

5.3.2 Dérivées des fonctions usuelles

Fonction constante

Soit $k \in \mathbf{R}$ et $f : x \mapsto k$, pour $x \in \mathbf{R}$.
pour $h \neq 0$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{k-k}{h} = 0$. Donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = 0$.
La dérivée d'une fonction constante est la fonction nulle.

La fonction $x \mapsto x^n, n \in \mathbf{N}^*$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^n$. Alors, pour $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = nx^{n-1}$.

Exemple 5.4
On a donc les résultats suivants :
- si $f(x) = x$, alors $f'(x) = 1$;
- si $f(x) = x^2$, alors $f'(x) = 2x$;
- ....

Ainsi en posant, $f(x) = x^3$, on a alors $f'(x) = 3x^2$.
Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 de $\mathscr{C}$ est donc $f'(1)$.
Pour calculer $f'(1)$ on peut utiliser
- la définition du nombre dérivé : c'est la limite lorsque h tend vers 0 du taux de variation $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$;
- ou, et c'est plus rapide, la fonction dérivée de f : $f'(1) = 3 \times 1^2 = 3$.

Fonction inverse

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. Alors, pour $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Exemple 5.5
Soit f la fonction inverse : pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
Cette tangente T_1 a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.
Pour la déterminer nous avons besoin de $f'(1)$ et de $f(1) = \frac{1}{1} = 1$.
On a pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ donc $f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$.
Ainsi T_1 a pour équation $y = -1 \times (x-1) + 1$ soit $T_1 : y = -x + 2$.

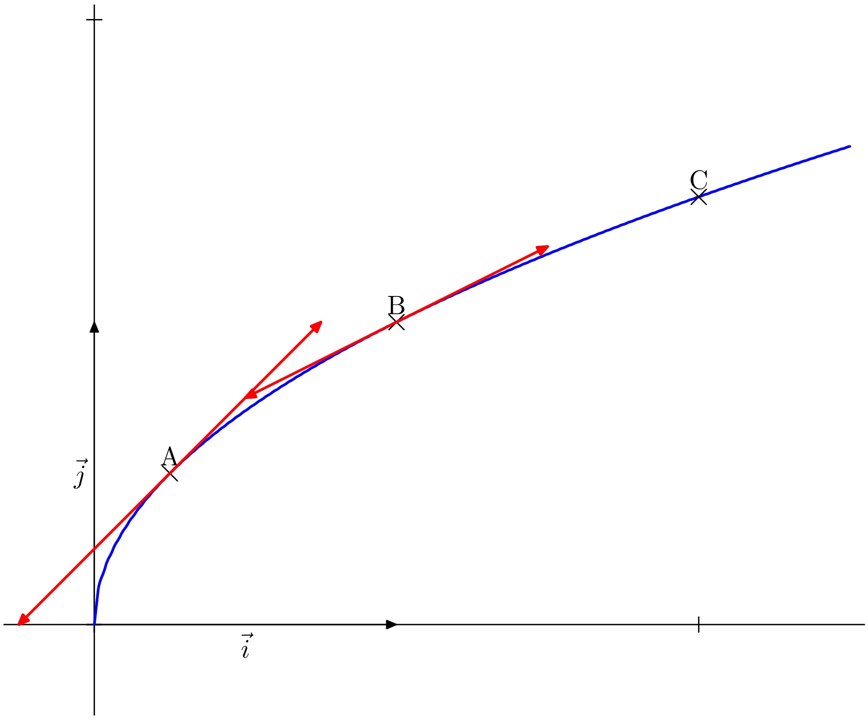
Fonction racine carrée

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$. Alors, pour $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Attention : f n'est pas dérivable en 0

Application au tracé de la courbe :
Pour tracer la courbe représentant la fonction racine carrée on dresse un tableau de valeur et pour chaque point de ce tableau on calcule le coefficient directeur de la tangente à la courbe en ce point, puis on détermine l'équation de la tangente :

a	$\frac{1}{4}$	1	2
$f(a)$	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$
$f'(a)$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$

- En $a = \frac{1}{4}$, l'équation de la tangente est : $y = 1 \times (x - \frac{1}{4}) + \frac{1}{2}$ soit $y = x + \frac{1}{4}$.
- En $a = 1$, l'équation de la tangente est : $y = \frac{1}{2}(x-1) + 1$ soit $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.
- En $a = 2$, l'équation de la tangente est : $y = \frac{1}{2\sqrt{2}}(x-2) + \sqrt{2}$ soit $y = \frac{x\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}$.



5.4 Opérations sur les fonctions dérivables

5.4.1 Dérivée d'une somme

Propriété 5.1
Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Alors la fonction $f + g$ est dérivable sur I et pour $x \in I$, $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Exemple 5.6
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 + 3$.

f est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$, et pour $x \in \mathbf{R}$, on a : $f'(x) = 3x^2 + 2x$

5.4.2 Produit par un réel

Propriété 5.2
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, et λ un réel quelconque. Alors, la fonction $\lambda f : x \mapsto \lambda f(x)$ est dérivable sur I et pour $x \in I$, $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$.

Exemple 5.7
Soit f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 2x^2$, et g définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = 4x^3 - 2x$.
Alors, $f'(x) = 2 \times 2x$ et $g'(x) = 4 \times 3x^2 - 2$.

Conséquence :
Les fonctions polynômes sont donc dérivables sur leur ensemble de définition.

5.4.3 Dérivée d'un produit

Propriété 5.3
Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = u(x)v(x)$. Alors, f est dérivable sur I et pour $x \in I$, $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. On note $f' = u'v + uv'$.

Exemple 5.8
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f(x) = x^3\sqrt{x}$.
f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables : f s'écrit $u \times v$ avec $\begin{cases} u(x) = x^3 \\ v(x) = \sqrt{x} \end{cases}$,
où u est dérivable sur $\mathbf{R}$ et v dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$.
On a donc : $\begin{cases} u'(x) = 3x^2 \\ v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$.
Avec ces notations, on a $f' = u'v + uv'$ donc :

$$\text{Pour } x > 0,\ f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (3x^2)\sqrt{x} + x^3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 3x^2\sqrt{x} + \frac{x^3}{2\sqrt{x}}.$$

En simplifiant, on obtient même :

$$f'(x) = 3x^2\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^3 \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = x^2\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2\sqrt{x} = \frac{7}{2}x^2\sqrt{x}$$

5.4.4 Dérivée d'un quotient

Propriété 5.4
Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, avec $v(x) \neq 0$ pour $x \in I$. Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Alors, f est dérivable sur I et pour $x \in I$, $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$. On note $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Exemple 5.9
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$, par $f(x) = \frac{3x-4}{x^2+3}$.
f est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas : on a $f = \frac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = 3x - 4 \\ v(x) = x^2 + 3 \end{cases}$.
On a donc : $\begin{cases} u'(x) = 3 \\ v'(x) = 2x \end{cases}$. Et ainsi, $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. Donc :

$$\text{Pour } x \in \mathbf{R},\ f'(x) = \frac{3 \times (x^2 + 3) - (3x - 4) \times (2x)}{(x^2 + 3)^2} = \frac{-3x^2 + 8x + 9}{(x^2 + 3)^2}.$$

Conséquence :
Les fonction rationnelles (quotients de deux polynômes) sont dérivables sur leur ensemble de définition.

On pourra se référer à l'annexe C de la page 77 pour un tableau récapitulatif des dérivées de fonctions usuelles.

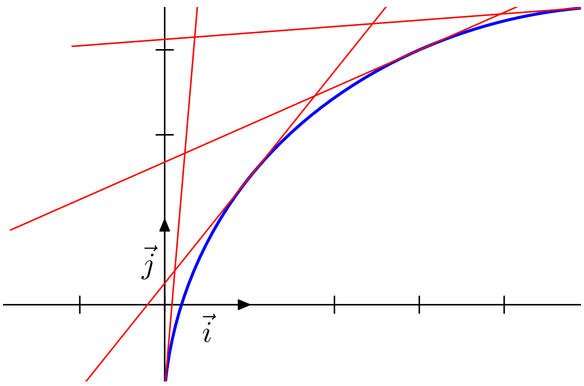
5.5 Fonction dérivée et sens de variation

5.5.1 Variations d'une fonction affine

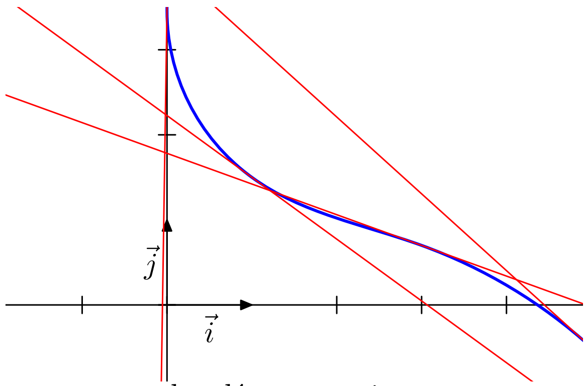
La tangente à une courbe en un point est une droite qui représente une fonction affine. Si le coefficient directeur de la droite est positif, alors la fonction affine associée est croissante ; si le coefficient directeur de la droite est négatif, alors la fonction affine associée est décroissante.

Interprétation graphique :

Sur la figure ci-dessous, toutes les tangentes à $\mathscr{C}$ ont un coefficient directeur positif ; les nombres dérivés de f sont positifs. Les tangentes « montent », et donc la courbe $\mathscr{C}$ aussi : la fonction f est croissante.



Sur la figure ci-dessous, toutes les tangentes à $\mathscr{C}$ ont un coefficient directeur négatif ; les nombres dérivés de f sont négatifs. Les tangentes « descendent », et donc la courbe $\mathscr{C}$ aussi : la fonction f est décroissante.



Attention, ces résultats ne sont que des conjectures et non pas des démonstrations.

5.5.2 Théorèmes

Théorème 5.1 (admis)
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- Si f' est *positive* sur I, alors f est *croissante* sur I.
- Si f' est *négative* sur I, alors f est *décroissante* sur I.
- Si f' est *nulle* sur I, alors f est *constante* sur I.

Théorème 5.2
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$. Si f' est strictement positive (resp. négative) sur $]a;b[$, alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur $[a;b]$.

Exemple 5.10
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^3 + 1{,}5x^2 - 6x + 1$.

1. Calculer la dérivée de f.
2. Étudier le signe de f' sur $\mathbf{R}$.
3. Dresser le tableau de variation de f.

1. f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour $x \in \mathbf{R}$, on a :

$$f'(x) = 3x^2 + 2 \times 1{,}5x - 6 = 3(x^2 + x - 2)$$

2. x^2+x-2 est un polynôme de degré 2. On calcule son discriminant : $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2)$, soit $\Delta = 9$. On a donc deux racines qui sont $\frac{-1-\sqrt{9}}{2} = -2$ et $\frac{-1+\sqrt{9}}{2} = 1$. Notre polynôme est du signe de $a = 1$ (positif) pour $x < -2$ ou pour $x > 1$. On obtient le tableau suivant :
3.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
3		$+$		$+$		$+$	
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	11	$\searrow$	$-2{,}5$	$\nearrow$	

$$f(-2) = (-2)^3 + 1{,}5 \times (-2)^2 - 6 \times (-2) + 1 = -8 + 6 + 12 + 1 = 11$$

$$f(1) = 3 \times 1^3 + 1{,}5 \times 1^2 - 6 \times 1 + 1 = -2{,}5$$

« *Un statisticien est une personne qui peut avoir la tête dans un four et les pieds pris dans la glace et dire qu'en moyenne il se sent bien.* »
BENJAMIN DERECA

Chapitre 6

Statistiques

6.1 Graphiques

6.1.1 Vocabulaire

Définition 6.1
– l'*effectif* d'une classe (ou « catégorie ») est le nombre d'éléments de la classe.
– la *fréquence* d'une classe est le quotient de l'effectif de la classe par l'effectif total :

$$f_i = \text{fréquence de } x_i = \frac{\text{effectif de } x_i}{\text{effectif total}} = \frac{n_i}{N}$$

Exemple 6.1
On donne ci-dessous le tableau récapitulatif des niveaux de pollutions atteints au cours d'une année dans une grande ville. Calculer les fréquences :

Niveau de pollution	0	1	2	3	4
Nombre de jours	5	81	143	100	36
fréquence					

Remarque 6.1
La somme des fréquences vaut 1.

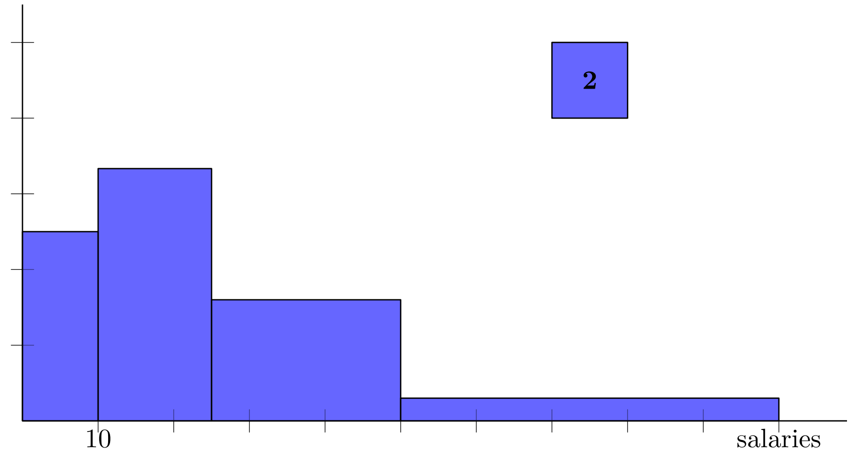
6.1.2 Histogramme

Si on représente une série statistique par un histogramme, chaque classe correspond à un rectangle dont l'*aire* est proportionnelle à l'effectif de la classe, et la largeur est proportionnelle à l'amplitude de la classe. On l'utilise pour représenter une série dont le caractère est quantitatif.

Exemple 6.2
Le tableau suivant donne l'effectif des entreprises d'une zone industrielle suivant le nombre d'employés :

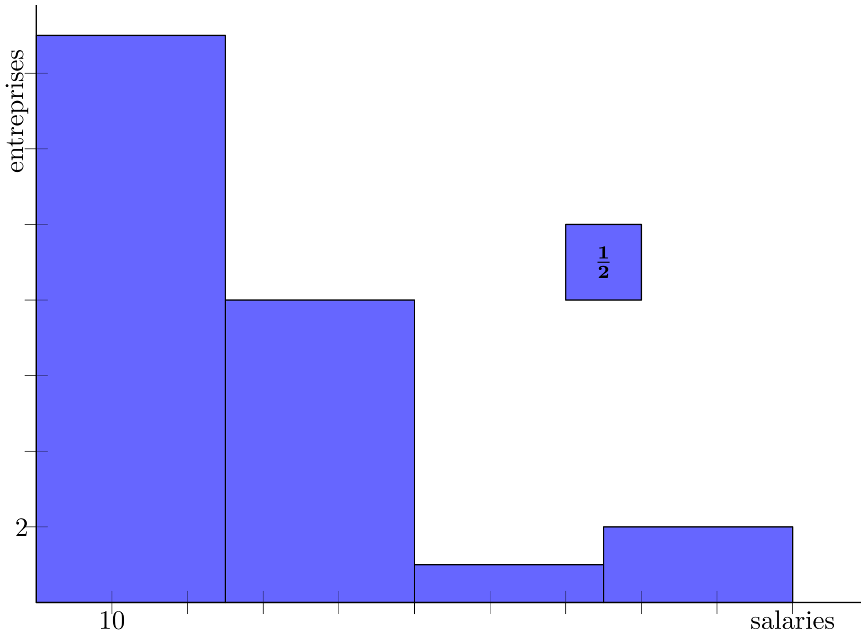
Nombre d'employés N	$N < 10$	$10 \leq N < 25$	$25 \leq N < 50$	$50 \leq N < 100$
Nombre d'entreprises	5	10	8	3

La représentation de ce tableau en histogramme donne :



Remarque 6.2
Si les classes ont toutes la même amplitude, les hauteurs des rectangles sont proportionnelles aux effectifs.

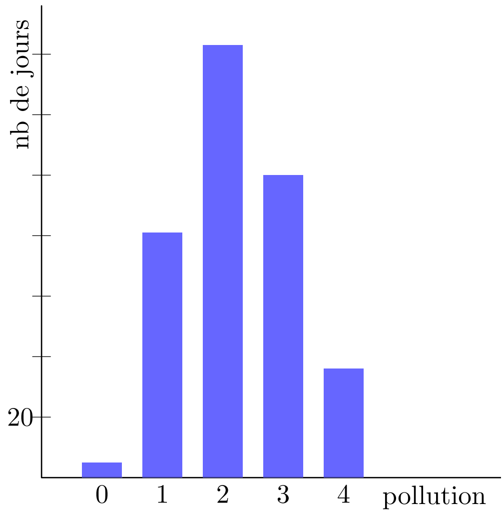
Exemple 6.3
Dans l'exemple 6.2 si on regroupe les deux premières classes et qu'on sait de plus que les entreprises ayant plus de 75 salariés sont au nombre de 2, on obtient :

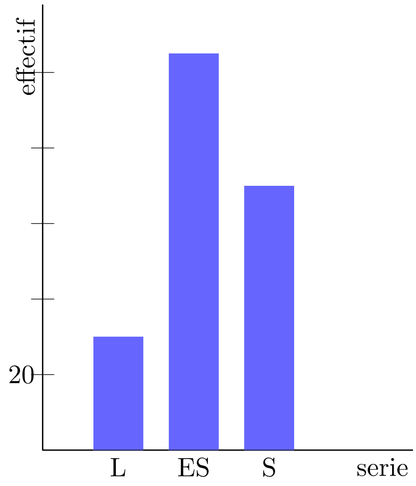


6.1.3 Diagramme en bâtons

Dans un diagramme en bâtons, la hauteur de chaque bâton est proportionnelle à l'effectif de la classe. On l'utilise pour représenter une série dont le caractère est qualitatif.

Exemple 6.4
Les deux diagrammes suivants sont des exemples de diagrammes en bâtons ; le premier représente les données de l'exemple 6.1, le second représente le nombre d'élèves de première dans chacune des séries générales d'un lycée :





6.2 Paramètres de position

6.2.1 Le mode

Définition 6.2
Le mode ou valeur modale est la valeur de la variable statistique qui est le plus souvent observée. C'est à dire la valeur du caractère ou la classe qui a le plus grand effectif.

Exemple 6.5
Dans l'exemple 6.1, le mode est le niveau de pollution 2.
Dans l'exemple 6.4 (le deuxième diagramme), le mode est le bac ES.

6.2.2 La médiane

Définition 6.3
La médiane d'une série statistique est la valeur de la variable qui partage la population en deux groupes de même effectif :
– ceux qui ont une valeur du caractère inférieure à la médiane,
– ceux qui ont une valeur du caractère supérieure à la médiane,

Remarque 6.3
Deux cas sont possibles :
– s'il y a un nombre impair d'observations : $N = 2k + 1$, où $k \in \mathbf{N}$, alors la médiane est la $k + 1^{\text{e}}$ valeur du caractère (les valeurs étant rangées par ordre croissant).
– s'il y a un nombre pair d'observations : $N = 2k$, où $k \in \mathbf{N}$, alors on convient de prendre comme médiane la moyenne des k^{e} et $k + 1^{\text{e}}$ valeurs du caractère (les valeurs étant rangées par ordre croissant).

Exemple 6.6 (nombre impair d'observations)
On donne la série statistique suivante :

valeur	3	4	6	7
effectif	1	3	2	1

On a ici un effectif total de 7. La médiane est donc la 4e valeur lorsqu'elles sont rangées par ordre croissant :
3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 6 ; 6 ; 7. La médiane vaut 4.

Exemple 6.7 (nombre pair d'observations)
On donne la série statistique suivante :

valeur	3	4	6	7
effectif	2	3	1	4

On a ici un effectif total de 10. La médiane est donc la moyenne de la 5e et de la 6e valeurs lorsqu'elles sont rangées par ordre croissant :
3 ; 3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 6 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7. La médiane vaut $\frac{4+6}{2} = 5$.

6.2.3 La moyenne

Définition 6.4
La moyenne d'une série statistique est le quotient de la somme de toutes les valeurs de la série (comptées autant de fois que leur effectif) par l'effectif total. En considérant une série statistique de N observations où la variable x prend p valeurs notées x_1, x_2, …, x_p, chacune ayant un effectif noté n_i, on a :

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}{N}, \text{ où } \sum_{i=1}^{p} n_i x_i = n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_p x_p$$

Propriété 6.1
x est une série statistique prenant p valeurs x_i $(1 \leq i \leq p)$, chacune ayant une fréquence f_i.

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{p} f_i x_i$$

Exemple 6.8
En reprenant l'exemple 6.1, on peut calculer le niveau de pollution moyen de la ville étudiée de deux façons différentes :

$$\overline{x} = \frac{5 \times 0 + 81 \times 1 + 143 \times 2 + 100 \times 3 + 4 \times 36}{365} \approx 2{,}2$$

$$\overline{x} = 0{,}014 \times 0 + 0{,}222 \times 1 + 0{,}392 \times 2 + 0{,}274 \times 3 + 0{,}099 \times 4 \approx 2{,}2$$

Propriété 6.2 (linéarité de la moyenne)
– si on multiplie chaque valeur d'une série statistique par un réel a, alors la moyenne est multipliée par a.
– si on ajoute à chaque valeur d'une série statistique un nombre réel b, alors la moyenne est augmentée de b (si $b < 0$, il s'agira d'une « augmentation négative »).

Propriété 6.3 (conséquence)
Soit x une série statistique de moyenne $\overline{x}$. a et b sont deux réels. On considère y la série statistique définie par $y_i = ax_i + b$ pour tout i. Alors la moyenne de la série y est :

$$\overline{y} = a\overline{x} + b$$

Propriété 6.4 (écarts à la moyenne)
La moyenne des écarts à la moyenne est nulle : Soit x une série statistique de moyenne $\overline{x}$. La série statistique y définie par $y_i = x_i - \overline{x}$ a une moyenne nulle.

Propriété 6.5 (moyennes partielles)
Soit x et y deux séries statistiques d'effectifs respectifs N et P. On considère la série statistique z constituée du regroupement des séries x et y. On a :

$$\overline{z} = \frac{N\overline{x} + P\overline{y}}{N + P}$$

Exemple 6.9
Lors d'un contrôle, la moyenne des 15 filles d'une classe était de 12/20. La moyenne des 10 garçons de 11/20. La moyenne de la classe est :

$$M = \frac{15 \times 12 + 10 \times 11}{15 + 10} = 11{,}6$$

6.3 Paramètres de dispersion

Les paramètres de positions sont insuffisants pour étudier correctement une série statistique : deux séries ayant les mêmes paramètres peuvent être très différentes.

Exemple 6.10
On donne les résultats de deux groupes d'élèves à un même contrôle :

Groupe 1 :

note x	3	5	6	7	8	9	10	13	14	18	20
effectif	1	1	2	2	4	2	1	2	3	1	1

Groupe 2 :

note y	1	2	3	4	13	14	18	19	20
effectif	3	2	2	4	1	2	4	2	2

Ces deux séries ont pour moyenne $\overline{x} = \overline{y} = 10$ et pour médiane $\text{Med}_x = \text{Med}_y = 8{,}5$.

6.3.1 L'étendue

Définition 6.5
L'*étendue* d'une série statistique est la différence entre les deux valeurs extrêmes observées.

Exemple 6.11
Dans l'exemple 6.10, l'étendue du groupe 1 vaut $20 - 3 = 17$, et l'étendue du groupe 2 vaut $20 - 1 = 19$.

6.3.2 Les quantiles

Définition 6.6
Soit x une série statistique avec $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$.
Les *quartiles* (au nombre de 3 : Q_1, Q_2 et Q_3) partagent la population classée par ordre croissant de valeur du caractère en quatre sous ensembles, en respectant les règles ci-dessous :
– Q_1 est la valeur x_i dont l'indice i est le plus petit entier supérieur ou égal à $n/4$.
– Q_2 est la valeur x_i dont l'indice i est le plus petit entier supérieur ou égal à $n/2$.

– Q_3 est la valeur x_i dont l'indice i est le plus petit entier supérieur ou égal à $3n/4$.

Définition 6.7
Soit x une série statistique avec $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$.
Les *déciles* (au nombre de 9 : D_1, ..., D_9) partagent la population classée par ordre croissant de valeur du caractère en dix sous ensembles, en respectant les règles ci-dessous :
– D_1 est la valeur x_i dont l'indice i est le plus petit entier supérieur ou égal à $n/10$.
– ....
– D_9 est la valeur x_i dont l'indice i est le plus petit entier supérieur ou égal à $9n/10$.

Définition 6.8
– L'*écart interquartile* est la différence entre le 3e et le 1er quartile. Au moins 50% des observations ont une valeur du caractère comprise entre Q_1 et Q_3.
– L'*écart interdécile* est la différence entre le 9e et le 1er décile. Au moins 80% des observations ont une valeur du caractère comprise entre D_1 et D_9.

Exemple 6.12
Calculer les trois quartiles et les 1er et 9e déciles de chacune des séries de l'exemple 6.10 :

Série x : $n = 20$ donc $n/4 = 5$, $n/2 = 10$, $3n/4 = 15$.
On a donc : $Q_1 = x_5 = 7$, $Q_2 = x_{10} = 9$, $Q_3 = x_{15} = 13$.
$n/10 = 2$; $9n/10 = 18$ donc $D_1 = x_2 = 5$ et $D_9 = x_{18} = 14$.

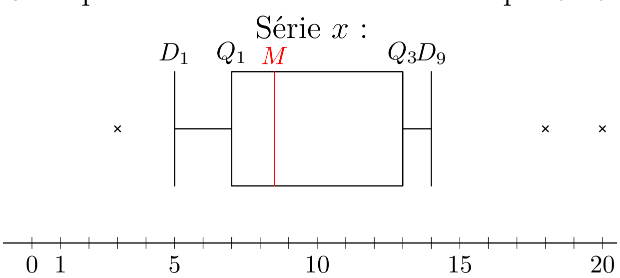
Série y : $n = 22$ donc $n/4 = 5{,}5$, $n/2 = 11$, $3n/4 = 16{,}5$.
On a donc $Q_1 = y_6 = 3$, $Q_2 = y_{11} = 13$, et $Q_3 = y_{17} = 18$.
$n/10 = 2{,}2$; $9n/10 = 19{,}8$ donc $D_1 = y_3 = 1$ et $D_9 = y_{20} = 19$.

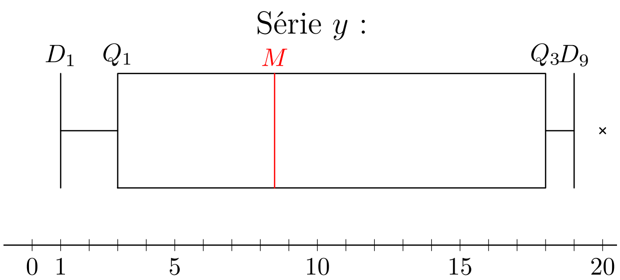
On pourra se réferer à l'annexe B de la page 75 pour l'obtention des paramètres statistiques à l'aide de la calculatrice.

6.3.3 Application : les diagrammes en boîtes

La représentation graphique de la dispersion d'une série statistique se fait à l'aide de graphiques appelés *diagrammes en boites*, *boites à moustaches*, ou *box plot*, voire *diagramme de Tuckey*. On les trace comme ceci :
– On construit en face d'un axe gradué, permettant de repérer les valeurs extrêmes de la série étudiée, un rectangle dont la longueur est égale à l'écart interquartile et dans lequel on représente la médiane par un trait.
– Deux traits repèrent les 1er et 9e déciles. Les valeurs inférieures à D_1 ou supérieures à D_9 sont représentées par des points. (On se contente parfois des valeurs extrêmes.)

Exemple 6.13
On reprend les deux séries de l'exemple 6.10 :





Remarque 6.4
Parfois on ne représente pas les déciles. Les « traits extrêmes » sont alors les valeurs extrêmes.

On pourra se réferer à l'annexe B de la page 75 pour l'obtention des boites à moustaches à l'aide de la calculatrice.

6.3.4 Variance et écart type

Théorème 6.1
La moyenne $\overline{x}$ d'une série statistique x est le nombre qui minimise la somme :

$$S(x) = \sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - x)^2$$

Définition 6.9
La *variance* est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne. C'est un nombre positif.

$$V = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{N} = \frac{n_1 \left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + \cdots + n_p \left(x_p - \overline{x}\right)^2}{N}$$

Remarque 6.5

$$V = \sum_{i=1}^{p} f_i \left(x_i - \overline{x}\right)^2 \text{ voir la prop 6.1}$$

Propriété 6.6

$$V(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i^2}{N} - \overline{x}^2 = \frac{n_1 x_1^2 + \cdots + n_p x_p^2}{N} - \overline{x}^2$$

Exemple 6.14
En reprenant le groupe 1 de l'exemple 6.10, on peut calculer la variance de deux façons différentes :

avec la définition 6.9 :

$$V = \frac{1 \times (3-10)^2 + \cdots + 1 \times (20-10)^2}{20} = \frac{372}{20} = 18{,}6$$

avec la propriété 6.6 :

$$V = \frac{1 \times 3^2 + \cdots + 1 \times 20^2}{20} - 10^2 = \frac{2372}{20} - 10^2 = 118{,}6 - 100 = 18{,}6$$

Définition 6.10
L'*écart type* d'une série statistique est égal à la racine carrée de la variance.

Remarque 6.6
L'écart type permet de mesurer la dispersion d'une série statistique ; à moyenne égale, plus il est important, plus les valeurs observées sont dispersées. Son avantage par rapport à la variance est qu'il est exprimé dans la même unité que les valeurs de la série.

6.4 Moyennes mobiles

Remarque 6.7
On dit qu'une série statistique est une *série chronologique* si les valeurs dépendent du temps.

Exemple 6.15
Une série qui donne la quantité de pluie tombée au cours des douze mois d'une année est une série chronologique :
Hauteur moyenne de pluie en mm à Vancouver (*source : Quid 2000*).

mois	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
pluie (mm)	131	107	95	60	32	43	32	41	67	114	147	165

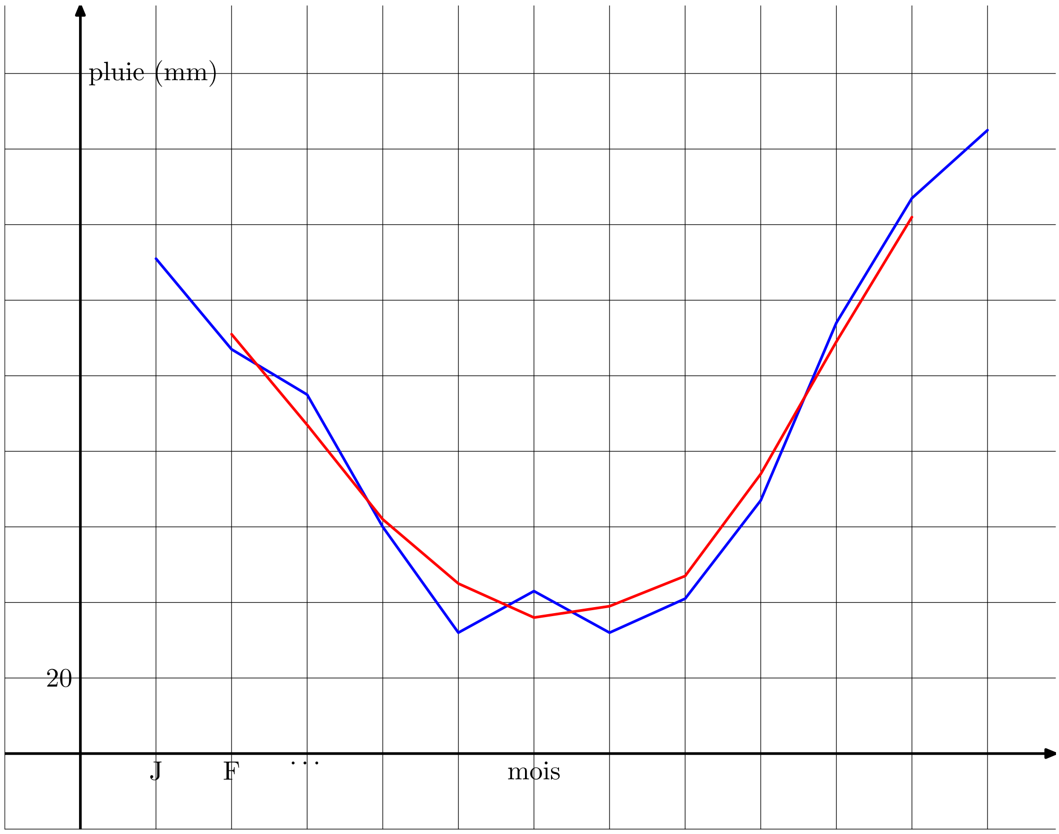
Définition 6.11
En effectuant pour chaque date, de la deuxième jusqu'à l'avant dernière, la moyenne des valeurs à la date précédente, à la date considérée et à la date suivante, on obtient une nouvelle série dite des *moyennes mobiles d'ordre 1*.

Exemple 6.16
En reprenant la série de l'exemple 6.15, on obtient :

mois	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
pluie (mm)	131	107	95	60	32	43	32	41	67	114	147	165
moy. mobile $k = 1$		111	87	62	45	36	39	47	74	109	142	

Pour février, la moyenne mobile d'ordre 1 est $\frac{131+107+95}{3} = 111$.

Remarque 6.8
En représentant les deux séries obtenues sur un même graphique, la deuxième est plus « lisse » que la première :



Chapitre 7

Probabilités

7.1 Introduction. Premières définitions

Le but des probabilités est d'essayer de rationaliser le hasard : quelles sont les chances d'obtenir un résultat suite à une expérience aléatoire ?
Quelles chances ai-je d'obtenir « pile » en lançant une pièce de monnaie ? Quelles chances ai-je d'obtenir « 6 » en lançant un dé ? Quelles chances ai-je de valider la grille gagnante du loto ?
Vocabulaire
L'objet de l'étude d'un phénomène aléatoire est appelé *expérience aléatoire*. Au cours d'une expérience aléatoire, les résultats possibles sont appelés les *éventualités* (notées généralement e_i). L'ensemble des n éventualités est appelé *l'univers* de l'expérience aléatoire. On le note généralement Ω (omega majuscule dans l'alphabet grec). Un *événement* est un ensemble constitué d'éventualités. Un événement ne comportant qu'une seule éventualité est appelé *événement élémentaire*.

Exemple 7.1
On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6.
- les éventualités sont $e_1 = 1$, $e_2 = 2$, $e_3 = 3$, $e_4 = 4$, $e_5 = 5$, $e_6 = 6$.
- l'univers est donc $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
- on note A l'événement « obtenir un chiffre pair ». Alors $A = \{2; 4; 6\}$.
- on note B l'événement « obtenir un six ». Alors $B = \{6\}$: c'est un événement élémentaire.

7.2 Distribution de fréquences. Loi de probabilité

7.2.1 Distribution de fréquences

Lorsqu'on répète un grand nombre de fois la même expérience aléatoire en notant les résultats obtenus, on peut compter le nombre de fois où chaque événement élémentaire se produit, et ensuite calculer sa fréquence d'apparition. On obtient alors pour chaque éventualité e_i une fréquence $f_i = \frac{n_i}{N}$, où n_i est le nombre d'apparitions de e_i et N le nombre total d'expériences. On dit alors que la *distribution de fréquences* associée à ces N expériences aléatoires est la suite $(f_1; \ldots; f_p)$.

Propriété 7.1
$(f_1; \ldots; f_p)$ est une distribution de fréquences associée à N expériences aléatoires identiques. Alors :

– on a : $f_1 + \cdots + f_p = 1$;
– si A est un événement, alors la fréquence de A, $f(A)$ est la somme des fréquences de toutes les éventualités constituant A.

Exemple 7.2
On lance cent fois de suite une fléchette sur une cible ayant cinq zones : noire, rouge, jaune, bleue et verte. Les résultats obtenus sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

zone touchée	noire	rouge	jaune	bleue	verte
nombre de touches	5	15	20	35	25
fréquence	0,05	0,15	0,20	0,35	0,25

La distribution de fréquences associée à ces cent lancers de fléchettes est donc :

$$(0{,}05;\ 0{,}15;\ 0{,}20;\ 0{,}35;\ 0{,}25)$$

7.2.2 Loi de probabilité

Exemple 7.3
Dans une urne on a placé huit boules numérotées de 1 à 8. On en tire une au hasard. Si les boules sont indiscernables au toucher, on a autant de chances d'en tirer une plutôt qu'une autre. On dit que la probabilité d'obtenir chaque boule est égale à $\frac{1}{8}$. On écrit :

$$p(1) = p(2) = \cdots = p(8) = \frac{1}{8}$$

On dit qu'on a défini une loi de probabilité sur l'ensemble $\Omega = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8\}$.

Plus généralement, on a la définition suivante :

Définition 7.1
Soit Ω un univers lié à une expérience aléatoire ayant n éventualités e_1, e_2,…, e_n.
Si à chaque événement élémentaire $\{e_i\}$ on associe un nombre $p_i \in [0; 1]$ tel que :

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

Alors on définit une loi de probabilité sur l'univers Ω.
Chaque p_i est appelé *probabilité* de l'événement $\{e_i\}$.
La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des éventualités composant A.

Conséquences
– Ω est l'événement *certain* : $p(\Omega) = 1$;
– $\emptyset$ est l'événement *impossible* : $p(\emptyset) = 0$.

Exemple 7.4
En reprenant l'énoncé de l'exemple 7.3, on note A l'événement « obtenir un chiffre strictement supérieur à 5. On a alors $A = \{6;\ 7;\ 8\}$, et donc $p(A) = \frac{3}{8}$.

7.2.3 Loi des grands nombres

Pour une expérience aléatoire donnée ayant une loi de probabilité P, la distribution de fréquences obtenue sur un nombre d'expériences est proche de la loi de probabilité lorsque le nombre d'expériences est « très grand ».

7.2.4 Équiprobabilité

Les n événements élémentaires d'un univers Ω lié à une expérience aléatoire sont dits *équiprobables* si la probabilité de chacun d'eux est $\frac{1}{n}$.
Dans ce cas la probabilité d'un événement A est :

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

Remarque 7.1
Dans un exercice, pour signifier qu'on est dans une situation d'équiprobabilité on a généralement dans l'énoncé un expression du type :
– on lance un dé *non pipé*... ;
– on tire dans un jeu de cartes *non truqué*... ;
– dans une urne, il y a des boules *indiscernables au toucher*... ;
– on rencontre *au hasard* une personne parmi... ;
– ...

7.3 Quelques exemples de référence

Exemple 7.5 (le dé équilibré)
On lance un dé équilibré à six faces. On considère l'événement A : « obtenir un chiffre pair » et l'événement B : « obtenir un diviseur de six ». Calculer la probabilité de chacun de ces deux événements.
Le dé est équilibré donc on est dans une situation d'équiprobabilité. On a donc pour $1 \leq i \leq 6$, $p(i) = \frac{1}{6}$.
On a : $A = \{2;\ 4;\ 6\}$ et $B = \{1;\ 2;\ 3;\ 6\}$. Donc $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, et $p(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Exemple 7.6 (les boules de couleurs)
Dans une urne on place dix boules de couleurs numérotées. Les boules sont indiscernables au toucher et sont réparties comme suit :
– quatre boules rouges numérotées 1, 2, 3 et 4
– trois boules blanches numérotées 1, 2 et 3
– deux boules vertes numérotées 1 et 2
– une boule jaune numérotée 1.
On tire au hasard une boule de l'urne. Calculer les probabilités des événements suivants :
– U : « obtenir une boule numérotée 1 ».
– B : « obtenir une boule blanche ».
– A : « obtenir un chiffre pair sur une boule rouge ».
– I : « obtenir un chiffre impair ».
Les boules sont indiscernables au toucher et le tirage se fait au hasard, on est donc dans une situation d'équiprobabilité : chaque boule a une probabilité $p = \frac{1}{10}$ d'être tirée. En notant chaque éventualité par l'initiale de la couleur suivie du chiffre de la boule, on a :
– $U = \{R1;\ B1;\ V1;\ J1\}$, donc $p(U) = \frac{4}{10} = 0{,}4$;
– $B = \{B1;\ B2;\ B3\}$, donc $p(B) = \frac{3}{10} = 0{,}3$;
– $A = \{R2;\ R4\}$, donc $p(A) = \frac{2}{10} = 0{,}2$;
– $I = \{R1;\ R3;\ B1;\ B3;\ V1;\ J1\}$, donc $p(I) = \frac{6}{10} = 0{,}6$.

Exemple 7.7 (le jeu de cartes)
On choisit une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes non truqué. On appelle « figure » les rois, dames et valets. Calculer les probabilités des événements suivants :
- A : « obtenir une figure » ;
- B : « obtenir un pique » ;
- C : « obtenir un as ».

Le jeu de cartes n'est pas truqué et le choix se fait au hasard, on est donc dans une situation d'équiprobabilité : chaque carte a une probabilité $p = \frac{1}{52}$ d'être choisie.
- Dans le jeu il y a $4 \times 3 = 12$ figures. Donc $p(A) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$.
- Dans le jeu il y a 13 piques. Donc $p(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.
- Dans le jeu, il y a 4 as. Donc $p(C) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

Exemple 7.8 (rencontre)
Dans une classe, 20 % des élèves ont 16 ans, 35 % ont 17 ans, 30 % ont 18 ans et 15 % ont 19 ans. On rencontre au hasard un élève de cette classe. Calculer la probabilité qu'il ait « au moins 17 ans ». Même question pour « strictement plus de 17 ans ».
- On note A l'événement l'élève a au moins 17 ans. $p(A) = 35\% + 30\% + 15\% = 80\%$.
- On note B l'événement l'élève a strictement plus de 17 ans. $p(B) = 30\% + 15\% = 45\%$.

Exemple 7.9 (non-équiprobabilité)
Un dé est pipé de sorte que les faces 1, 2, 3, 4 et 5 aient les probabilités suivantes d'apparaître :

$$p(1) = p(2) = p(3) = 0{,}1;\ p(4) = p(5) = 0{,}2;$$

1. Calculer $p(6)$.
2. Calculer $p(A)$ et $p(B)$ où A et B sont les événements définis dans l'exemple 7.5.

1. La somme de toutes les probabilités doit être égale à 1, donc :

$$p(6) = 1 - (p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5)) = 0,3$$

2. $p(A) = p(2) + p(4) + p(6) = 0{,}6$ et $p(B) = p(1) + p(2) + p(3) + p(6) = 0{,}6$.

7.4 Intersection. Réunion

7.4.1 Événement. Événement contraire

Définition 7.2
Soit A un événement d'un univers Ω lié à une expérience aléatoire. On appelle *événement contraire* de A et on note $\overline{A}$ l'événement constitué de toutes les éventualités de Ω n'étant pas dans A.

Exemple 7.10
Dans le cas d'un jet de dé à six faces, les événements contraires des événements définis dans l'exemple 7.5 sont : $\overline{A}$: « obtenir un chiffre impair » et $\overline{B}$: « obtenir un 4 ou un 5 ».

Propriété 7.2
Soit A un événement d'un univers Ω de probabilité $p(A)$. Alors l'événement $\overline{A}$ a pour probabilité $1 - p(A)$.

7.4.2 Intersection. Réunion

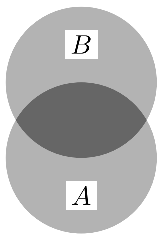
Définition 7.3
Soit Ω un univers lié à une expérience aléatoire et P une loi de probabilité sur Ω. Soit A et B deux événements de Ω.
– L'événement constitué des éventualités appartenant à A *et* à B est noté $A \cap B$. (on lit « A inter B » ou « A et B »).
– L'événement constitué des éventualités appartenant à A *ou* à B ou aux deux est noté $A \cup B$. (on lit « A union B » ou « A ou B »).

Exemple 7.11
On considère un jeu de 32 cartes. On note A l'événement « obtenir une figure », et B l'événement « obtenir un trèfle ».
1. Expliciter $A \cap B$ et $A \cup B$.
2. Calculer $p(A)$, $p(B)$, $p(A \cap B)$ et $p(A \cup B)$.
3. Calculer $p(A) + p(B)$ puis $p(A \cup B) + p(A \cap B)$.

1. $A \cap B$: « obtenir une figure trèfle »
   $A \cup B$: « obtenir une figure ou un trèfle ou une figure trèfle ».
2. $p(A) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$. $p(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.
   $p(A \cap B) = \frac{3}{32}$. $p(A \cup B) = \frac{17}{32}$.
3. $p(A) + p(B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$.
   $p(A \cap B) + p(A \cup B) = \frac{3}{32} + \frac{17}{32} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$.

Propriété 7.3
Soit Ω un univers lié à une expérience aléatoire, et P une loi de probabilité sur Ω. Soit A et B deux événements de Ω. Alors on a :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$



Interprétation :
En comptant le nombre d'éventualités de A et en ajoutant le nombre d'éventualités de B, on compte deux fois les éventualités de $A \cap B$. D'où le « $-p(A \cap B)$ » dans la formule de la propriété 7.3

« *Experience is the name everyone gives to their mistakes* »
Oscar Wilde

Chapitre 8

Les suites

8.1 Suite de nombres réels

8.1.1 Définition

Définition 8.1
On appelle suite de terme général u_n et on note $(u_n)_{n\geq 0}$ ou plus simplement u la liste *ordonnée* des nombres u_0, u_1, u_2, u_3, ... Les nombres u_i sont appelés les *termes* de la suite.
Une suite (u_n) permet donc d'associer à chaque entier n un réel qu'on note u_n.

Remarque 8.1
Parfois le premier terme d'une suite peut être u_1 ou u_2, ... et non pas u_0.

Exemple 8.1
On définit (u_n) comme la suite des nombres pairs.
Dans ce cas, on a : $u_0 = 0$, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$, ... On peut écrire aussi $u_n = 2 \times n$.

Remarque 8.2 (Notation)
Il faut bien remarquer que, dans la notation u_n, n est un entier dont dépend la valeur de u_n. Cet entier est appelé *l'indice* du terme u_n. Il joue le même rôle que le « x » dans l'expression de $f(x)$ où f est une fonction numérique. La notation indicielle est ici plus commode et courte[1] à écrire.

Exemple 8.2
En reprenant la suite des entiers pairs définie dans l'exemple 8.1 par $u_n = 2 \times n$, on a : $u_6 = 2 \times 6 = 12$, $u_n = 2 \times n$, mais aussi $u_p = 2 \times p$ ou encore $u_t = 2 \times t$.
Si on choisit comme indice l'entier $n+1$ on a $u_{n+1} = 2 \times (n+1) = 2n+2$. À ne pas confondre avec $u_n + 1 = (2 \times n) + 1 = 2n + 1$. Il est donc très important d'écrire les indice au bon endroit et à la bonne taille !
Il s'agit de la même distinction qu'entre $f(x+1)$ et $f(x)+1$ pour les fonctions.

8.1.2 Mode de génération

Une suite (u_n) est entièrement définie si on est capable de calculer u_n pour n'importe quelle valeur de n. Il existe deux façons usuelles pour définir une suite :

[1]Et je vous ai déjà dit que la « bonne paresse » est une qualité pour les mathématiciens que vous êtes !

Suite définie « en fonction de n »

Exemple 8.3

On considère la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \frac{x+3}{x^2+1} \end{array}$.

Si $x \in \mathbf{N}$, $f(x)$ est toujours défini. On peut donc considérer la suite u de terme général :

$$u_n = f(n) = \frac{n+3}{n^2+1}$$

On a alors :

$$u_0 = \frac{0+3}{0^2+1} = 3,\ u_1 = \frac{1+3}{1^2+1} = 2,\ \ldots$$

Dans cette situation, on est bien en mesure de calculer u_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

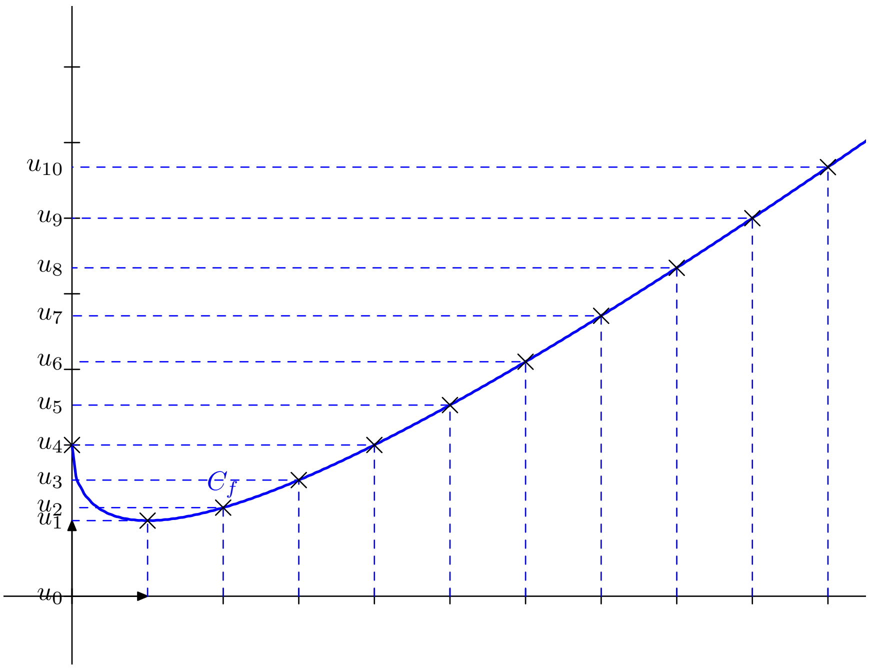
Représentation graphique d'une suite définie « en fonction de n »

Soit u une suite définie par $u_n = f(n)$ pour $n \in \mathbf{N}$, où f est une fonction numérique définie sur $\mathbf{R}$.

On trace dans un repère la représentation graphique de f. Le terme u_i de la suite est alors l'ordonnée du point de $\mathcal{C}_f$ dont l'abscisse est i.

Exemple 8.4

Le graphique ci-dessous représente la suite u définie par $u_n = f(n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2$



Suite définie par récurrence

Exemple 8.5

Je possède 1 000 € sur mon livret d'épargne. Chaque année on me reverse dessus 5 % en intérêts et je rajoute 100 €. J'appelle u_n la somme dont je dispose sur mon livret après n ans. On a donc :

- pour $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = (1 + \frac{5}{100}) \times u_n + 100 = 1,05u_n + 100$;
- la somme disponible sur le livret aujourd'hui est 1 000€. Donc : $u_0 = 1\ 000$.

On a : $u_1 = 1{,}05 \times 1\ 000 + 100 = 1\ 150$, puis $u_2 = 1{,}05 \times 1\ 150 + 100 = 1\ 307{,}50\ \ldots$. De proche en proche, on peut donc calculer u_n pour n'importe quelle valeur de n.

Définition 8.2
Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbf{R}$, et a un réel quelconque. On dit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour tout } n \in \mathbf{N} \end{array}\right.$ est définie par *récurrence* et on note :

$$u : \left\{\begin{array}{l} u_0 = a \\ \text{pour } n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{array}\right.$$

Remarque 8.3
Lorsqu'une suite est définie par récurrence, pour calculer u_n, on est obligé d'avoir calculé avant tous les termes précédents.

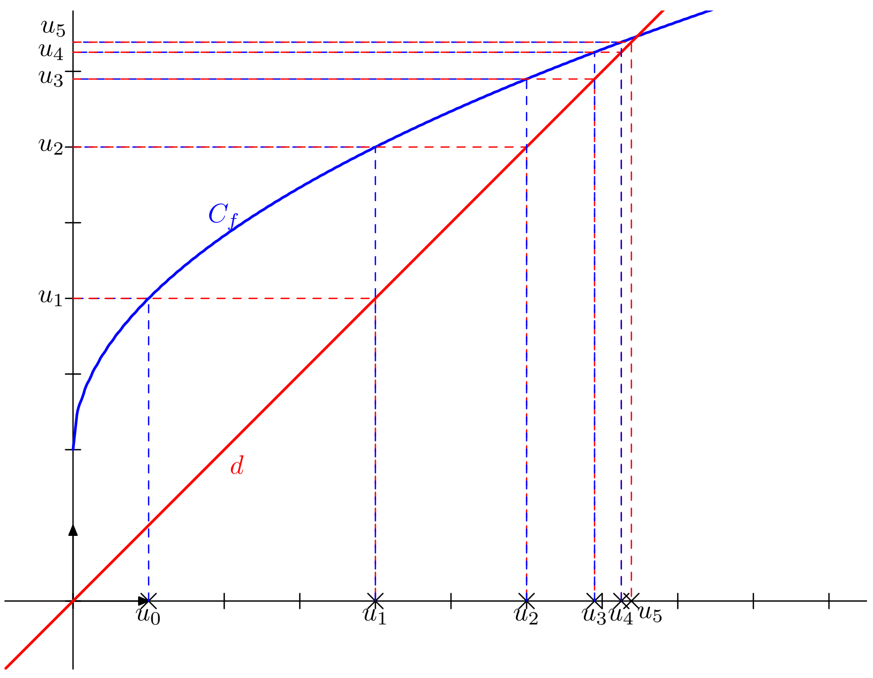
Représentation graphique d'une suite définie par récurrence

Soit u la suite définie par : $\left\{\begin{array}{l} u_0 \in \mathbf{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{array}\right.$

On trace dans un repère la droite d d'équation $y = x$ et la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f. On place ensuite sur l'axe des abscisses u_0. On a $u_1 = f(u_0)$; on peut donc lire u_1 sur l'axe des ordonnées comme l'image de u_0 par f. On reporte alors u_1 sur l'axe des abscisses grâce à d.

Exemple 8.6
Le graphique ci-dessous est obtenu avec $f : x \mapsto \sqrt{4x} + 2$ et $u_0 = 1$. On a donc u définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{4u_n} + 2 \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{array}\right.$$



8.2 Variations d'une suite

Définition 8.3
On dit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est :
– strictement croissante si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} > u_n$;
– strictement décroissante si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} < u_n$.

Exemple 8.7
On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = (2n+1)^2$. Pour étudier les variations de $(u_n)_{n\geq 0}$, on calcule $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (2(n+1)+1)^2 - (2n+1)^2 \\ &= (2n+3)^2 - (2n+1)^2 \\ &= 4n^2 + 12n + 9 - (4n^2 + 4n + 1) \\ &= 8n + 8 > 0, \text{ pour } n \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

Donc la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante.

Exemple 8.8
On considère la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par récurrence par : $\begin{cases} v_0 = 10 \\ v_{n+1} = (v_n)^2 + 3v_n + 1 \end{cases}$.
Pour étudier les variations de (v_n), on va calculer $v_{n+1} - v_n$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (v_n)^2 + 3v_n + 1 - v_n \\ &= (v_n)^2 + 2v_n + 1 \\ &= (v_n + 1)^2 > 0, \text{ pour } n \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

Donc la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante.

8.3 Suites arithmétiques

8.3.1 Définition

Définition 8.4
Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite *arithmétique* si la différence entre deux termes consécutifs est constante. C'est à dire qu'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$.
Le réel r est appelé *raison* de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exemple 8.9
Si u est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 3, on a :

$$\begin{aligned} &u_0 = 5 \\ &u_1 = u_0 + 3 = 5 + 3 = 8 \\ &u_2 = u_1 + 3 = 8 + 3 = 11 \end{aligned}$$

8.3.2 Calcul du terme général

Théorème 8.1
– si u est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = u_0 + nr$;
– si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = a + b \cdot n$, alors, u est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = a$ et de raison b.

Démonstration :
- On a : $u_1 = u_0 + r$,
  puis, $u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r$.
  De même, $u_3 = u_2 + r = (u_0 + 2r) + r = u_0 + 3r$, ... et ainsi de suite.
  On obtient finalement $u_n = u_0 + nr$.
- Si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = a+nb$, alors $u_{n+1} - u_n = (a + (n + 1)b) - (a + nb) = b$. Donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + b$, et donc u est une suite arithmétique de raison b et de premier terme $u_0 = a + 0 \cdot b = a$.

Exemple 8.10
En reprenant la suite de l'exemple 8.9, on a :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbf{N}, \quad u_n = 5 + n \times 3 = 5 + 3n$$

Remarque 8.4
Si le premier terme d'une suite arithmétique est u_1, et sa raison est r, on a :

$$\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = u_1 + (n - 1)r$$

Et de façon plus générale, si u est une suite arithmétique de raison r, pour tous les entiers n et p on a :

$$u_n = u_p + (n - p) \times r$$

8.3.3 Calcul de la somme des premiers termes

Propriété 8.1
La somme S des n premiers termes d'une suite arithmétique est :

$$S = \frac{n \times (\text{premier terme } + \text{ dernier terme})}{2}$$

Dans le cas où le premier terme est u_0, on obtient : $S = \frac{n\times(u_0+u_{n-1})}{2}$.
Dans le cas où le premier terme est u_1, on obtient : $S = \frac{n\times(u_1+u_n)}{2}$.

Démonstration : (cas où le premier terme est u_1)
On va écrire S de deux façons différentes :

$$S = u_1 + (u_1 + r) + \cdots + (u_1 + (n - 1)r) + (u_1 + nr)$$

$$S = (u_n - nr) + (u_n - (n - 1)r) + \cdots + (u_n - r) + u_n$$

Donc : $2S = n \times u_1 + n \times u_n$ (les autres termes s'annulent) d'où le résultat en divisant les deux membres par 2.

Exemple 8.11
Un salarié est embauché le 1er janvier 2008 pour un salaire net mensuel de 1 000€ par mois et avec une augmentation de 5€ nets par mois dès le deuxième mois.
On note u_n le salaire perçu à l'issue du ne mois. Ainsi u est une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 1\ 000$ et de raison $r = 5$. En effet, la différence entre deux salaires consécutifs est égale à 5€.
Le salaire perçu en décembre 2008 est donc $u_{12} = 1\ 000 + 11 \times 5 = 1\ 055$€.

Le total des salaires perçus au cours de la première année est donc :

$$S = \frac{12 \times (u_1 + u_{12})}{2} = \frac{12 \times 2\ 055}{2} = 12\ 330$$

Exemple 8.12
Calculons la somme des 100 premiers entiers : $S_{100} = 1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100$.
Pour celà, on considère la suite arithmétique v de premier terme $v_1 = 1$ et de raison $r = 1$.
La somme S_{100} cherchée est donc la somme des 100 premiers termes de la suite v :

$$S_{100} = \frac{100 \times (v_1 + v_{100})}{2} = \frac{100 \times (1 + 100)}{2} = 5\ 050$$

8.4 Suites géométriques

8.4.1 Définition

Définition 8.5
Une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est dite *géométrique* si chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par un même nombre q. C'est à dire qu'il existe un réel q tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le réel q est appelé *raison* de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

Remarque 8.5
Si on considère que la suite u n'est pas la suite nulle[2], u est géométrique si pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$.

Exemple 8.13
Si u est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$, et de raison $q = 2$, on a :

$$u_0 = 5, \quad u_1 = q \times u_0 = 2 \times 5 = 10, \quad u_2 = q \times u_1 = 2 \times 10 = 20, \quad u_3 = q \times u_2 = 2 \times 20 = 40, \ldots$$

8.4.2 Calcul du terme général

Théorème 8.2
- si u est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$;
- si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = a \times b^n$, alors, u est la suite géométrique de premier terme $u_0 = a$ et de raison b.

Exemple 8.14
En reprenant la suite géométrique de l'exemple 8.13, on a :

$$\text{pour tout } n \in \mathbf{N}, \quad u_n = u_0 \times q^n = 5 \times 2^n$$

Remarque 8.6
Si le premier terme est u_1, on a : pour tout $n \in \mathbf{N}^*, u_n = u_1 \times q^{n-1}$. De façon plus générale, si u est une suite géométrique de raison q alors pour tous les entiers n et p on a :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

[2]La suite nulle est la suite dont tous les termes sont égaux à zéro.

8.4.3 Calcul de la somme des premiers termes

Propriété 8.2
Soit q un réel différent de 0 et de 1. Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$1 + q + q^2 + \dots \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exemple 8.15
Si $q = 2$,
$1 + q + q^2 = 1 + 2 + 4 = 7$. En appliquant la formule : $1 + q + q^2 = \frac{1-2^3}{1-2} = \frac{-7}{-1} = 7$.
$1 + 2 + \cdots + 2^{10} = \frac{1-2^{11}}{1-2} = 2047$.

Propriété 8.3
Soit u une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, avec q différent de 1 et de 0. On a :

$$u_0 + u_1 + \dots \dots u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Démonstration :
$u_0 = u_0 \times 1$, $u_1 = u_0 \times q$, $u_2 = u_0 \times q^2$,.... Ainsi, on a :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + \cdots + u_0 \times q^n = u_0 \left(1 + q + q^2 + \cdots + q^n\right)$$

En utilisant la propriété 8.2, on obtient :

$$u_0 + u_1 + \dots \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Remarque 8.7
Si u est une suite géométrique de raison q, la somme des premiers termes peut aussi s'écrire :

$$S = \frac{\text{premier terme} - q \times \text{dernier terme}}{1 - q}$$

Exemple 8.16
Un salarié est embauché le 1$^{\text{er}}$ janvier 2008 pour un salaire net mensuel de 1 000€ par mois et avec une augmentation de 0,4% nets par mois dès le deuxième mois.
On note u_n le salaire perçu à l'issue du n^{e} mois. Ainsi u est une suite géométrique de premier terme $u_1 = 1\ 000$ et de raison $q = 1 + \frac{0{,}4}{100} = 1{,}004$. En effet, chaque salaire est obtenu en multipliant le précédent par le coefficient multiplicateur de l'augmentation soit $1 + \frac{0{,}4}{100} = 1{,}004$.
Le salaire perçu en décembre 2008 est donc $u_{12} = 1\ 000 \times 1{,}004^{11} \approx 1\ 044{,}89$€.
Le total des salaires perçus au cours de la première année est donc :

$$S = \frac{1^{\text{er}} \text{ terme - } q \text{ fois dernier terme}}{1 - q} = \frac{1\ 000 - 1{,}004 \times 1\ 044{,}89}{1 - 1{,}004} = 12\ 267{,}39$$

« *Deux choses sont infinies : l'univers et la bêtise humaine ; mais en ce qui concerne l'univers, je n'en ai pas encore acquis la certitude absolue.* »
Albert Einstein

Chapitre 9

Comportement asymptotique

L'objet du chapitre est l'étude du comportement des nombres $f(x)$ (où f est une fonction numérique) lorsque x devient « très grand » en valeur absolue ou qu'il se rapproche d'une valeur interdite de la fonction.

Exemple 9.1
La fonction f définie par $f(x) = 2 + \frac{1}{x+1}$ a pour valeur interdite $x = -1$: il est impossible de calculer $f(-1)$.
L'objet du chapitre sera donc d'étudier les valeurs de $f(x)$ lorsque x est une valeur très proche -1 ou encore lorsque x devient très grand en valeur absolue.

9.1 Limites d'une fonction lorsque x tend vers $+\infty$

Dans ce paragraphe, f est une fonction dont l'ensemble de définition contient un intervalle du type $]a; +\infty[$.

9.1.1 Limite infinie en $+\infty$

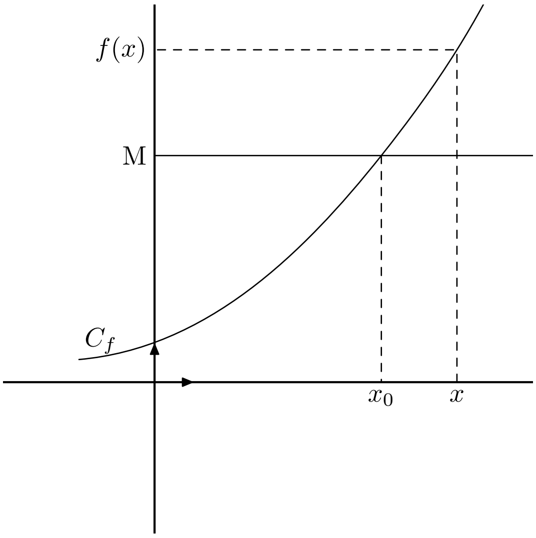
Définition 9.1

- On dit que f a pour limite $+\infty$ lorque x tend vers $+\infty$ si, lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, les nombres $f(x)$ peuvent devenir plus grands que n'importe quel réel M fixé, aussi grand soit-il. On écrit :

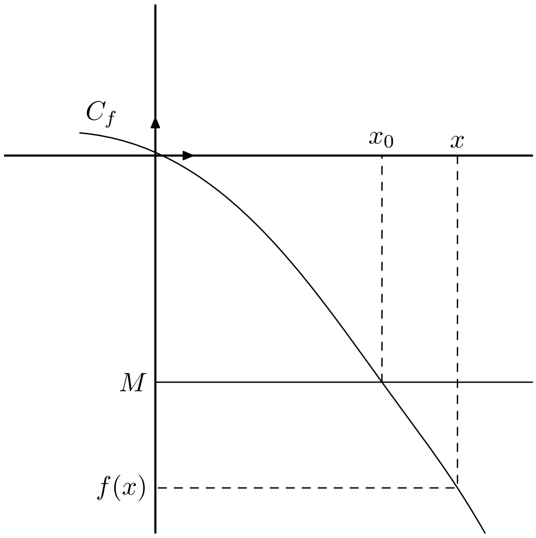
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

- On dit que f a pour limite $-\infty$ lorque x tend vers $+\infty$ si, lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, les nombres $f(x)$ sont négatifs et peuvent devenir en valeur absolue plus grands que n'importe quel réel M fixé, aussi grand soit-il. On écrit :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

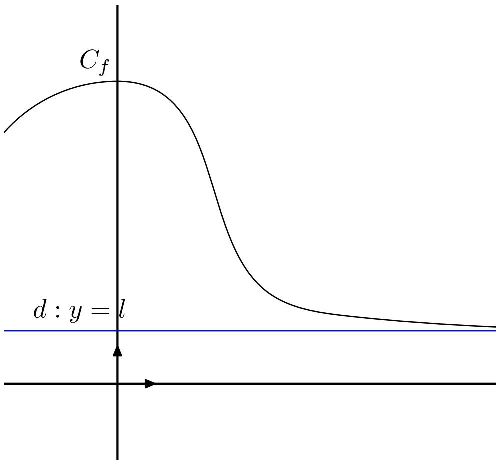
Propriété 9.1 (admise)
Les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$ ont pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

9.1.2 Limite réelle en $+\infty$. Asymptote horizontale en $+\infty$

Définition 9.2
Soit l un réel. On dit que f a pour limite l lorque x tend vers $+\infty$ si, lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, les nombres $f(x)$ se rapprochent de plus en plus de l. C'est à dire que pour tout nombre positif α, aussi proche de 0 soit-il, les nombres $f(x)$ sont tous dans l'intervalle $]l-\alpha; l+\alpha[$ pour les x suffisamment grands. On écrit :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

Dans ce cas, on dit que la droite d'équation $y = l$ est *asymptote horizontale* à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$: la courbe se rapproche de plus en plus de la droite lorsque les x deviennent de plus en plus grands.



Propriété 9.2 (admise)
Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ ont pour limite $l = 0$ en $+\infty$.

9.2 Limite d'une fonction lorsque x tend vers $-\infty$

Dans ce paragraphe, f est une fonction dont l'ensemble de définition contient un intervalle du type $]-\infty; b[$.

9.2.1 Limite infinie en $-\infty$

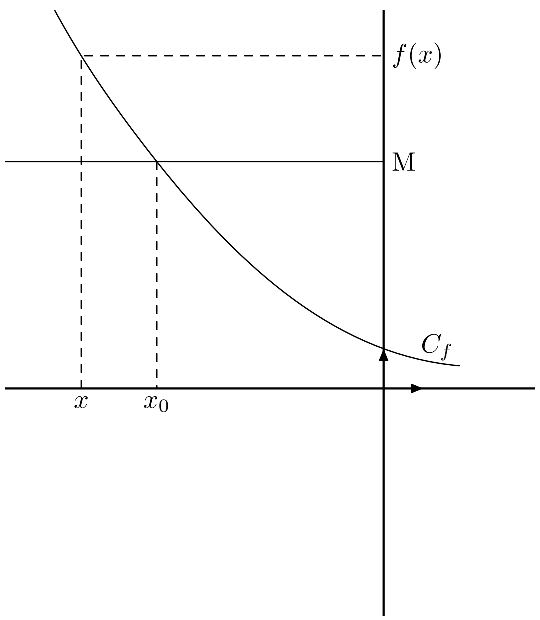
Définition 9.3

– On dit que f a pour limite $+\infty$ lorque x tend vers $-\infty$ si, lorsque pour les x négatifs prenant des valeurs de plus en plus grandes en valeurs absolues, les nombres $f(x)$ peuvent devenir plus grands que n'importe quel réel M fixé, aussi grand soit-il. On écrit :

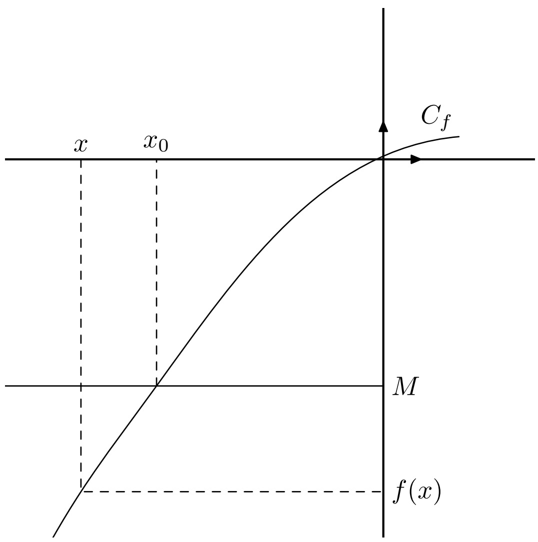
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

– On dit que f a pour limite $-\infty$ lorque x tend vers $-\infty$ si, lorsque pour les x négatifs prenant des valeurs de plus en plus grandes en valeurs absolues, les nombres $f(x)$ sont négatifs et peuvent devenir en valeur absolue plus grands que n'importe quel réel M fixé, aussi grand soit-il. On écrit :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Propriété 9.3 (admise)

– La fonction $x \mapsto x^2$ a pour limite $+\infty$ en $-\infty$.

– La fonction $x \mapsto x^3$ a pour limite $-\infty$ en $-\infty$.

On écrit : $\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

9.2.2 Limite réelle en $-\infty$. Asymptote horizontale en $-\infty$

Définition 9.4

Soit l un réel. On dit que f a pour limite l lorque x tend vers $-\infty$ si, lorsque x est négatif et qu'il prend des valeurs de plus en plus grandes en valeurs absolues, les nombres $f(x)$ se rapprochent de plus en plus de l. C'est à dire que pour tout nombre positif α, aussi proche de 0 soit-il, les nombres $f(x)$ sont tous dans l'intervalle $]l-\alpha; l+\alpha[$ pour les x négatifs avec $|x|$ suffisamment grand. On écrit :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$$

Dans ce cas, on dit que la droite d'équation $y = l$ est *asymptote horizontale* à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$: la courbe se rapproche de plus en plus de la droite lorsque les x sont négatifs et qu'ils deviennent de plus en plus grands en valeurs absolues.

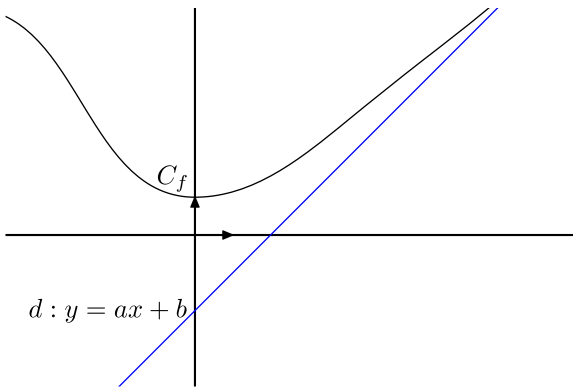
Propriété 9.4 (admise)
Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ ont pour limite 0 en $-\infty$. On écrit :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0; \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0; \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

9.2.3 Asymptote oblique

Définition 9.5
On dit que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$ est *asymptote oblique* en $+\infty$ (resp. $-\infty$) à la courbe $\mathcal{C}$ représentant une fonction f lorsque :

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0 \qquad \left(\text{resp. } \lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0\right)$$



d est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

9.3 Limite d'une fonction lorsque x tend vers un réel a

Dans cette partie, on considère une fonction numérique f ayant un ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. a désigne un réel vérifiant une des deux propositions ci-dessous :
– ou bien $a \in \mathcal{D}_f$,
– ou bien a est une borne d'un intervalle contenu dans $\mathcal{D}_f$.

Exemple 9.2
Si f est une fonction dont l'ensemble de définition est $\mathcal{D}_f =]-\infty; -1[\cup]+1; +\infty[$, (par exemple, f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$) alors soit $a \in \mathcal{D}_f$, soit $a = -1$ ou $a = 1$.

9.3.1 Limite infinie en a

Définition 9.6

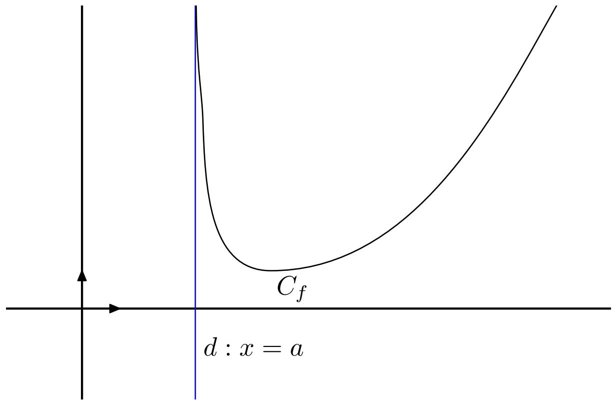
- On dit que f a pour limite $+\infty$ en a (ou quand x tend vers a) si, lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a, les nombres $f(x)$ peuvent devenir plus grands que n'importe quel réel M fixé. On écrit :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

- On dit que f a pour limite $-\infty$ en a (ou quand x tend vers a) si, lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a, les nombres $f(x)$ sont négatifs et peuvent devenir, en valeurs absolues, plus grands que n'importe quel réel M fixé. On écrit :

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Dans ce cas, on dit que la droite d'équation $x = a$ est *asymptote verticale* à la courbe $\mathcal{C}_f$.



Exemple 9.3

Soit f la fonction définie sur $\mathcal{D}_f =]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

$a = 0$ est une borne de $\mathcal{D}_f$. On peut donc étudier la limite de f lorsque x tend vers 0 : lorsque x se rapproche de 0, $\sqrt{x}$ se rapproche également de 0 tout en restant positif, donc les nombres $f(x)$ deviennent aussi grands qu'on le souhaite. Ainsi :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

L'axe des ordonnées (d'équation $x = 0$) est donc asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

Remarque 9.1

La fonction inverse ($f : x \mapsto \frac{1}{x}$) n'a pas une mais deux limites en 0 : en effet, si x se rapproche de plus en plus de 0, soit on a $x < 0$ soit on a $x > 0$.

Dans le premier cas, les valeurs de $f(x)$ sont négatives et leurs valeurs absolues deviennent de plus en plus grandes ; on dit que la limite à gauche en 0 est $-\infty$:

$$\lim_{x \to 0;\ x<0} f(x) = -\infty$$

Dans le deuxième cas, les valeurs de $f(x)$ sont positives et deviennent de plus en plus grandes ; on dit que la limite à droite en 0 est $+\infty$:

$$\lim_{x \to 0;\ x>0} f(x) = +\infty$$

9.3.2 Limite finie en a

Définition 9.7
Soit $l \in \mathbf{R}$. On dit que f a pour limite l en a (ou quand x tend vers a) si, lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a, les nombres $f(x)$ se rapprochent de plus en plus de l. On écrit :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

On admet les résultats suivants :
- lorsque $a \geq 0$, $\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.
- si f est une fonction polynôme et $a \in \mathbf{R}$, on a : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- si f est le quotient de deux polynômes et $a \in \mathcal{D}_f$, on a : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

9.4 Théorèmes sur les limites

Dans les tableaux suivants, l et l' sont des nombres réels finis. Ces tableaux résument les propriétés à connaitre sur les sommes, produits et quotients de limites de deux fonctions f et g.
Ces propriétés sont valables pour des limites en $+\infty$, en $-\infty$ ou en a. Lorsque les cases contiennent « F.I. », il s'agit d'une forme indéterminée : on ne peut pas conclure (ça dépend des cas).

9.4.1 Limite d'une somme

Si f a pour limite	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors, $f+g$ a pour limite	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

9.4.2 Limite d'un produit

Si f a pour limite	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et si g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+/-\infty$
$f \times g$ a pour limite	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

9.4.3 Limite d'un quotient $\frac{f}{g}$

Cas où la limite de la fonction g n'est pas nulle

Si f a pour limite	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+/-\infty$
et si g a pour limite	$l' \neq 0$	$+/-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$+/-\infty$
$\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Cas où la limite de la fonction g est nulle

Si f a pour limite	$l>0$ ou $+\infty$	$l>0$ ou $+\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	0
et si g a pour limite	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
$\frac{f}{g}$ a pour limite	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

9.4.4 Formes indéterminées

Les cas de formes indéterminées sont au nombre de quatre :

$$\infty - \infty; \quad 0 \times \infty; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad \frac{0}{0}$$

9.5 Exemples

9.5.1 Étude de fonction

Soit f la fonction définie par $f(x) = 3 + \dfrac{2}{x+2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Étudier la fonction f, donner le tableau de variation et tracer sa courbe représentative.

1. f est définie pour les valeurs de x qui n'annulent pas le dénominateur, soit pour $x \neq -2$. $\mathcal{D}_f = \mathbf{R} \backslash \{-2\}$ ou encore $]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$.
2. Les bornes de $\mathcal{D}_f$ sont $-\infty$, -2 et $+\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} (2) = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} (x+2) = -\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x+2} = 0 \quad \text{ainsi,} \lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \to +\infty} (2) = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} (x+2) = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x+2} = 0 \quad \text{ainsi,} \lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$$

Donc la droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Il reste à étudier la limite lorsque x tend vers -2. Ici, deux études sont à faire : à gauche (lorsque x reste inférieur à -2) et à droite (lorsque x reste supérieur à -2).

– si $x < -2$, alors $x + 2 < 0$. Donc $\displaystyle\lim_{x \to -2, x<-2} \frac{2}{x+2} = -\infty$ ainsi, $\displaystyle\lim_{x \to -2,\ x<-2} f(x) = -\infty$.

– si $x > -2$, alors $x + 2 > 0$. Donc $\displaystyle\lim_{x \to -2, x>-2} \frac{2}{x+2} = +\infty$ ainsi, $\displaystyle\lim_{x \to -2,\ x<-2} f(x) = +\infty$.

Donc la droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

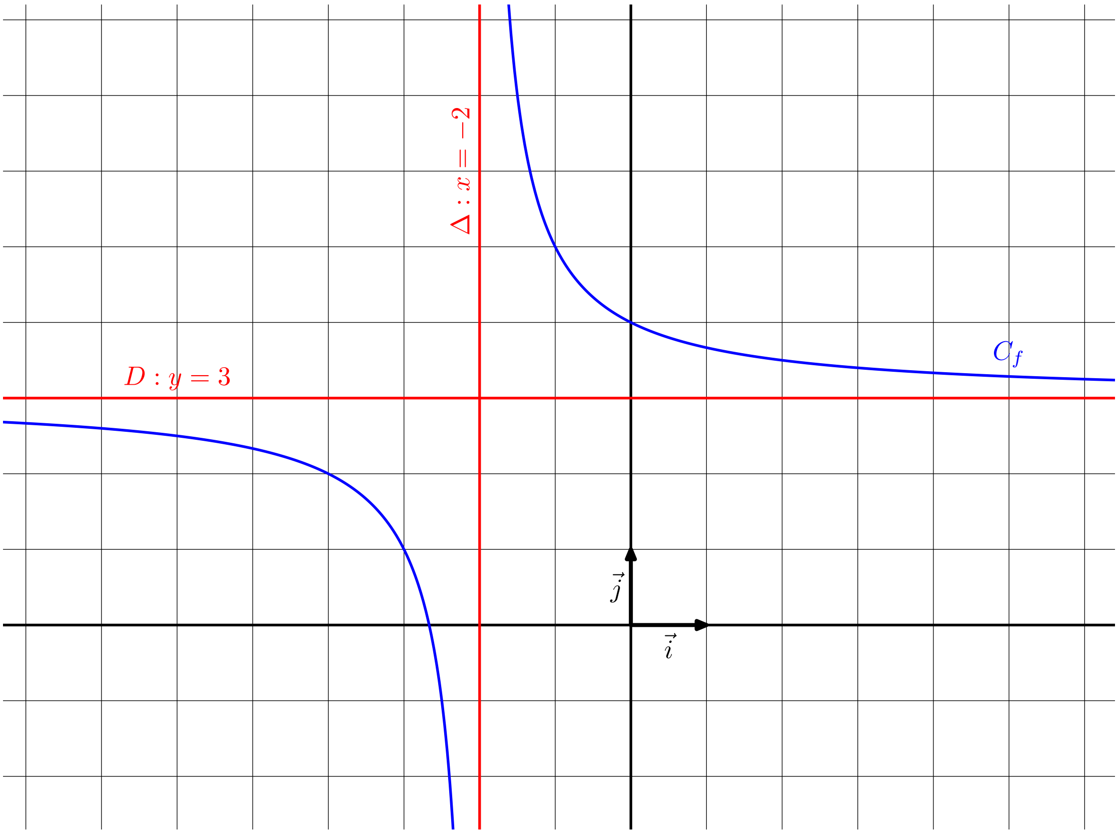
3. La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition. Donc :

$$\text{pour } x \neq -2, f'(x) = 0 + \frac{0 \times (x+2) - 2 \times 1}{(x+2)^2} = -\frac{2}{(x+2)^2} < 0$$

Ainsi, f est strictement décroissante sur $]-\infty; -2[$ et sur $]-2; +\infty[$. On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
f	3	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	3

Après avoir établi un tableau de valeur on obtient la courbe suivante avec le tracé des deux asymptotes :



9.5.2 Levée d'indétermination

Exemple 9.4

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$. Le calcul de la limite de $f(x)$ en $-\infty$ ne pose pas de problème (somme de limites valant $+\infty$ et de 5). Par contre lors du calcul de la limite en $+\infty$ on se trouve face à une indétermination du type $+\infty - \infty$. Pour « lever l'indétermination », nous allons factoriser l'expression de $f(x)$ par le « monôme » de plus haut degré :

$$f(x) = x^2 \times 2 - x^2 \times \frac{3}{x} + x^2 \times \frac{5}{x^2} = x^2 \left(2 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}\right)$$

Et on a :

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty} 2 = 2 \\ \lim_{x\to+\infty} -\frac{3}{x} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x^2} = 0\end{array}\right\} \text{donc :} \quad \left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty} \left(2 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}\right) = 2 \\ \\ \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty\end{array}\right\} \text{par produit : } \lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$$

Remarque 9.2

Cette méthode (factorisation par le monôme de plus haut degré) permet de lever toutes les indéterminations de fonctions polynômes en $+\infty$ ou en $-\infty$.

Exemple 9.5

Calculer la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de $x^4 + 2x^3 - x^2 - 3x + 4$.

Annexe A

Second degré

Voici le programme permettant à votre calculatrice de vous donner le discriminant et les éventuelles racines d'un polynôme du second degré s'écrivant sous la forme $Ax^2 + Bx + C$:

Programme pour une casio :
"CALCUL DISCRIMINANT :"
"$AX^2 + BX + C$"
"A" ?→A
"B" ?→B
"C" ?→C
"DELTA=" :$B^2 - 4 \times A \times C \to D$◢
D=0⇒Goto 1
D<0⇒Goto 2
D>0⇒Goto 3
Lbl 1
"UNE SOLUTION"
$-B/(2 \times A)$◢
Stop
Lbl 2
"AUCUNE SOLUTION"
Stop
Lbl 3
"2 SOLUTIONS"
"X1=" :$(-B - \sqrt{}D)/(2 \times A)$◢
"X2=" :$(-B + \sqrt{}D)/(2 \times A)$◢
Stop

Programme pour une TI :
PROGRAM :DEGRE2
Disp "CALCUL DISCRIMINANT :"
Disp "$AX^2 + BX + C$"
Prompt A,B,C
ClrHome
$B^2 - 4 \times A \times C \to D$
Disp "DISCRIMINANT",D
If abs(D)=0
Then
Disp "1 SOLUTION",$-B/(2 \times A)$◢
Else
If $D > 0$
Then
Disp "2 SOLUTIONS"
Disp $(-B - \sqrt{}(D))/(2 \times A)$◢
Disp $(-B + \sqrt{}(D))/(2 \times A)$◢
Else
Disp "AUCUNE SOLUTION"
End
End

« *Pascal combattait ses maux de têtes avec des problèmes de géométrie... Moi je combattais la géométrie en feignant d'avoir des maux de tête.* »
Tristan Bernard

Annexe B

Calculatrices et statistiques

Voici le détail des manipulations à effectuer pour obtenir les paramètres statistiques et la boite à moustaches d'une série statistique à une variable x ; chaque x_i ayant un effectif n_i.

Pour les « casio »

Entrée de la série : Sélectionner le menu 2 et entrer dans la colonne `LIST1` les valeurs de la série, puis dans la colonne `LIST2` les effectifs correspondants.

Obtention des paramètres :

- Appuyer sur `F2(CALC)`, puis sur `F6(SET)` (ou `F4` sur la graph25).
- Sur la ligne `1VARXLIST`, indiquer `LIST1` avec les touches de fonctions ; sur la ligne `1VARFREQ`, indiquer `LIST2`. Terminer en appuyant sur `QUIT`.
- En appuyant sur la touche de fonction correspondant à `1VAR`, on obtient les paramètres de la série : $\overline{x}$ (moyenne), x_{σ_n} (écart type), n (effectif total), Q_1 (premier quartile), ….

Tracé de la boite à moustaches :

- Dans le menu 2 (STAT), selectionner le menu `GRAPH`.
- Sélectionner le menu `SET` (touche `F6` ou `F4` deux fois sur la graph25).
- Sur la ligne `G-Type`, choisir l'option `BOX` (en appuyant éventuellement sur `F4`).
- Sur la ligne `1VARXLIST`, indiquer `LIST1` avec les touches de fonctions ; sur la ligne `1VARFREQ`, indiquer `LIST2`. Terminer en appuyant sur `QUIT`.
- Appuyer sur `F1 (GRAPH1)` pour obtenir la boite à moustaches.

Pour les « TI »

Entrée de la série : Appuyer sur la touche `STAT`, puis sur `1:EDIT`. Dans la colonne `L1`, saisir les valeurs de la série et dans la colonne `L2` les effectifs correspondants. Appuyer à nouveau sur `STAT`.

Obtention des paramètres :

- Sélectionner l'onglet `CALC` (avec la flèche droite) et appuyer sur la touche `1:1-Var Stats`. Appuyer sur `2ND`, puis `1` pour afficher `L1`, puis `,2ND 2` (ne pas oublier la « `,` »)
- Appuyer sur `ENTER` pour obtenir les paramètres : $\overline{x}$ (moyenne), σ_x (écart-type), n (effectif total), Q_1 (premier quartile), ….

Tracé de la boite à moustaches :

- Sélectionner le menu `STATPLOT` en appuyant sur `2ND` et `Y=`.
- Appuyer sur `1` et sélectionner l'option `ON`.
- Sur la ligne `Type`, sélectionner la boite à moustaches (cinquième type de graphiques).
- Sur la ligne `XList`, choisir `L1` (en appuyant sur `2ND` puis `1`).
- Sur la ligne `Freq`, choisir `L2`
- Dans le menu `WINDOW`, indiquer comme `Xmin` un nombre inférieur à la plus petite valeur de la série, et comme `Xmax`, un nombre supérieur à la valeur maximale de la série.
- Appuyer sur la touche `GRAPH`.

« *Les maths c'est comme l'amour. Une idée simple mais qui peut parfois se compliquer* »
ROBERT DRABEK

Annexe C

Dérivées des fonctions usuelles

Dans la suite de ce formulaire, k est un réel quelconque fixé et n est un entier naturel non nul.

Fonction f	Dérivée f'	Ensemble de dérivabilité de f
$x \mapsto k$	$x \mapsto 0$	$\mathbf{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	$\mathbf{R}$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto 2x$	$\mathbf{R}$
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbf{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbf{R}_+^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbf{R}^*$

- Si f est dérivable sur I, alors, kf est dérivable sur I, et $(kf)' = kf'$.
- Si u et v sont dérivables sur I, alors $u+v$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u' + v'$.
- Si u et v sont dérivables sur I, alors uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.
- Si u et v sont dérivables sur I, avec pour $x \in I, v(x) \neq 0$, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$.

Index

A
antécédent, 19
approximation affine, 37
arithmétique, 60
asymptote
    horizontale, 66, 68
    oblique, 68
    verticale, 69
augmentation, 7

B
boîte à moustaches, 48, 75
boxplot, 48, 75

C
calculatrice, 73, 75
combinaisons linéaires, 13

D
décile, 48
dérivée, 37, 77
    nombre dérivé, 36
diagramme en bâtons, 44
diagramme en boîtes, 48
diminution, 7
discriminant, 29, 73
distribution de fréquences, 51
droites parallèles, 11

E
écart-type, 49
écarts à la moyenne, 47
effectif, 43
équation de degré 2, 29, 73
équation de droite, 11
équiprobabilité, 53
étendue, 47
événement, 51
événement contraire, 54
éventualité, 51
expérience aléatoire, 51

F
factorisation, 33
fonction, 19
    affine, 21, 23
    associée, 24
    carrée, 22
    composée, 27
    dérivée, 37
    inverse, 22, 24, 38
    linéaire, 21
    produit par un réel, 26
    racine carrée, 22, 24, 38
    somme de, 26
fréquence, 43

G
Gauss, 14
géométrique, 62

H
histogramme, 43

I
image, 19
indice, 8
inéquation, 14
inéquation de degré 2, 32
intersection, 55

L
limite, 65, 70
    forme indéterminée, 71
loi de probabilité, 52
loi des grands nombres, 52

M
médiane, 45
mode, 45
moyenne, 46
moyenne mobile, 50

N
nombre dérivé, 36

P
parabole, 31

pourcentage, 7
  addition, 9
  comparaison, 10
  variation, 7, 8
programmation linéaire, 16

Q

quartile, 47

R

racine, 30
raison, 60, 62
résolution graphique, 20
réunion, 55

S

somme des premiers termes, 61, 63
statistiques, 75
substitution, 13
suite, 57
  arithmétique, 60
  géométrique, 62
  récurrente, 58
  variations, 60
système, 12
  résolution, 13

T

tangente, 36
taux de variation, 35
terme général, 60, 62

U

univers, 51

V

valeur interdite, 65
variance, 49
variations, 22, 25, 41