Cours de mathématiques

Thomas Rey

Classe de Terminale ES
27 mai 2008

Table des matières

Chapitre 1

Équations de droites. Second degré

1.1 Équation de droite

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, une droite d a une équation du type $ax+by+c=0$. Cela signifie que si un point A appartient à la droite d, alors les coordonnées de A vérifient l'équation de la droite ; réciproquement, si un point B a ses coordonnées qui vérifient l'équation de la droite d, alors B appartient à la droite d.

Remarque 1.1
Une même droite a plusieurs équations : si d a pour équation $ax+by+c=0$, alors quelque soit $k\in\mathbf{R}^*$, $(ka)x+(kb)y+(kc)=0$ est aussi une équation de d.

Si $c\neq 0$, (c'est à dire si d ne passe pas par l'origine du repère) on peut donc toujours trouver une équation de d sous la forme $ax+by+1=0$.

Remarque 1.2
Si la droite d n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, alors elle admet une équation du type $y=mx+p$. Cette équation est appelée *équation réduite* de d

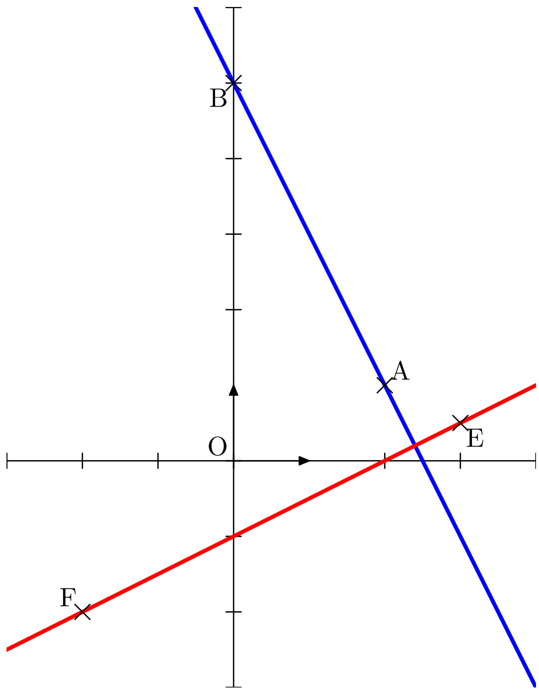
Exemple 1.1
Soit d la droite d'équation $2x+y-5=0$. Pour tracer cette droite dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$:

– on détermine deux points A et B dont les coordonnées vérifient l'équation. Par exemple, en *choisissant*[1] $x_A=2$, on obtient : $4+y-5=0$ soit $y=1$. Donc le point $A(2;1)\in d$. De même, en prenant $x_B=0$, on obtient $y_B=5$ donc le point $B(0;5)\in d$.
– on place les deux points dans le repère et on trace la droite (AB) : c'est la droite d.

Pour déterminer l'équation de la droite (EF) où $E(3;\frac{1}{2})$ et $F(-2;-2)$:

– (EF) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées donc elle admet une équation du type $y=mx+p$. En remplaçant par les coordonnées de E puis de F, on obtient le système : $\begin{cases}\frac{1}{2}=3m+p\\ -2=-2m+p\end{cases}$
– En résolvant on obtient : $m=\frac{1}{2}$ et $p=-1$. La droite (EF) a donc pour équation $y=\frac{1}{2}x-1$.

[1] On aurait pu choisir n'importe quelle autre valeur de x_A.



1.2 Polynôme du second degré

Définition 1.1
On appelle polynôme du second degré de coefficients a, b et c la fonction f définie par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ où } a \in \mathbf{R}^*, b \in \mathbf{R}, c \in \mathbf{R}$$

1.2.1 Résolution d'une équation du second degré

Définition 1.2
Une équation du second degré à une inconnue x est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$, avec a, b et c trois réels et $a \neq 0$.

Définition 1.3
On appelle *discriminant* de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ le nombre réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'existence de solutions à l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dépend du signe de Δ :

Théorème 1.1
Soit $ax^2 + bx + c = 0$ un équation du second degré et Δ son discriminant.

si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution.

si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$

si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.

Exemple 1.2
Résoudre l'équation $2x^2 - 2x = -5$.

On écrit cette équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ et on obtient $2x^2 - 2x + 5 = 0$.

On calcule $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 2 \times 5 = 4 - 40 = -36 < 0$. Donc cette équation n'a pas de solution : $\mathscr{S} = \emptyset$.

Exemple 1.3
Résoudre l'équation $x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{25}{9} = 0$

On calcule $\Delta = \left(-\frac{10}{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times \frac{25}{9} = \frac{100}{9} - \frac{100}{9} = 0$.

L'équation a donc une unique solution $x_0 = -\frac{-\frac{10}{3}}{2\times 1} = \frac{5}{3}$.

Exemple 1.4
Résoudre l'équation $2x^2 + \frac{11}{2}x - \frac{3}{2}$.

On calcule $\Delta = \left(\dfrac{11}{2}\right)^2 - 4 \times 2 \times \left(-\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{121}{4} + 12 = \dfrac{169}{4} > 0$. Donc l'équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-\frac{11}{2} - \sqrt{\frac{169}{4}}}{2 \times 2} = \frac{-\frac{11}{2} - \frac{13}{2}}{4} = -\frac{24}{8} = -3.$$

$$x_1 = \frac{-\frac{11}{2} + \sqrt{\frac{169}{4}}}{2 \times 2} = \frac{-\frac{11}{2} + \frac{13}{2}}{4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

$\mathscr{S} = \left\{-3; \frac{1}{4}\right\}$.

1.2.2 Interprétation graphique

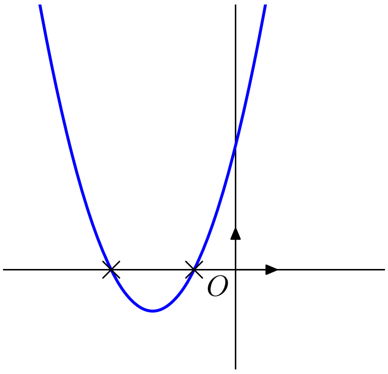
Soit $(E) : ax^2 + bx + c = 0$ une équation du second degré ($a \neq 0$).

On peut associer à (E) le polynôme du second degré $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$. Les solutions de (E) sont alors les réels x tels que $f(x) = 0$. Ces nombres sont appelés les *racines* du polynôme du second degré f.

La représentation graphique de f dans un repère orthogonal est une parabole $\mathscr{P}_f$. Graphiquement, les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les *abscisses* des points d'intersection de $\mathscr{P}_f$ et de la droite d'équation $y = 0$ (axe des abscisses).

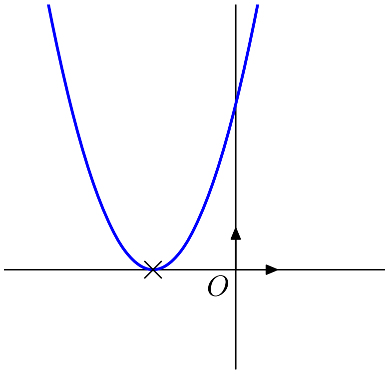
Exemple 1.5
On considère trois polynômes du second degré f, g et h et on note $\mathscr{P}_f$, $\mathscr{P}_g$, $\mathscr{P}_h$, leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal.

$f(x) = x^2 + 4x + 3$



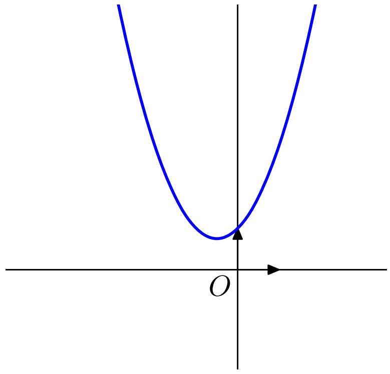
$\mathscr{P}_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses $x_1 = -3$ et $x_2 = -1$. L'équation $f(x) = 0$ a donc deux solutions : -3 et -1.
On peut retrouver ce résultat par le calcul :
$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 > 0$.
Les solutions sont :
$\frac{-4-\sqrt{4}}{2} = -3$, et $\frac{-4+\sqrt{4}}{2} = -1$

$g(x) = (x+2)^2$



$\mathscr{P}_g$ est *tangent* à l'axe des abscisses en un point d'abscisses $x_0 = -2$. L'équation $g(x) = 0$ a donc une solution : -2.
On peut retrouver ce résultat par le calcul :
$g(x) = x^2 + 4x + 4$, donc :
$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$.
La solution est :
$\frac{-4}{2} = -2$

$h(x) = x^2 + x + 1$



$\mathscr{P}_h$ et l'axe des abscisses n'ont pas de point commun : l'équation $h(x) = 0$ n'a pas de solution.
On peut retrouver ce résultat par le calcul :
$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$.
Donc l'équation n'a pas de solution.

On peut se poser le problème inverse du paragraphe précédent : soit $\mathscr{P}$ une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ dans un repère orthogonal. On ne connait pas la position précise de $\mathscr{P}$ dans le repère, mais on peut étudier sa position par rapport à l'axe des abscisses ; en effet :

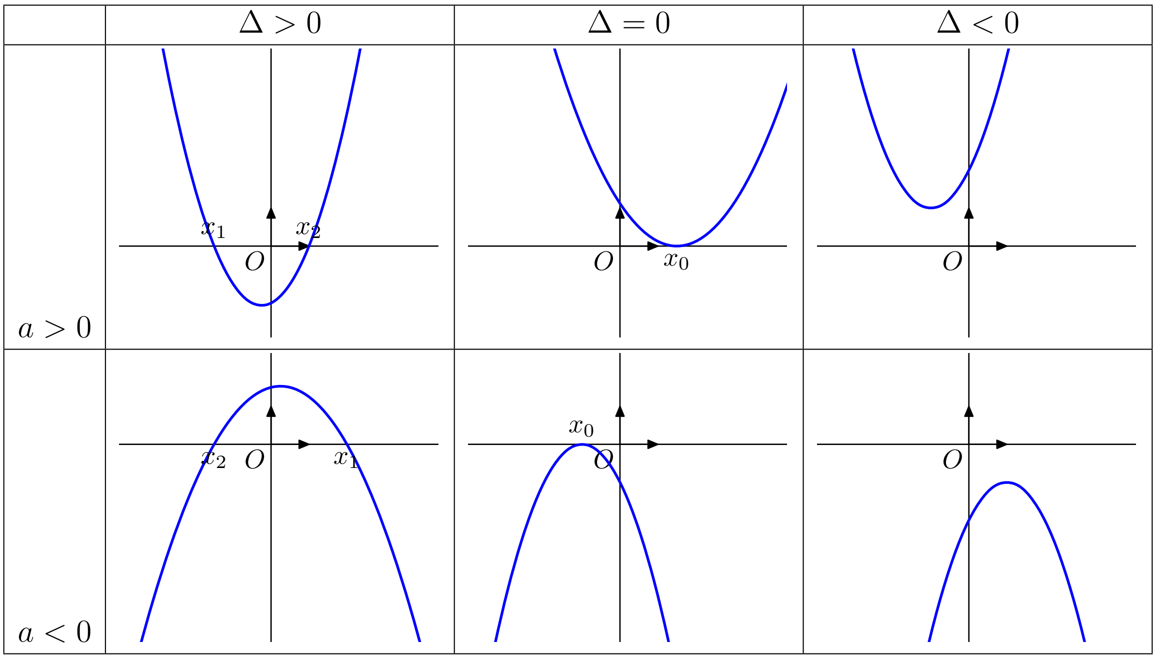
si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions donc $\mathscr{P}$ coupe l'axe des abscisses en deux points.

si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution : on dit que $\mathscr{P}$ est *tangente* à l'axe des abscisses.

si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution donc $\mathscr{P}$ ne rencontre pas l'axe des abscisses.

De plus, on admettra que si $a > 0$, la parabole est « tournée » vers le haut, et si $a < 0$, la parabole est « tournée » vers le bas.

On regroupe les résultats dans le tableau suivant :



1.2.3 Inéquation du second degré

Une inéquation du second degré peut s'écrire sous la forme $ax^2+bx+c \geq 0$ ou $ax^2+bx+c > 0$.

Théorème 1.2
Soit ax^2+bx+c un trinôme du second degré. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

si $\Delta < 0$, pour tout $x \in \mathbf{R}$, le nombre ax^2+bx+c est du signe de a.

si $\Delta = 0$, pour tout $x \neq -\frac{b}{2a}$, le nombre ax^2+bx+c est du signe de a.

si $\Delta > 0$, le nombre ax^2+bx+c
- est du signe de a pour x « à l'extérieur des racines » de ax^2+bx+c,
- est du signe contraire de a « à l'intérieur des racines » de ax^2+bx+c.

Exemple 1.6
On considère le trinôme $6x^2-10x-4$. $\Delta = 10^2 - 4\times 6\times(-4) = 196$. Les racines du trinôme sont :

$$x_1 = \frac{10-\sqrt{196}}{2\times 6} = -\frac{1}{3} \text{ et } x_2 = \frac{10+\sqrt{196}}{2\times 6} = 2$$

- Pour $x \in \left]-\frac{1}{3}; 2\right[$ (x à l'intérieur des racines), $6x^2-10x-4$ est du signe contraire de 6 soit $6x^2-10x-4 < 0$
- Pour $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[\cup]2;+\infty[$ (x à l'extérieur des racines), $6x^2-10x-4$ est du signe de 6 soit $6x^2-10x-4 > 0$

Exemple 1.7
Résoudre l'inéquation $2x^2-3x-3 < x^2-5x$.
L'inéquation proposée peut s'écrire sous la forme $2x^2-3x-3-x^2+5x < 0$ soit $x^2+2x-3 < 0$.
On calcule le discriminant : $\Delta = 2^2 - 4\times 1\times(-3) = 16$. Les racines sont $x_1 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2} = -3$ et $x_2 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2} = 1$.
Le trinôme x^2+2x-3 est strictement négatif pour x à l'intérieur des racines soit $x \in]-3;1[$.

1.2.4 Factorisation d'un trinôme du second degré

On admet le théorème 1.3 :

Théorème 1.3
On considère le trinôme $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
– Si ce trinôme n'a pas de racine ($\Delta < 0$), il ne peut pas être factorisé.
– Si le trinôme a une racine unique x_0 ($\Delta = 0$), on a : $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.
– Si le trinôme a deux racines x_1 et x_2, ($\Delta > 0$), on a : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Exemple 1.8
En reprenant le trinôme de l'exemple 1.6 :

$$6x^2 - 10x - 4 = 6\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 2)$$

Chapitre 2

Fonction. Continuité

Dans ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbf{R}$.

2.1 Fonction

2.1.1 Généralités

Définition 2.1
Une *fonction numérique* f permet d'associer à un nombre x un autre nombre qu'on note $f(x)$. Ce nombre $f(x)$ est appelé image de x par la fonction f. L'ensemble des x pour lesquels $f(x)$ existe est appelé l'ensemble de définition de f. On le note généralement $\mathcal{D}_f$.

On dit qu'une fonction f est strictement croissante sur I lorsque pour tout a et tout b de I, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$.

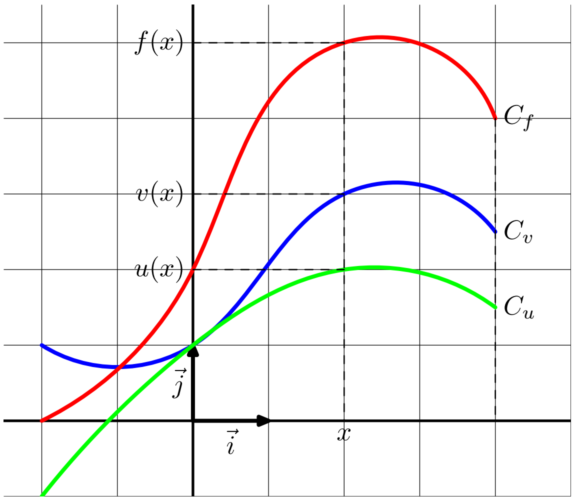
On dit qu'une fonction f est strictement décroissante sur I lorsque pour tout a et tout b de I, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.

On dit qu'une fonction f est constante sur I lorsque pour tout a et b de I, $f(a) = f(b)$.

2.1.2 Opérations sur les fonctions

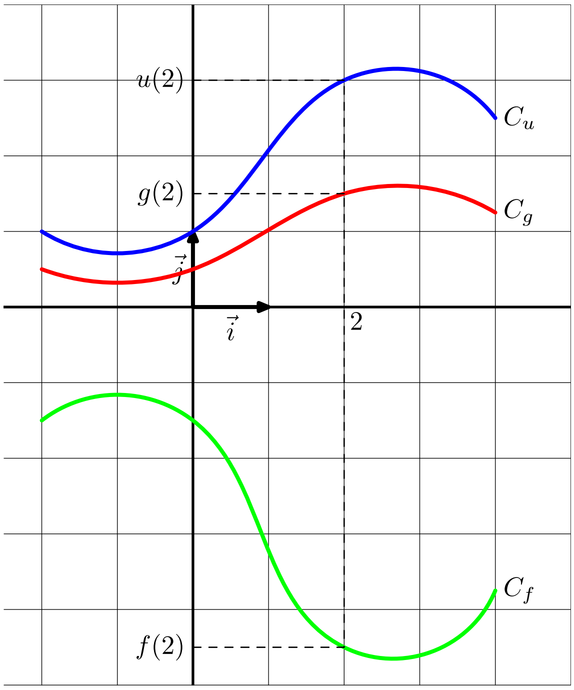
Définition 2.2
Soit u et v deux fonctions définies sur un intervalle I. On dit que la fonction f est la *somme* des fonctions u et v, si pour tout $x \in I$, $f(x) = u(x) + v(x)$.

Exemple 2.1
Sur le graphique ci-dessous, la fonction f définie sur $I = [-2; 4]$ est la somme des fonctions u et v : pour tout $x \in I, f(x) = u(x) + v(x)$.



Définition 2.3
Soit u une fonction numérique définie sur I, et λ un réel. On appelle produit de λ par u la fonction définie sur I et notée (λu) qui, à tout x de I associe le nombre $(\lambda u)(x) = \lambda \times u(x)$.

Exemple 2.2
Sur le graphique ci-dessous, la fonction f définie sur $I = [-2; 4]$ est le produit de la fonction u par $-1{,}5$, et la fonction g définie sur $I = [-2; 4]$ est le produit de la fonction u par $\frac{1}{2}$: pour tout $x \in I$, on a : $f(x) = -1{,}5u(x)$ et $g(x) = \frac{1}{2}u(x)$.



2.1.3 Fonction composée

Définition 2.4
Soit g une fonction, et $\mathcal{D}_g$ son ensemble de définition. Soit u une fonction définie sur I telle que pour tout $x \in I, u(x) \in \mathcal{D}_g$.
La fonction f *composée* de u suivie de g définie sur I est la fonction qui à tout x de I associe le nombre $f(x) = g\left(u(x)\right)$.

On la note $f = g \circ u$. On dit aussi que f est la composée de g par u.

$$\begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{u} & \mathcal{D}_g & \xrightarrow{g} & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & u(x) & \longmapsto & g(u(x)) \end{array}$$
$$\xrightarrow[f]{\hspace{6em}}$$

Exemple 2.3
Soit u et g les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par $u(x) = 2x + 3$ et $g(x) = x^2$. On note f et h les fonctions définies par : $f = g \circ u$ et $h = u \circ g$. On a :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{R} & \xrightarrow{u} & \mathbf{R} & \xrightarrow{g} & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & u(x) & \longmapsto & g(u(x)) \\ 2 & \longmapsto & 7 & \longmapsto & 49 \\ 0 & \longmapsto & 3 & \longmapsto & 9 \\ x & \longmapsto & 2x+3 & \longmapsto & (2x+3)^2 \end{array}$$
$$\xrightarrow[f]{\hspace{6em}}$$

Finalement f est définie par $f(x) = (2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$.
De même, on a :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{R} & \xrightarrow{g} & \mathbf{R} & \xrightarrow{u} & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & g(x) & \longmapsto & u(g(x)) \\ 2 & \longmapsto & 4 & \longmapsto & 11 \\ 0 & \longmapsto & 0 & \longmapsto & 3 \\ x & \longmapsto & x^2 & \longmapsto & 2x^2+3 \end{array}$$
$$\xrightarrow[h]{\hspace{6em}}$$

Finalement, h est définie par $h(x) = 2x^2 + 3$.

2.2 Théorèmes sur les limites

Définition 2.5
Soit f une fonction définie sur un intervalle I du type $[a; +\infty[$.
– On dit que f a pour limite l lorsque x tend vers $+\infty$ si les valeurs de $f(x)$ sont aussi proches de l que l'on veut lorsque x devient de plus en plus grand. On écrit :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

– On dit que f a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si les valeurs de $f(x)$ sont aussi grandes que l'on veut lorsque x devient de plus en plus grand. On écrit :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Définition 2.6
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Le réel a appartient à I ou est une borne de I.
– On dit que la limite de f lorsque x tend vers a est l si les valeurs de $f(x)$ peuvent être aussi proches que l'on veut de l lorsque x se rapproche de a. On écrit :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

– On dit que la limite de f lorsque x tend vers a est $+\infty$ si les valeurs de $f(x)$ peuvent devenir aussi grandes que l'on veut lorsque x de rapproche de a. On écrit :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

Remarque 2.1
Ces définitions sont « adaptables » pour des limites en $-\infty$ et/ou pour des limites valant $-\infty$.

Dans les tableaux suivants, l et l' sont des nombres réels finis. Ces tableaux résument les propriétés à connaitre sur les sommes, les produits et les quotients de limites de deux fonctions f et g.
Ces propriétés sont valables pour des limites en $+\infty$, en $-\infty$ ou en a. Lorsque les cases contiennent « F.I. », il s'agit d'une forme indéterminée : on ne peut pas conclure (ça dépend des cas).

2.2.1 Limite d'une somme

Si f a pour limite	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors, $f+g$ a pour limite	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

2.2.2 Limite d'un produit

Si f a pour limite	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et si g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$f \times g$ a pour limite	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

2.2.3 Limite d'un quotient $\frac{f}{g}$

Cas où la limite de la fonction g n'est pas nulle

Si f a pour limite	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
et si g a pour limite	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$\pm\infty$
$\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Cas où la limite de la fonction g est nulle

Si f a pour limite	$l>0$ ou $+\infty$	$l>0$ ou $+\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	0
et si g a pour limite	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
$\frac{f}{g}$ a pour limite	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

2.3 Formes indéterminées

Les cas de formes indéterminées sont au nombre de quatre :

$$\infty - \infty; \quad 0 \times \infty; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad \frac{0}{0}$$

Exemple 2.4
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Étudions la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} (-2x+3) = -\infty$$

La limite en $+\infty$ est donc une forme indéterminée du type $\infty - \infty$. Pour « lever » cette indétermination, on va écrire l'expression de $f(x)$ différemment :

$$f(x) = x^2 \times 1 - x^2 \times \frac{2}{x} + x^2 \times \frac{3}{x^2} = x^2\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)$$

$$\text{Or : } \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right) = 1 \quad \text{et : } \lim_{x\to\infty} x^2 = +\infty$$

Par produit, on obtient :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$$

2.3.1 Cas des fonctions polynômes ou rationnelles

Théorème 2.1 (admis)
– La limite en l'infini d'une fonction polynôme est la même que la limite de son terme de plus haut degré.

$$\lim_{x\to\infty} \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right) = \lim_{x\to\infty} (a_n x^n)$$

– La limite en l'infini d'une fonction, quotient de deux polynômes, est la même que la limite du quotient simplifié des termes de plus haut degré des deux polynômes.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Exemple 2.5
Soit g la fonction polynôme définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = 3x^3 - 2x^2 - x + 5$. On a :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 3x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 3x^3 = -\infty$$

Soit f la fonction définie sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x^2-3x+1}{8x^3-1}$. On a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{8x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4x} = 0$$

Soit h la fonction définie sur $]2; +\infty[$ par $h(x) = \frac{2x^2-3x+1}{x^2+x-6}$. On a :

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} 2 = 2$$

2.3.2 Cas des fonctions composées

Dans le théorème suivant, les lettres α, k et l désignent soit un nombre réel soit $+\infty$, soit $-\infty$. u et g sont deux fonctions telles que $g \circ u$ existe sur un intervalle dont une borne est α.

Théorème 2.2
Si :
– la limite de $u(x)$ lorsque x tend vers α vaut k, et :
– la limite de $g(t)$ lorsque t tend vers k vaut l,
alors, la limite de $g \circ u(x)$ lorsque x tend vers α vaut l.
On écrit :

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \alpha} u(x) = k \\ \lim\limits_{t \to k} g(t) = l \end{array} \right. \text{, alors } \lim\limits_{x \to \alpha} g \circ u(x) = l$$

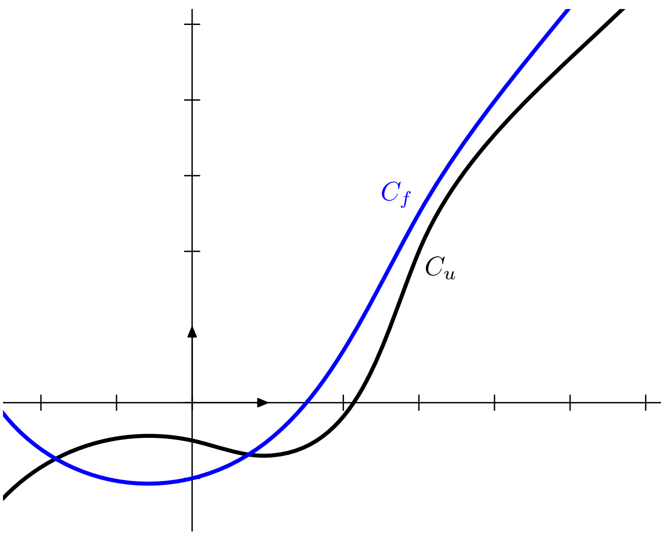
Exemple 2.6
Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{4x+9}{x-1}}$. f est la composée de la fonction rationnelle u définie par $u(x) = \frac{4x+9}{x-1}$ suivie de g qui est la fonction racine carrée. On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^+} u(x) = +\infty \\ \lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = +\infty \end{array} \right. \text{, donc } \lim\limits_{x \to 1^+} g \circ u(x) = +\infty$$

$$\text{et : } \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 4 \\ \lim\limits_{t \to 4} g(t) = 2 \end{array} \right. \text{, donc } \lim\limits_{x \to +\infty} g \circ u(x) = 2$$

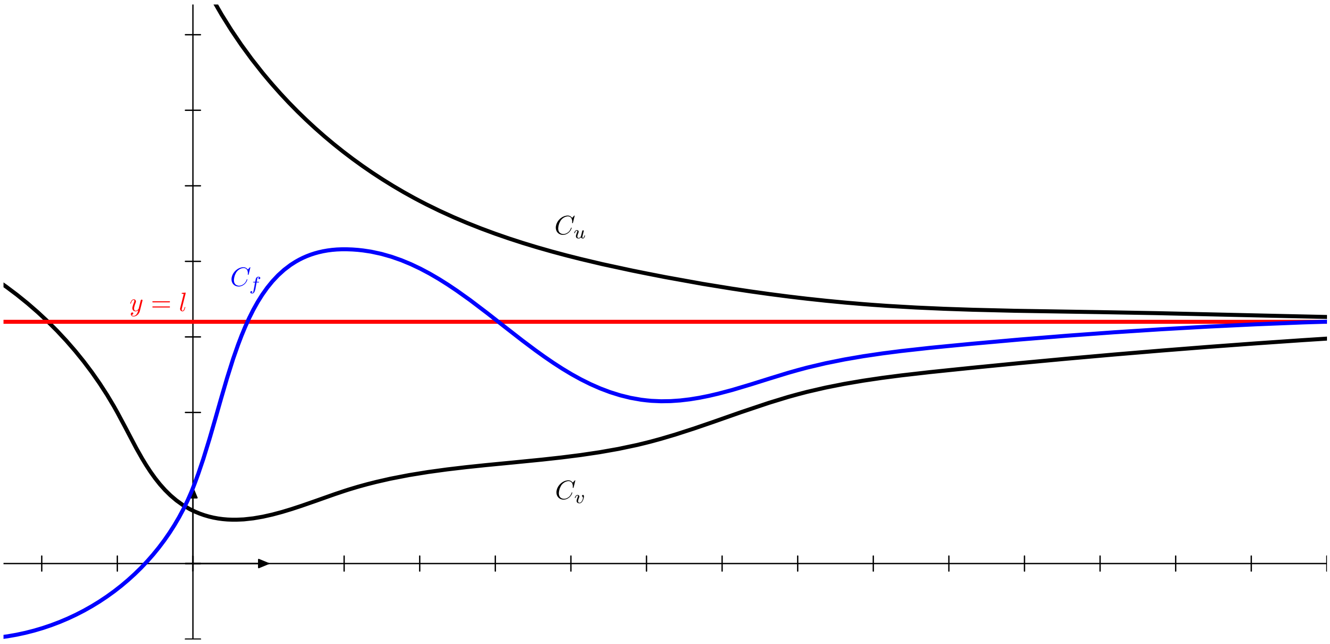
2.3.3 Théorèmes de comparaison

Théorème 2.3 (admis)
Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle du type $[a;+\infty[$.
S'il existe un réel A tel que pour tout $x > A$, $f(x) \geq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, alors on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.



Ce théorème peut aussi s'énoncer en $-\infty$ (exercice)

Théorème 2.4 (admis)
Soit f, u et v trois fonctions définies sur un intervalle du type $[a;+\infty[$.
S'il existe un réel A tel que pour tout $x > A$, $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = l$, alors on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.



Ce théorème peut aussi s'énoncer en $-\infty$ (exercice)

Exemple 2.7
Soit f une fonction telle que pour tout $x \geq 1$, on a : $\frac{1}{x^2} \leq f(x) - 3 \leq \frac{1}{x}$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
D'après la double inégalité proposée, on a : $3 + \frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq 3 + \frac{1}{x}$. Or :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3 + \frac{1}{x^2}\right) = 3 \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\left(3 + \frac{1}{x}\right) = 3$$

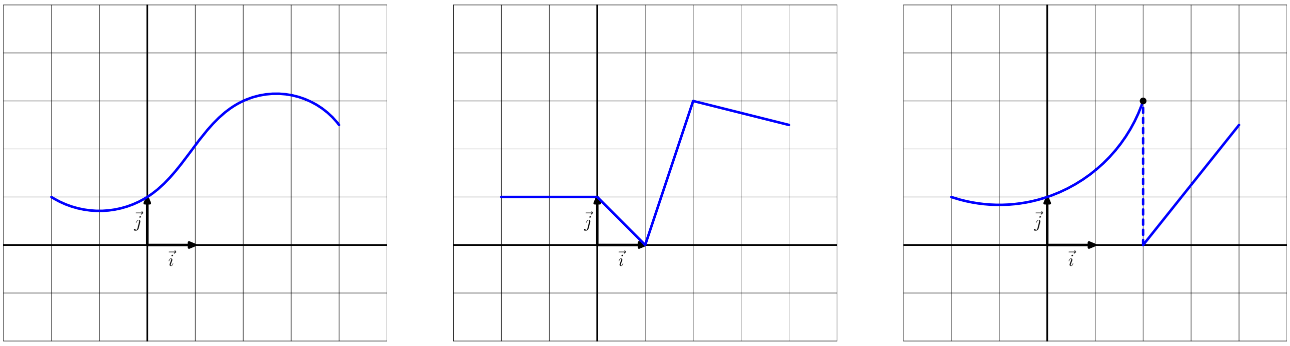
Donc, par comparaison, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$$

2.4 Continuité

2.4.1 Approche graphique de la continuité

En observant les trois courbes ci-dessous, on remarque que les deux premières peuvent être tracées « sans lever le crayon » alors que la troisième admet un « saut » à l'abscisse 2. Les deux premières représentent des fonctions dites *continues* sur l'intervalle $[-2;4]$ alors que la troisième représente une fonction qui admet une discontinuité en $x = 2$.



2.4.2 Notion intuitive de la continuité

Une fonction est continue sur un intervalle I si elle est définie sur cet intervalle et si sa courbe représentative se trace « d'un trait continu », sans lever le crayon.
Pour tout $a \in I$, si $x \in I$ se rapproche de a, alors $f(x)$ peut se rapprocher de $f(a)$ autant qu'on le souhaite. On écrit :

$$f \text{ est continue en } a \text{ si } \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

2.4.3 Fonctions continues

On admet le théorème suivant :

Théorème 2.5
Une fonction obtenue par opérations sur les fonctions usuelles est continue sur chaque intervalle où elle est définie.
Ainsi, les fonctions polynômes, rationnelles et définies par des racines carrées sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition.

2.4.4 Partie entière

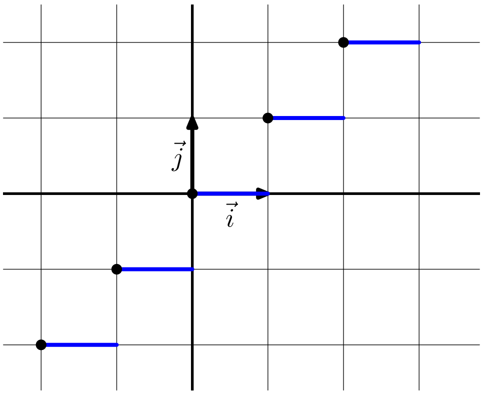
Un nombre réel est composée d'une partie entière finie (avant la virgule) et d'une partie décimale (après la virgule). La partie entière de 4,65 est 4.
On remarque également que tout nombre réel x appartient à un intervalle du type $[n; n+1[$ où $n \in \mathbf{Z}$.

Définition 2.7
La partie entière de $x \in \mathbf{R}$ notée $E(x)$ est définie ainsi :

$$\text{si } x \in [n; n+1[\quad (n \in \mathbf{Z}), \quad E(x) = n$$

Exemple 2.8
Ainsi, $E(3{,}14) = 3$ car $3{,}14 \in [3; 4[$.
Et $E(-4{,}32) = -5$ car $-4{,}32 \in [-5; -4[$.

La représentation graphique de la fonction partie entière $x \mapsto E(x)$, pour $x \in [-2; 3[$ est tracée ci-dessous :



2.4.5 Propriété des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. La courbe représentative de f passe par $A(a;f(a))$ et $B(b;f(b))$, et elle se trace « sans lever le crayon ». Ainsi tout nombre m compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est l'ordonnée d'un point de la courbe : il existe donc $\alpha \in [a;b]$ tel que $f(\alpha) = m$.

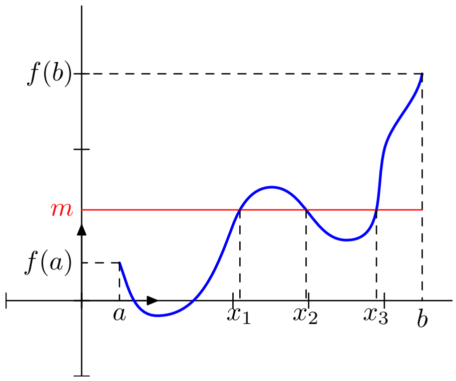


Figure 1

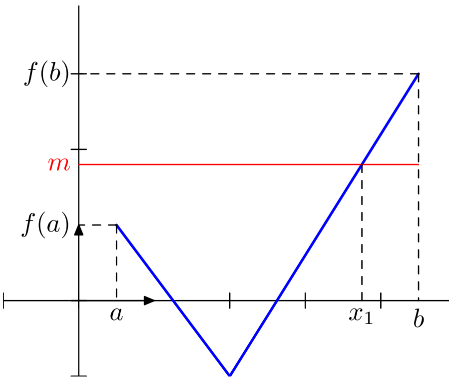


Figure 2

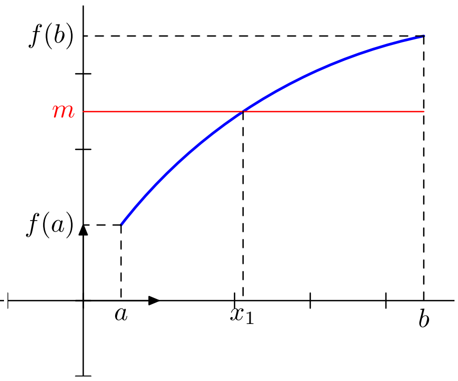


Figure 3

Théorème 2.6 (de la valeur intermédiaire)
Si f est continue et strictement monotone sur $[a\,;\,b]$, alors pour tout m compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = m$ admet une et une seule solution dans l'intervalle $[a\,;\,b]$.

Remarque 2.2
Si la fonction f est continue mais non strictement monotone sur $[a\,;\,b]$, l'équation $f(x) = m$ admet au moins une solution pour toute valeur de m comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, mais elle n'est pas nécessairement unique (voir figure 1 ci-dessus : l'équation a trois solutions). Ce résultat est appelé théorème des valeurs intermédiaires.

Remarque 2.3
Par convention, dans un tableau de variation, les flèches obliques traduisent :
– la continuité de la fonction sur l'intervalle considéré,
– la stricte monotonie de la fonction sur cet intervalle.

Exemple 2.9
Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,9]$ par $f(x) = \sqrt{x} + 2$. Démontrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution dans $[0\,;\,9]$.
La fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,9]$ car la fonction racine carrée l'est. Par ailleurs, f est une fonction continue sur $[0\,;\,9]$. De plus $f(0) = 2$ et $f(9) = 5$.

Ainsi, $3 \in [f(0)\,;\, f(9)]$, donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, l'équation $f(x) = 3$ admet une et une seule solution dans l'intervalle $[0\,;\,9]$.

Exemple 2.10
Soit f une fonction définie sur $[0\,;\,7]$ dont on donne le tableau de variation :

x	0		2		4		7
$f(x)$	4	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3

Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \sqrt{2}$.
Résolution :
- D'après le tableau de variation de f, sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ la fonction f est continue et strictement décroissante. De plus $\sqrt{2} \in [f(4)\,;\, f(0)]$ donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, l'équation $f(x) = \sqrt{2}$ admet une unique solution dans $[0\,;\,4]$.
- D'après le tableau de variation de f, sur l'intervalle $[4\,;\,7]$ la fonction f est continue et strictement croissante. De plus $\sqrt{2} \in [f(4)\,;\, f(7)]$ donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, l'équation $f(x) = \sqrt{2}$ admet une unique solution dans $[4\,;\,7]$.

Finalement l'équation $f(x) = \sqrt{2}$ admet deux solutions dans $[0\,;\,7]$. On pourrait même montrer que la solution la plus petite est dans $[0\,;\,2]$, et l'autre dans $[4\,;\,7]$.

Chapitre 3

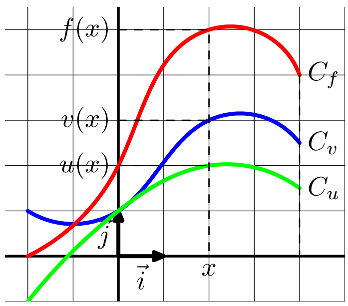
Variations d'une fonction. Dérivation

3.1 Variations et opérations

3.1.1 Somme

Théorème 3.1
Soit u et v deux fonctions définies sur un même intervalle I.
- Si u et v sont croissantes sur I, alors $u+v$ est croissante sur I.
- Si u et v sont décroissantes sur I, alors $u+v$ est décroissante sur I.

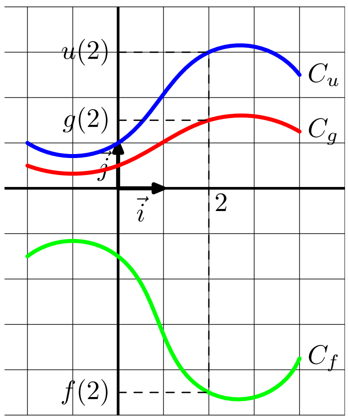
Exemple 3.1
En reprenant la figure de l'exemple 2.1, sur l'intervalle $[0;2]$, u et v sont croissantes, et f l'est aussi. Sur l'intervalle $[3;4]$, u et v sont décroissantes et f l'est aussi.



3.1.2 Produit par un réel

Théorème 3.2
Soit k un réel non nul et f une fonction définie sur I.
- Si $k>0$, alors les fonctions f et kf ont les mêmes variations.
- Si $k<0$, alors les fonctions f et kf ont des variations de sens contraire.

Exemple 3.2
Dans l'exemple 2.2, sur l'intervalle $[0;2]$, u est croissante.
- la fonction f est le produit de u par $-1{,}5<0$: elle est décroissante sur $[0;2]$.
- la fonction g est le produit de u par $0{,}5>0$: elle est croissante sur $[0;2]$.



3.1.3 Variations d'une fonction composée

Théorème 3.3
Soit u et g deux fonctions telles que $g \circ u$ soit définie sur I avec u et g monotones sur leur ensemble de définition.
– Si u et g ont le même sens de variation, alors $g \circ u$ est croissante sur I.
– Si u et g ont des variations de sens contraires alors $g \circ u$ est décroissante sur I.

Démonstration :
si u et g sont croissantes.
soit a et b dans I avec $a < b$.
u est croissante donc $u(a) < u(b)$.
g est croissante donc $g(u(a)) < g(u(b))$.
Donc $g \circ u$ est croissante.

si u et g sont décroissantes.
soit a et b dans I avec $a < b$.
u est décroissante donc $u(a) > u(b)$.
g est décroissante donc $g(u(a)) < g(u(b))$.
Donc $g \circ u$ est croissante.

si u est croissante et g décroissante.
soit a et b dans I avec $a < b$.
u est croissante donc $u(a) < u(b)$.
g est décroissante donc $g(u(a)) > g(u(b))$.
Donc $g \circ u$ est décroissante.

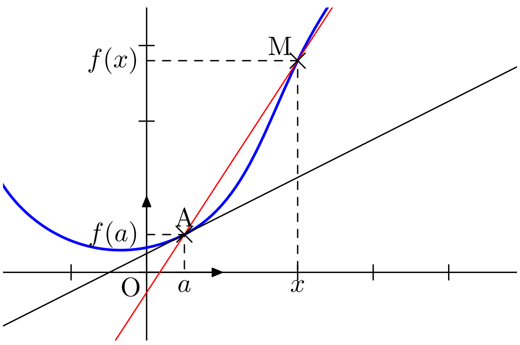
3.2 Dérivation

3.2.1 Théorème fondamental

Définition 3.1
Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$. On dit que f est *dérivable* en a si la limite lorsque x tend vers a du quotient $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est finie. Cette limite est appelée *nombre dérivé* de f en a qu'on note $f(a)$.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \text{ lorsque cette limite existe.}$$

Si f est dérivable pour tout a de I, on dit que f est dérivable sur I.
Grpahiquement le nombre dérivé de f en a est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.



Conséquence :
Soit f une fonction numérique définie et dérivable sur un intervalle I. Soit $a \in I$. La tangente T_a à la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour équation :

$$T_a : y = f'(a)\,(x - a) + f(a)$$

Exemple 3.3
Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Déterminons l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 2 :

On a : $f'(x) = 2x - 3$, donc $f'(2) = 2 \times 2 - 3 = 1$. De plus, $f(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 1 = -1$. Donc la tangente T_2 à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 a pour équation :

$$T_2 : y = 1 \times (x - 2) + (-1) \text{ c'est à dire : } T_a : y = x - 3$$

Théorème 3.4 (admis)
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
– Si $f'(x) > 0$ sur I, alors f est croissante sur I.
– Si $f'(x) < 0$ sur I, alors f est décroissante sur I.
– Si $f'(x) = 0$ sur I, alors f est constante sur I.

3.2.2 Quelques formules de dérivées

Dans la suite de ce formulaire, k est un réel quelconque fixé et n est un entier naturel non nul.

Fonction f	Dérivée f'	Ensemble de dérivabilité de f
$x \mapsto k$	$x \mapsto 0$	$\mathbf{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	$\mathbf{R}$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto 2x$	$\mathbf{R}$
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbf{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbf{R}_+^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbf{R}^*$

– Si f est dérivable sur I, alors, kf est dérivable sur I, et $(kf)' = kf'$.
– Si u et v sont dérivables sur I, alors $u + v$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$.
– Si u et v sont dérivables sur I, alors uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.
– Si u et v sont dérivables sur I, avec pour $x \in I, v(x) \neq 0$, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$.

3.2.3 Extremum

Théorème 3.5
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, et $c \in I$.
Si la dérivée de f s'annule en c en changeant de signe, alors f admet un extremum en c.

x	$-\infty$		c		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$f(c)$	$\searrow$	

f admet un maximum en c.

x	$-\infty$		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$	

f admet un minimum en c.

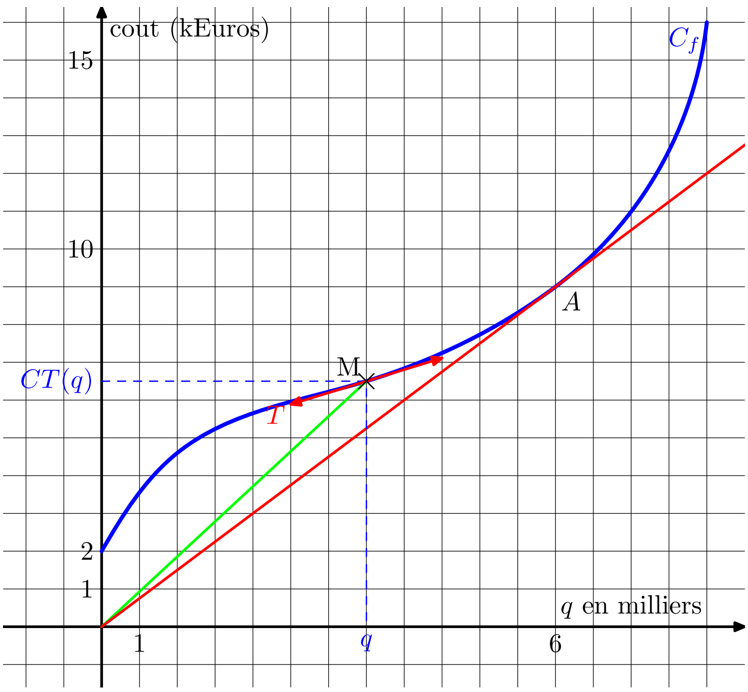
3.2.4 Un exemple : fonction de coût

Le coût total de production d'un bien en quantité q est la somme des coûts de fabrication. La fonction de coût total de production est toujours croissante.

On note $CT(q)$ le coût total de production pour une quantité q de biens produite. En notant $\mathscr{C}_f$ la courbe représentant la fonction de coût total, $CT(q)$ est l'ordonnée du point de $\mathscr{C}_f$ qui a pour abscisse q.
Les coûts fixes sont les coûts lorsque la quantité produite est nulle : il s'agit de $CT(0)$.
Le coût moyen est le quotient du coût total par la quantité produite : $CM(q) = \frac{CT(q)}{q}$.
Le coût marginal qui est le coût de la dernière unité produite est assimilé à la dérivée du coût total : $C_m(q) = CT'(q)$.
Lectures graphiques :
Sur la figure ci-après, on a tracé une courbe $\mathscr{C}_f$ de coût total. M est un point de cette courbe. L'abscisse de M est une quantité produite q ; son ordonnée est le coût total correspondant à cette quantité produite.
La pente de la droite (OM), c'est à dire son coefficient directeur, est le coût moyen pour la quantité q produite. On peut dresser facilement le tableau de variation de la fonction CM : coût moyen de production. En partant de l'abscisse 0, la pente de la droite (OM) décroit jusqu'à $x = 6$ (en effet la droite est de plus en plus « horizontale »), puis la pente de la droite augmente (la droite est de plus en plus « verticale »).

q	0		6		8
$C_M(q)$	‖	↘	1,5	↗	2

La pente de la droite T, tangente à la courbe en M, est le coût marginal.



3.2.5 Dérivée d'une fonction composée

Théorème 3.6
Soit u et g deux fonctions telles que $f = g \circ u$ existe sur un intervalle I.
Si u est dérivable en x_0 et si g est dérivable en $y_0 = u(x_0)$, alors f est dérivable en x_0 et on a :

$$f'(x_0) = g'(u(x_0)) \times u'(x_0)$$

En généralisant à tout x_0 de I, on obtient : si u et g sont dérivables sur leurs ensembles de définition respectifs, alors f est dérivable sur I et on a :

$$(g \circ u)' = g'(u) \times u'$$

Exemple 3.4
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = (2x+3)^3$. Cette fonction est la composée de g définie par $g(x) = x^3$ et de u définie par $u(x) = 2x + 3$: $f(x) = g(u(x))$.
u et g sont dérivables sur $\mathbf{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbf{R}$. On a :

$$\text{pour } x \in \mathbf{R}, g'(x) = 3x^2 \text{ et } u'(x) = 2$$

$$\text{Et donc, } f'(x) = g'(u(x)) \times u'(x) = 3(2x+3)^2 \times 2 = 6(2x+3)^2$$

Application : des nouvelles formules de dérivées.
Si f est une fonction qui s'écrit sous la forme $f = u^n$ où $n \in \mathbf{N}^*$, alors $f' = n \times f^{n-1} \times f'$. ($u$ étant une fonction dérivable)
Si f est une fonction qui s'écrit sous la forme $f = \sqrt{u}$, alors $f' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$. ($u$ étant une fonction dérivable strictement positive)
Si f est une fonction qui s'écrit sous la forme $f = \frac{1}{u}$, alors $f' = -\frac{u'}{u^2}$. (u étant une fonction dérivable qui ne s'annule pas)

3.3 Complément : asymptotes

3.3.1 Asymptote horizontale

Définition 3.2
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle du type $[A\,; +\infty[$ (resp. $]-\infty\,; A]$), et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
On dit que la droite d d'équation $y = b$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \quad \left(\text{resp. } \lim_{x \to -\infty} f(x) = b\right)$$

Exemple 3.5
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \frac{2x^2-3x+1}{3x^2+1}$. On a :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}$$

Donc la droite d'équation $y = \frac{2}{3}$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$. (Elle l'est aussi en $-\infty$).

3.3.2 Asymptote verticale

Définition 3.3
Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]a\,; b]$, avec a valeur interdite, et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
On dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$ si :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

Exemple 3.6
Soit f la fonction définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x-1}$. On a :

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

Donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$

3.3.3 Asymptote oblique

Définition 3.4
Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[A\,;\,+\infty[$ (resp. $]-\infty\,;\,A]$), et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
On dit que la droite d d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si :

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0 \quad \left(\text{resp. } \lim_{x\to-\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0\right)$$

Remarque 3.1 (Positions relatives)
Si $f(x) - (ax + b) > 0$ alors $\mathscr{C}_f$ est au dessus de d et si $f(x) - (ax + b) < 0$ alors $\mathscr{C}_f$ est en dessous de d.

Exemple 3.7
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x+1}$. On a :

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (2x-1)) = \lim_{x\to+\infty} \left(2x - 1 + \frac{1}{x+1} - (2x-1)\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

Donc la droite d d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

Étudions la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à d :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
signe de $f(x) - (2x+1)$	-	0	+
position de $\mathscr{C}_f$ % d	$\mathscr{C}_f$ en dessous de d	|	$\mathscr{C}_f$ au dessus de d

Chapitre 4

Probabilités conditionnelles

4.1 Distribution de fréquences. Loi de probabilité

4.1.1 Introduction. Premières définitions

Vocabulaire
L'objet d'une étude d'un phénomène aléatoire est appelé *expérience aléatoire*. Au cours d'une expérience aléatoire, les résultats possibles sont appelés les *éventualités* (notées généralement e_i). L'ensemble des n éventualités est appelé *l'univers* de l'expérience aléatoire. On le note généralement Ω (omega majuscule dans l'alphabet grec). Un *événement* est un ensemble constitué d'éventualités. Un événement ne comportant qu'une seule éventualité est appelé *événement élémentaire*.

Exemple 4.1
On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6 :
– les éventualités sont $e_1 = 1$, $e_2 = 2$, $e_3 = 3$, $e_4 = 4$, $e_5 = 5$, $e_6 = 6$;
– l'univers est donc $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$;
– si on note A l'événement « obtenir un chiffre pair », alors $A = \{2; 4; 6\}$;
– si on note B l'événement « obtenir un six », alors $B = \{6\}$: c'est un événement élémentaire.

4.1.2 Distribution de fréquences

Lorsqu'on répète un grand nombre de fois la même expérience aléatoire en notant les résultats obtenus, on peut compter le nombre de fois où chaque événement élémentaire se produit, et ensuite calculer sa fréquence d'apparition. On obtient alors pour chaque éventualité e_i une fréquence $f_i = \frac{n_i}{N}$, où n_i est le nombre d'apparitions de e_i et N le nombre total d'expériences. On dit alors que la *distribution de fréquences* associée à ces N expériences aléatoires est la suite $(f_1; \ldots; f_p)$.

Propriété 4.1
$(f_1; \ldots; f_p)$ est une distribution de fréquences associée à N expériences aléatoires identiques ;
– on a : $f_1 + \cdots + f_p = 1$.
– si A est un événement, alors la fréquence de A, $f(A)$ est la somme des fréquences de toutes les éventualités constituant A.

Exemple 4.2
On lance cent fois de suite une fléchette sur une cible ayant cinq zones : noire, rouge, jaune,

bleue et verte. Les résultats obtenus sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

zone touchée	noire	rouge	jaune	bleue	verte
nombre de touches	5	15	20	35	25
fréquence	0,05	0,15	0,20	0,35	0,25

La distribution de fréquences associée à ces cent lancers de fléchettes est donc :

$$(0{,}05\,;\ 0{,}15\,;\ 0{,}20\,;\ 0{,}35\,;\ 0{,}25)$$

4.1.3 Loi de probabilité

Exemple 4.3
Dans une urne on a placé huit boules numérotées de 1 à 8. On en tire une au hasard. Si les boules sont indiscernables au toucher, on a autant de chances d'en tirer une plutôt qu'une autre. On dit que la probabilité d'obtenir chaque boule est égale à $\frac{1}{8}$. On écrit :

$$p(1) = p(2) = \cdots = p(8) = \frac{1}{8}$$

On dit qu'on a défini une loi de probabilité sur l'ensemble $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

Plus généralement, on a la définition suivante :

Définition 4.1
Soit Ω un univers lié à une expérience aléatoire ayant n éventualités e_1, e_2,..., e_n.
Si à chaque événement élémentaire $\{e_i\}$ on associe un nombre $p_i \in [0\,;\,1]$ tel que :

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

Alors on définit une loi de probabilité sur l'univers Ω.
Chaque p_i est appelé *probabilité* de l'événement $\{e_i\}$.
La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des éventualités composant A.

Conséquences
– Ω est l'événement *certain* : $p(\Omega) = 1$.
– $\emptyset$ est l'événement *impossible* : $p(\emptyset) = 0$.

Exemple 4.4
En reprenant l'énoncé de l'exemple 4.3, on note A l'événement « obtenir un chiffre strictement supérieur à 5. On a alors $A = \{6\,;\,7\,;\,8\}$, et donc $p(A) = \frac{3}{8}$.

4.1.4 Loi des grands nombres

Pour une expérience aléatoire donnée ayant une loi de probabilité P, la distribution de fréquences obtenue sur un nombre d'expériences est proche de la loi de probabilité lorsque le nombre d'expériences est « très grand ».

4.1.5 Équiprobabilité

Les n événements élémentaires d'un univers Ω lié à une expérience aléatoire sont dits *équiprobables* si la probabilité de chacun d'eux est $\frac{1}{n}$.
Dans ce cas la probabilité d'un événement A est :

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

Remarque 4.1
Dans un exercice, pour signifier qu'on est dans une situation d'équiprobabilité on a généralement dans l'énoncé un expression du type :
– on lance un dé *non pipé*... :
– on tire dans un jeu de cartes *non truqué*... ;
– dans une urne, il y a des boules *indiscernables au toucher*... ;
– on rencontre *au hasard* une personne parmi... ;
– ...

4.2 Quelques exemples de référence

Exemple 4.5 (le dé équilibré)
On lance un dé équilibré à six faces. On considère l'événement A : « obtenir un chiffre pair » et l'événement B : « obtenir un diviseur de six ». Calculer la probabilité de chacun de ces deux événements.
Le dé est équilibré donc on est dans une situation d'équiprobabilité. On a donc pour $1 \leq i \leq 6$, $p(i) = \frac{1}{6}$.
On a : $A = \{2\,;\,4\,;\,6\}$ et $B = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,6\}$. Donc $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, et $p(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Exemple 4.6 (les boules de couleurs)
Dans une urne on place dix boules de couleurs numérotées. Les boules sont indiscernables au toucher et sont réparties comme suit :
– quatre boules rouges numérotées 1, 2, 3 et 4 ;
– trois boules blanches numérotées 1, 2 et 3 ;
– deux boules vertes numérotées 1 et 2 ;
– une boule jaune numérotée 1.
On tire au hasard une boule de l'urne. Calculer les probabilités des événements suivants :
– U : « obtenir une boule numérotée 1 ».
– B : « obtenir une boule blanche ».
– A : « obtenir un chiffre pair sur une boule rouge ».
– I : « obtenir un chiffre impair ».
Les boules sont indiscernables au toucher et le tirage se fait au hasard, on est donc dans une situation d'équiprobabilité : chaque boule a une probabilité $p = \frac{1}{10}$ d'être tirée. En notant chaque éventualité par l'initiale de la couleur suivie du chiffre de la boule, on a :
– $U = \{R1\,;\,B1\,;\,V1\,;\,J1\}$, donc $p(U) = \frac{4}{10} = 0{,}4$;
– $B = \{B1\,;\,B2\,;\,B3\}$, donc $p(B) = \frac{3}{10} = 0{,}3$;
– $A = \{R2\,;\,R4\}$, donc $p(A) = \frac{2}{10} = 0{,}2$;
– $I = \{R1\,;\,R3\,;\,B1\,;\,B3\,;\,V1\,;\,J1\}$, donc $p(I) = \frac{6}{10} = 0{,}6$;

Exemple 4.7 (le jeu de cartes)
On choisit une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes non truqué. On appelle « figure » les rois, dames et valets. Calculer les probabilités des événements suivants :
- A : « obtenir une figure » ;
- B : « obtenir un pique » ;
- C : « obtenir un as ».

Le jeu de cartes n'est pas truqué et le choix se fait au hasard, on est donc dans une situation d'équiprobabilité : chaque carte a une probabilité $p = \frac{1}{52}$ d'être choisie :
- dans le jeu il y a $4 \times 3 = 12$ figures. Donc $p(A) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$;
- dans le jeu il y a 13 piques. Donc $p(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$;
- dans le jeu, il y a 4 as. Donc $p(C) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

Exemple 4.8 (non-équiprobabilité)
Un dé est pipé de sorte que les faces 1, 2, 3, 4 et 5 aient les probabilités suivantes d'apparaître :

$$p(1) = p(2) = p(3) = 0{,}1\,;\ p(4) = p(5) = 0{,}2$$

1. Calculer $p(6)$.
2. Calculer $p(A)$ et $p(B)$ où A et B sont les événements définis dans l'exemple 4.5.

1. La somme de toutes les probabilités doit être égale à 1, donc :

$$p(6) = 1 - (p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5)) = 0,3$$

2. $p(A) = p(2) + p(4) + p(6) = 0{,}6$ et $p(B) = p(1) + p(2) + p(3) + p(6) = 0{,}6$.

Exemple 4.9 (rencontre)
Dans une classe, 20 % des élèves ont 16 ans, 35 % ont 17 ans, 30 % ont 18 ans et 15 % ont 19 ans. On rencontre au hasard un élève de cette classe. Calculer la probabilité qu'il ait « au moins 17 ans », puis qu'il ait « strictement plus de 17 ans » :
- on note A l'événement l'élève a au moins 17 ans : $p(A) = 35\% + 30\% + 15\% = 80\%$;
- on note B l'événement l'élève a strictement plus de 17 ans : $p(B) = 30\% + 15\% = 45\%$.

4.3 Intersection. Réunion

4.3.1 Événement. Événement contraire

Définition 4.2
Soit A un événement d'un univers Ω lié à une expérience aléatoire. On appelle *événement contraire* de A et on note $\overline{A}$ l'événement constitué de toutes les éventualités de Ω n'étant pas dans A.

Exemple 4.10
Dans le cas d'un jet de dé à six faces, les événements contraires des événements définis dans l'exemple 4.5 sont : $\overline{A}$: « obtenir un chiffre impair » et $\overline{B}$: « obtenir un 4 ou un 5 ».

Propriété 4.2
Soit A un événement d'un univers Ω de probabilité $p(A)$. Alors l'événement $\overline{A}$ a pour probabilité $1 - p(A)$.

4.3.2 Intersection. Réunion

Définition 4.3
Soit Ω un univers lié à une expérience aléatoire et P une loi de probabilité sur Ω. Soit A et B deux événements de Ω ;
– l'événement constitué des éventualités appartenant à A *et* à B est noté $A \cap B$. (on lit « A inter B » ou « A et B ») ;
– l'événement constitué des éventualités appartenant à A *ou* à B ou aux deux est noté $A \cup B$. (on lit « A union B » ou « A ou B »).

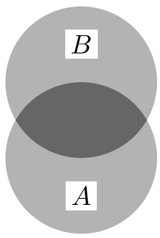
Exemple 4.11
On considère un jeu de 32 cartes. On note A l'événement « obtenir une figure », et B l'événement « obtenir un trèfle ».

1. Expliciter $A \cap B$ et $A \cup B$.
2. Calculer $p(A)$, $p(B)$, $p(A \cap B)$ et $p(A \cup B)$.
3. Calculer $p(A) + p(B)$ puis $p(A \cup B) + p(A \cap B)$.

1. $A \cap B$: « obtenir une figure trèfle »
   $A \cup B$: « obtenir une figure ou un trèfle ou une figure trèfle ».
2. $p(A) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$. $p(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.
   $p(A \cap B) = \frac{3}{32}$. $p(A \cup B) = \frac{17}{32}$.
3. $p(A) + p(B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$.
   $p(A \cap B) + p(A \cup B) = \frac{3}{32} + \frac{17}{32} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$.

Propriété 4.3
Soit Ω un univers lié à une expérience aléatoire, et P une loi de probabilité sur Ω. Soit A et B deux événements de Ω. Alors on a :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$



Interprétation :
En comptant le nombre d'éventualités de A et en ajoutant le nombre d'éventualités de B, on compte deux fois les éventualités de $A \cap B$. D'où le « $-p(A \cap B)$ » dans la formule de la propriété 4.3.

4.4 Probabilités conditionnelles

4.4.1 Exemple

Exemple 4.12
On a regroupé dans le tableau suivant les pourcentages de filles et de garçons suivant la spécialité choisie parmi tous les élèves de terminale ES d'un lycée :

	Maths	SES	LV
Filles	12%	13%	27%
Garçons	16%	12%	20%

1. On choisit au hasard un élève de terminale ES.
   On note F l'événement « c'est une fille », et M l'événement « l'élève a choisi la spécialité maths ». On a alors :
   $p(F) = 52\%$, $p(M) = 28\%$ et $p(F \cap M) = 12\%$.
2. On rencontre au hasard un élève de terminale ES et c'est une fille. Quelle est la probabilité qu'elle soit en spécialité maths ?
   Cette probabilité est $p = \frac{12}{52}$ (il ya 12 spé maths parmi les 52 filles).
   On a donc : $p = \frac{12}{52} = \frac{0{,}12}{0{,}52} = \frac{12\%}{52\%}$.
   On dit que p est une *probabilité conditionnelle*. On note $p_F(M) = \frac{p(F \cap M)}{p(F)}$. On lit : probabilité de M sachant F.

4.4.2 Généralisation

Définition 4.4
Soit A et B deux événements d'un univers Ω.
Si $p(B) \neq 0$, on appelle « probabilité de A sachant B » ou « probabilité de A si B » et on note $p_B(A)$ le nombre :

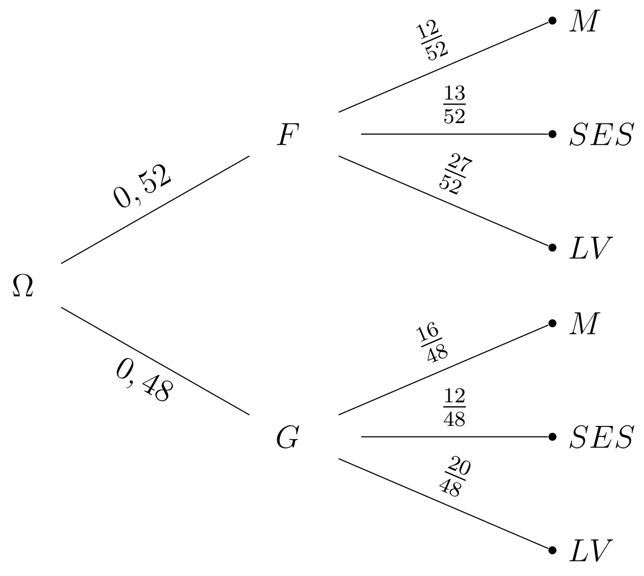
$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Remarque 4.2
– On a $0 \leq p(A \cap B) \leq p(B)$ donc $p_B(A)$ est bien un réel compris de l'intervalle $[0\,;\,1]$.
– Si $p(B)$ et $p(A)$ sont non nuls, on a alors :

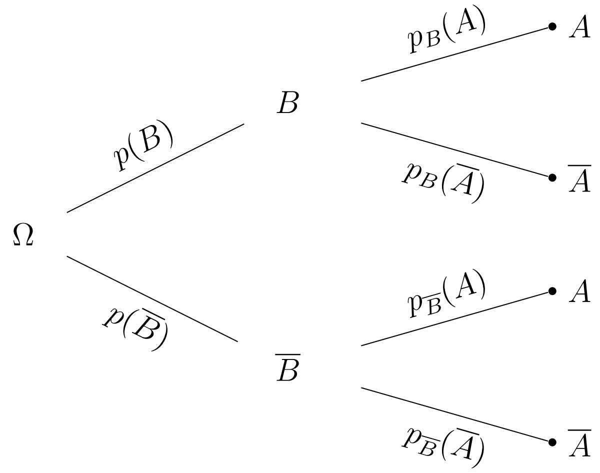
$$p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B) = p_A(B) \times p(A)$$

4.4.3 Arbres pondérés

Exemple 4.13
On peut représenter la situation de l'exemple 4.12 par un arbre pondéré :



Règles de l'arbre pondéré :



– la somme des probabilités des branches issues d'un même noeud vaut 1 :

$$p_B(A) + p_B(\overline{A}) = 1;$$

– la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des différentes branches qui constituent ce chemin :

$$p_B(A) \times p(B) = p(A \cap B)$$

4.5 Indépendance. Formule des probabilités totales

4.5.1 Indépendance

Intuitivement, deux événements sont indépendants si la réalisation de l'un d'entre eux n'influence pas les chances que l'autre se réalise. Mathématiquement, on traduit cela par la définition suivante :

Définition 4.5
On considère A et B deux événements d'une expérience aléatoire d'univers Ω. Les événements A et B sont dits indépendants si :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Remarque 4.3
On considère A et B deux événements d'une expérience aléatoire d'univers Ω tels que A, $\overline{A}$, B et $\overline{B}$ soient de probabilité non nulle. On alors :
– si A et B sont indépendants, alors :

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A) \times p(B)}{p(B)} = p(A)$$

et de même, on a $p_A(B) = p(B)$;
– si A et B sont indépendants, alors $p_{\overline{B}}(A) = p(A)$ et $p_{\overline{A}}(B) = p(B)$.
En effet : on a $A \cap \overline{B} = A \setminus (A \cap B)$ (faire un diagramme). Donc :

$$p_{\overline{B}}(A) = p(A) = \frac{p(A \cap \overline{B})}{p(\overline{B})} = \frac{p(A) - p(A \cap B)}{1 - p(B)} = \frac{p(A) - p(A) \times p(B)}{1 - p(B)} = \frac{p(A)(1 - p(B))}{1 - p(B)} = p(A)$$

Exemple 4.14
On choisit au hasard une carte dans un jeu de trente deux cartes.
On note T l'événement « c'est un trèfle », et D l'événement « c'est une dame ».
$p(T \cap D) = \frac{1}{32}$ (il y a une dame de trèfle dans le jeu).
$p(T) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ (il y a huit trèfles dans le jeu).
$p(D) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ (il y a quatre dames dans le jeu).
On a donc $p(T)\times p(D) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{8} = \frac{1}{32} = p(T\cap D)$. Donc les événements D et T sont indépendants.
Intuitivement on comprend aisément que si on tire une carte dans le jeu, la chance d'obtenir une dame sachant qu'on a trèfle est la même que celle d'obtenir une dame sans rien savoir sur la carte tirée.

4.5.2 Formule des probabilités totales

Définition 4.6
Des événements forment une partition de l'univers Ω si les deux conditions suivantes sont réalisées :
– ils sont deux à deux disjoints ;
– leur réunion forme Ω.
Cela signifie que chaque éventualité de Ω appartient à un et un seul de ces événements.

Exemple 4.15
Dans un jeu de cartes, on tire une carte au hasard. On note P, T, Ca et Co les événements « obtenir un pique, un trèfle, un carreau et un coeur ».
Les événements P, T, Ca et Co forment une partition de l'univers.

Propriété 4.4 (Formule des probabilités totales)
On considère une expérience aléatoire d'univers Ω. Si B_1, B_2, ..., B_n forment une partition de Ω, alors pour tout événement A de Ω, on a :

$$p(A) = p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + \cdots + p(A \cap B_n)$$

Avec l'arbre vu dans les règles de l'arbre pondéré (page 34), l'événement A est la réunion de deux chemins : $p(A)$ est la somme des probabilités de ces chemins :

$$p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})$$

Exemple 4.16
On reprend les données de l'exemple 4.12. On a alors :

$$p(M) = p(F \cap M) + p(G \cap M) = 0{,}52 \times \frac{12}{52} + 0{,}48 \times \frac{16}{48} = 0{,}12 + 0{,}16 = 0{,}28$$

4.6 Expériences indépendantes

Des expériences aléatoires successives sont indépendantes si le résultat de l'une d'elles n'influe pas sur le résultat des autres.

Propriété 4.5
Dans le cas d'une succession d'expériences aléatoires indépendantes, la probabilité d'obtenir une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat élémentaire de cette liste.

Exemple 4.17
On lance trois fois de suite un dé équilibré à six faces. On obtient ainsi un nombre à trois chiffres : le premir lancer nous donne le chiffre des centaines, le deuxième lancer le chiffre des dizaine et le troisième lancer le chiffre des unités.
Chacun des lancers de dé est indépendant, donc la probablité d'obtenir le nombre 421 est : $p(421) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$.
Attention : ce n'est pas la probabilité d'obtenir « 421 » en jetant trois dés simultanément car dans ce cas, l'ordre n'a pas d'importance (« 421 », « 214 », « 412 », ... ne forment qu'une seule et même combinaison).

Exemple 4.18
On lance une pièce de monnaie équilibrée et on note F l'événement « on obtient face ». Ensuite, on tire une boule dans une urne contenant trois boules rouges et quatre boules blanches. On note R l'évenement « obtenir une rouge ».
Ces deux expériences sont indépendantes. On les réalise successivement. La probabilité d'obtenir l'événement (F, R) est donc : $p(F, R) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$.

4.7 Un problème « type bac »

Extrait du sujet du bac ES - La Réunion - septembre 2006. 5points.
On s'intéresse à une population de 135 000 personnes abonnées à un fournisseur d'accès à Internet. Il existe deux fournisseurs A et B. Toute personne est abonnée à un seul de ces fournisseurs. On sait qu'un tiers des personnes de cette population est abonné au fournisseur A. Par ailleurs, 60 % des personnes abonnées au fournisseur A accèdent à Internet par le haut débit, et 51 % des personnes abonnées au fournisseur B accèdent à Internet par le haut débit.
On choisit une personne au hasard dans cette population, et on admet que la probabilité d'un événement est assimilée à la fréquence correspondante.
On note :
A, l'événement : « la personne choisie est abonnée au fournisseur A »
B, l'événement : « la personne choisie est abonnée au fournisseur B »
H, l'événement : « la personne choisie accède à Internet par le haut débit »

1. Décrire cette situation aléatoire par un arbre pondéré.
2. Montrer que la probabilité de l'événement « la personne est abonnée au fournisseur A et accède à Internet par le haut débit » est égale à 0,20.
3. Montrer que la probabilité de l'événement H : « la personne accède à Internet par le haut débit » est égale à 0,54.
4. Calculer $p_{\mathrm{H}}(\mathrm{A})$, probabilité de A sachant H, puis en donner la valeur décimale arrondie au centième.
5. On choisit au hasard trois personnes dans cette population. On admet que le nombre de personnes est suffisamment grand pour assimiler le choix des trois personnes à des tirages successifs indépendants avec remise. Calculer la probabilité de l'événement « exactement deux des personnes choisies accèdent à Internet par le haut débit ». On en donnera la valeur décimale arrondie au centième.

Chapitre 5

Primitives

5.1 Primitives d'une fonction

5.1.1 Notion de primitive

Définition 5.1
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que la fonction F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et si pour tout $x \in I$, on a $F'(x) = f(x)$.

Exemple 5.1
Soit $F : x \mapsto x^2$, pour $x \in \mathbf{R}$ et $f : x \mapsto 2x$ pour $x \in \mathbf{R}$.
f et F sont définies sur $\mathbf{R}$ et F est dérivable sur $\mathbf{R}$. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $F'(x) = 2x = f(x)$, donc F est une primitive de f sur $\mathbf{R}$.

Exemple 5.2
Déterminer une primitive de f sur I dans les cas suivants :

1. $f(x) = 3x^2 + 3$, pour $I = \mathbf{R}$.
2. $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, pour $I = \mathbf{R}_+^*$.
3. $f(x) = 0$ pour $x \in \mathbf{R}$.

Théorème 5.1 (admis)
Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Remarque 5.1 (notation)
Lorsqu'une fonction est désignée par une lettre minuscule, on note généralement une de ses primitives par la même lettre majuscule.

5.1.2 Ensemble des primitives d'une fonction

Exemple 5.3
Soit $F_1 : x \mapsto 2x^2 + 3x + 4$ et $F_2 : x \mapsto 2x^2 + 3x$. Les fonctions F_1 et F_2 sont définies et dérivables sur $\mathbf{R}$ et on a : $F_1'(x) = 4x + 3$ et $F_2'(x) = 4x + 3$.
Ainsi la fonction f définie par $f(x) = 4x + 3$ admet (au moins) deux primitives sur $\mathbf{R}$.

Propriété 5.1
f est une fonction définie sur un intervalle I. Si f admet une primitive F sur I, alors elle

en admet une infinité. Ces primitives s'écrivent toutes sous la forme $F_k : x \mapsto F(x) + k$. Les fonctions F_k forment *l'ensemble des primitives* de f.

Démonstration :

- Soit $k \in \mathbf{R}$ et G définie sur I par $G : x \mapsto F(x) + k$. Montrons que G est une primitive de f : G est la somme de deux fonctions dérivables sur I : F et la fonction constante égale à k. Elle est donc dérivable sur I et on a : $G'(x) = F'(x) = f(x)$ pour $x \in I$. Donc G est une primitive de f.
- Réciproquement, soit G une primitive de f. Montrons qu'il existe $k \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in I$, on ait $G(x) = F(x) + k$.
  Soit H la fonction définie sur I par $H(x) = G(x) - F(x)$. H est la différence de deux fonctions dérivables sur I elle est donc dérivable sur I et on a : $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. H est une fonction de dérivée nulle sur I, elle est donc constante sur I. Ainsi, il existe $k \in \mathbf{R}$ tel que $H(x) = k$ pour tout $x \in I$. Donc pour tout $x \in I$, $G(x) - F(x) = k$, c'est à dire que $G(x) = F(x) + k$. Ainsi toute primitive de G s'écrit sous cette forme.

Remarque 5.2 (autre formulation)
La propriété 5.1, peut aussi s'énoncer comme suit : deux primitives d'une fonction diffèrent d'une constante.

Exemple 5.4
Déterminer toutes les primitives sur $\mathbf{R}_+^*$ de $f : x \mapsto 2x + 3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Les primitives de f sont les fonctions F_k définies par $F_k(x) = x^2 + 3x + \sqrt{x} + k$, pour $k \in \mathbf{R}$ et $x > 0$.

5.1.3 Primitive avec condition initiale

Propriété 5.2
Soit f une fonction définie sur I admettant des primitives sur I. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbf{R}$.
Il existe une unique primitive F sur I de la fonction f telle que $F(x_0) = y_0$. On dit que F est la primitive de f sur I qui satisfait à la *condition initiale* $F(x_0) = y_0$.

Démonstration :
Soit G une primitive de f sur I. Toutes les primitives de f sur I s'écrivent : $F_k(x) = G(x) + k$ où $k \in \mathbf{R}$ et pour tout $x \in I$.
On a : $F_k(x_0) = G(x_0) + k$. Donc $F_k(x_0) = y_0$ équivaut à $G(x_0) + k = y_0$ ou encore à $k = y_0 - G(x_0)$. Il existe donc une unique valeur de k telle que $F_k(x_0) = y_0$. Cette valeur correspond à une unique primitive de f sur I.

Exemple 5.5
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 4x - 1$.

1. Déterminer toutes les primitives de f sur $\mathbf{R}$.
2. Déterminer la primitive de f sur $\mathbf{R}$ qui s'annule pour $x = 1$.

1. Les primitives de f sur $\mathbf{R}$ sont les fonctions F_k, $k \in \mathbf{R}$ définies par $F_k(x) = 2x^2 - x + k$.
2. La primitive de f qui s'annule pour $x = 1$ est la fonction F_k qui vérifie $F_k(1) = 0$. On a donc à résoudre : $2 \times 1^2 - 1 + k = 0$, qui admet pour solution $k = -1$. La fonction cherchée est donc F_{-1} définie pour $x \in \mathbf{R}$ par $F_{-1}(x) = 2x^2 - x - 1$.

5.2 Recherche de primitives

5.2.1 Primitives de $f+g$ et de λf pour λ réel

Propriété 5.3
Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Si f et g sont deux fonctions définies sur I admettant respectivement F et G pour primitives sur I, alors
– la fonction $f+g$ admet des primitives sur I et l'une d'elles est la fonction $F+G$.
– la fonction λf admet des primitives sur I et l'une d'elles est la fonction λF.

Démonstration :
On note H la fonction définie sur I par $H(x) = F(x) + G(x)$. H est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables sur I et on a : $H'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$. Ainsi $f+g$ admet la fonction $F+G$ comme primitive, elle en admet donc une infinité.

5.2.2 Primitives de fonctions usuelles

En écrivant le tableau des dérivées « à l'envers », on obtient le tableau suivant où k et λ sont des réels quelconques, $n \in \mathbf{N}^*$:

la fonction f définie par...	admet sur I	les primitives F_k définies par...
$f(x) = \lambda$	$I = \mathbf{R}$	$F_k(x) = \lambda x + k$
$f(x) = x^n$	$I = \mathbf{R}$	$F_k(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + k$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$	$I = \mathbf{R}_+^*$ ou $I = \mathbf{R}_-^*$	$F_k(x) = -\dfrac{1}{n-1} \times \dfrac{1}{x^{n-1}} + k$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$I = \mathbf{R}_+^*$	$F_k(x) = 2\sqrt{x} + k$

5.2.3 Autres formules

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et u une fonction dérivable sur I.
– La fonction $u \times u'$ admet $\frac{1}{2}u^2$ pour primitive sur I.
– La fonction $u^n \times u'$ admet $\frac{1}{n+1}u^{n+1}$ pour primitive sur I.
– La fonction $\frac{u'}{u^n}$ admet $-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$ pour primitive (où $n \geq 2$ et I un intervalle sur lequel u ne s'annule pas).
– La fonction $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ admet $2\sqrt{u}$ pour primitive sur I (où I est un intervalle sur lequel u est *strictement* positive).

Exemple 5.6
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = (3x^2+x+1)^2(6x+1)$. f s'écrit sous la forme $u^2 \times u'$ avec u la fonction définie par $u(x) = 3x^2 + x + 1$. Donc une primitive de f s'écrit $\frac{1}{3}u^3$; c'est à dire que les primitives de f sont les fonctions F_k où $k \in \mathbf{R}$ définies par :

$$F_k(x) = \frac{1}{3}(3x^2 + x + 1)^3 + k$$

Exemple 5.7
Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$. La fonction g s'écrit $g = \frac{u'}{\sqrt{u}}$ où u est définie

par $u(x) = x^2 + x + 1$. (En étudiant u, on remarquera que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $u(x) > 0$). Ainsi les primitives de g sont les fonctions G_k où $k \in \mathbf{R}$ définies par :

$$G_k(x) = 2\sqrt{x^2 + x + 1} + k$$

5.3 Notion d'intégrale

5.3.1 Définition

Propriété 5.4
Soit f une fonction définie sur I admettant des primitives sur I. Soit F et G deux primitives de f sur I. Soit a et b deux réels de I. Alors : $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.

Démonstration :
F et G sont deux primitives de f donc elles diffèrent d'une constante : il existe $k \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + k$. On a donc :

$$G(b) - G(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) + k - F(a) - k = F(b) - F(a)$$

Définition 5.2
Soit f une fonction définie sur I un intervalle de $\mathbf{R}$ et admettant la fonction F comme primitive sur I. Si a et b sont deux réels de I, on appelle intégrale de a à b de $f(x)\mathrm{d}x$ le réel $F(b) - F(a)$.

$$\text{On note : } \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Remarque 5.3
Dans l'écriture ci-dessus, la lettre « x » désigne une variable « muette » : on peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre *non utilisée* :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \dots$$

Exemple 5.8
Calculer $\displaystyle\int_2^3 (2x + 3)\mathrm{d}x$:

$$\int_2^3 (2x + 3)\mathrm{d}x = \left[x^2 + 3x\right]_2^3 = (3^2 + 3 \times 3) - (2^2 + 3 \times 2) = 18 - 10 = 8$$

5.3.2 Propriétés

Propriété 5.5
Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I et soit a et b deux réels de I. Alors on a :

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0 \quad \text{et} \quad \int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Démonstration :

Soit F une primitive de f sur I. on a :

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^a = F(a) - F(a) = 0$$

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_b^a = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -[F(x)]_a^b = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

5.3.3 Écriture de primitives

Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I. Soit a un réel de I fixé et x une variable de I : c'est à dire un réel pouvant prendre n'importe quelle valeur de I.
Pour un x fixé, $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est un réel. Si à chaque x de I on associe ce réel, on obtient une fonction définie sur I par :

$$G : x \longmapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

Propriété 5.6
La fonction définie ci-dessus est *la* primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration :
Soit F une primitive de f sur I. On a pour $x \in I$:

$$G(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$$

Or $-F(a)$ est une constante donc $G(x) = F(x)+k$ pour tout x de I. Donc d'après la propriété 5.1 la fonction G est une primitive de f.
De plus $G(a) = F(a) - F(a) = 0$. Donc G est bien la primitive de f qui s'annule pour $x = a$.

Exemple 5.9
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f(t) = \frac{1}{t}$.
La fonction f est continue sur $\mathbf{R}_+^*$ donc elle admet des primitives. On n'en connait pas encore[1] mais on peut les écrire à l'aide d'une intégrale : si $a > 0$,

$$F_a : x \mapsto \int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \text{ est la primitive de } f \text{ qui s'annule en } a.$$

[1] Patience ! Ce sera dans le chapitre 7

Chapitre 6

Suites

6.1 Suite de nombres réels

6.1.1 Définition

Définition 6.1
On appelle suite de terme général u_n et on note $(u_n)_{n\geq 0}$ ou plus simplement u la liste *ordonnée* des nombres u_0, u_1, u_2, u_3, ... Les nombres u_i sont appelés les *termes* de la suite.

Remarque 6.1
Parfois le premier terme d'une suite peut être u_1 et non pas u_0.

Exemple 6.1
On définit (u_n) comme la suite des nombres pairs.
Dans ce cas, on a : $u_0 = 0$, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$, ... On peut écrire aussi $u_n = 2 \times n$.

6.1.2 Mode de génération

Une suite (u_n) est entièrement définie si on est capable de calculer u_n pour n'importe quelle valeur de n. Il existe deux façons usuelles pour définir une suite :

Suite définie « en fonction de n »

Exemple 6.2
On considère la fonction $f : x \longmapsto f(x) = \frac{x+3}{x^2+1}$.
Si $x \in \mathbf{N}$, $f(x)$ est toujours défini. On peut donc considérer la suite u de terme général :

$$u_n = f(n) = \frac{n+3}{n^2+1}$$

On a alors :

$$u_0 = \frac{0+3}{0^2+1} = 3,\ u_1 = \frac{1+3}{1^2+1} = 2,\ \ldots$$

Dans cette situation, on est bien en mesure de calculer u_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Suite définie par récurrence

Exemple 6.3
Je possède 1 000 € sur mon livret d'épargne. Chaque année on me reverse dessus 5 % en intérêts et je rajoute 100 €. J'appelle u_n la somme dont je dispose sur mon livret après n ans. On a donc :
- pour $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = (1 + \frac{5}{100}) \times u_n + 100 = 1,05u_n + 100$.
- la somme disponible sur le livret aujourd'hui est 1 000 €. Donc : $u_0 = 1\ 000$

On a : $u_1 = 1,05 \times 1\ 000 + 100 = 1\ 150$, puis $u_2 = 1,05 \times 1\ 150 + 100 = 1\ 307{,}50 \ldots$. De proche en proche, on peut donc calculer u_n pour n'importe quelle valeur de n.

Remarque 6.2
Lorqu'une suite est définie par récurrence, pour calculer u_n, on est obligé d'avoir calculé avant tous les termes précédents.

6.2 Suites arithmétiques

6.2.1 Définition

Définition 6.2
Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite *arithmétique* si la différence entre deux termes consécutifs est constante. C'est à dire qu'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$. Le réel r est appelé *raison* de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exemple 6.4
Si u est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 3, on a :

$$\begin{aligned}
&u_0 = 5\\
&u_1 = u_0 + 3 = 5 + 3 = 8\\
&u_2 = u_1 + 3 = 8 + 3 = 11
\end{aligned}$$

6.2.2 Calcul du terme général

Théorème 6.1
- si u est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = u_0 + nr$.
- si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = a + b \cdot n$, alors, u est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = a$ et de raison b.

Exemple 6.5
En reprenant la suite de l'exemple 6.4, on a :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbf{N}, \quad u_n = 5 + n \times 3 = 5 + 3n$$

Remarque 6.3
Si le premier terme d'une suite arithmétique est u_1, et sa raison est r, on a :

$$\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = u_1 + (n-1)r$$

6.2.3 Calcul de la somme des premiers termes

Propriété 6.1
La somme S des n premiers termes d'une suite arithmétique est :

$$S = \frac{n \times (\text{premier terme } + \text{ dernier terme})}{2}$$

Dans le cas où le premier terme est u_0, on obtient : $S = \frac{n\times(u_0+u_{n-1})}{2}$.
Dans le cas où le premier terme est u_1, on obtient : $S = \frac{n\times(u_1+u_n)}{2}$.

Exemple 6.6
Soit u la suite arithmétique de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $r = 1$. On a pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = u_1 + (n-1) \times r = nr$. On a donc la somme des n premiers termes qui vaut :

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n \times (1+n)}{2}$$

Application : $1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = \frac{100\times 101}{2} = 5\ 050$.

6.3 Suites géométriques

6.3.1 Définition

Définition 6.3
Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite *géométrique* si chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par un même nombre q. C'est à dire qu'il existe un réel q tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$. Le réel q est appelé *raison* de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Remarque 6.4
Si on considère que la suite u n'est pas la suite nulle[1], u est géométrique si pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$.

Exemple 6.7
Si u est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$, et de raison $q = 2$, on a :
$u_0 = 5$, $u_1 = q \times u_0 = 2 \times 5 = 10$, $u_2 = q \times u_1 = 2 \times 10 = 20$, $u_3 = q \times u_2 = 2 \times 20 = 40$, ...

6.3.2 Calcul du terme général

Théorème 6.2
- si u est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$;
- si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = a \times b^n$, alors, u est la suite géométrique de premier terme $u_0 = a$ et de raison b.

Exemple 6.8
En reprenant la suite géométrique de l'exemple 6.7, on a : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = u_0 \times q^n = 5 \times 2^n$

Remarque 6.5
Si le premier terme est u_1, on a : pour tout $n \in \mathbf{N}^*, u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

[1]La suite nulle est la suite dont tous les termes sont égaux à zéro.

6.3.3 Calcul de la somme des premiers termes

Propriété 6.2
Soit u une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, avec q différent de 1 et de 0.

$$u_0 + u_1 + \ldots\ldots u_n = u_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{u_0 - u_0 \times q^{n+1}}{1-q}$$

On peut aussi écrire :

$$S = \frac{\text{premier terme} - q \times \text{dernier terme}}{1-q} = \frac{1^{\text{er}}\ \text{terme} - 1^{\text{er}}\ \text{terme} \times q^{\text{nbre de termes}}}{1-q}$$

Exemple 6.9
Calculer $S = 3 + 9 + 27 + 81 + \cdots + 2187$:
S est la somme des 7 premiers termes d'une suite géométrique u de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 3$. Donc :

$$S = 3 \times \frac{1-3^7}{1-3} = 3 \times 1093 = 3279$$

Chapitre 7

Logarithme népérien

7.1 La fonction logarithme népérien

7.1.1 La fonction ln

On note f la fonction inverse ($f : x \mapsto \frac{1}{x}$). Cette fonction est définie et continue sur $]0\,;+\infty[$ et elle admet des primitives sur cet intervalle.

Définition 7.1
La fonction logarithme népérien est *la* primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$ qui s'annule pour $x = 1$. On la note ln.
Le logarithme népérien d'un nombre $x > 0$ est noté $\ln(x)$ ou $\ln x$.

Remarque 7.1
Sur la calculatrice la touche permettant de calculer le logarithme népérien d'un réel x strictement positif est la touche `LN`, à ne pas confondre avec la touche `log`.

7.1.2 Premières conséquences

Propriété 7.1
D'après la définition, on a :
– le logarithme népérien de 1 vaut 0 : $\ln 1 = 0$,
– la fonction logarithme népérien est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et :

$$\text{pour } x > 0, \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

– la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$: en effet, pour $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$.

On peut regrouper ces résultats dans le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$\ln' x$	||		$+$		
$\ln x$	||	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

7.1.3 Étude du signe de $\ln x$

D'après l'étude des variations de la fonction ln, on a la propriété suivante :

Propriété 7.2
Pour tous réels a et b de $\mathbf{R}_+^*$, on a :

$\ln a > \ln b$ si et seulement si $a > b$;

$\ln a = \ln b$ si et seulement si $a = b$.

En utilisant le fait que $\ln 1 = 0$ on obtient alors la propriété qui suit :

Propriété 7.3
Pour tout réel $x > 0$, on a :

$\ln x = 0$ si et seulement si $x = 1$;

$\ln x > 0$ si et seulement si $x > 1$;

$\ln x < 0$ si et seulement si $x < 1$.

7.1.4 Fonction composée

Exemple 7.1
Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(2x+4)$. Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de f et calculer sa dérivée. Étudier ensuite le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
$f(x)$ existe pour $2x+4 > 0$ c'est à dire pour $x > -2$. Donc $\mathscr{D}_f =]-2\,;+\infty[$. La fonction logarithme est dérivable sur son ensemble de définition donc f est dérivable sur $]-2\,;+\infty[$.
Pour $x > -2$, on a : $f'(x) = \ln'(u(x)) \times u'(x)$ où $u : x \mapsto 2x+4$ (dérivée d'une fonction composée).
On obtient donc : pour $x > -2$, $f'(x) = \frac{1}{2x+4} \times 2 = \frac{2}{2x+4} = \frac{1}{x+2}$.
$f(x) > 0$ si et seulement si $2x+4 > 1$, c'est à dire pour $x > -\frac{3}{2}$.

Exemple 7.2 (Équation)
Résoudre l'équation suivante : $\ln(2x^2 - 12) = \ln(5x)$.
Pour que cette équation ait un sens, il faut nécessairement que $2x^2 - 12 > 0$ et que $5x > 0$. On dresse un tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\sqrt{6}$		0		$\sqrt{6}$		$+\infty$
$2x^2-12$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$5x$			$-$		0		$+$		

On résout donc l'équation pour $x \in]\sqrt{6}\,;+\infty[$.
Pour $x > \sqrt{6}$, $\ln(2x^2 - 12) = \ln(5x)$ si et seulement si $2x^2 - 12 = 5x$ (prop 7.2).
On résout donc l'équation $2x^2 - 5x - 12 = 0$ qui a deux solutions : $\alpha = -\frac{3}{2}$ et $\beta = 4$. La solution α ne convient pas car $-\frac{3}{2} \leq \sqrt{6}$ par contre la solution β convient.
La solution à l'équation de départ est donc $\mathscr{S} = \{4\}$.

Exemple 7.3 (inéquation)
Résoudre l'inéquation $\ln(2x+3) \geq 0$.
Pour que cette inéquation ait un sens, il faut que $2x+3 > 0$ soit $x > -\frac{3}{2}$.

Ensuite, on utilise la propriété 7.3, ainsi pour $x > -\frac{3}{2}$, on a $\ln(2x+3) \geq 0$ si et seulement si $2x+3 \geq 1$; c'est à dire $x \geq -1$.
La solution est donc : $\mathscr{S} = [-1\,;\,+\infty[$

7.2 Propriétés algébriques

7.2.1 logarithme d'un produit

Propriété 7.4
Si a et b sont deux réels strictement positifs, alors on a :

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

démonstration :
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f(x) = \ln(ax) - \ln(x)$ (où $a > 0$).
f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ comme composée de fonctions et pour $x > 0$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{ax} \times a - \frac{1}{x} = 0. \text{ Donc } f \text{ est constante.}$$

Donc pour tout $x > 0$, $f(x) = f(1) = \ln(a) - \ln(1) = \ln(a)$.
En prenant $x = b$, on obtient : $f(b) = \ln(a)$ donc $\ln(ab) - \ln(b) = \ln(a)$. D'où la propriété.

Remarque 7.2
Attention, a et b doivent tous les deux être strictement positifs pour pouvoir appliquer cette propriété :
si $a = -3$ et $b = -2$, alors $\ln(ab)$ existe car $ab = (-3) \times (-2) = 6 > 0$ mais $\ln(a) + \ln(b)$ n'existe pas car a et b sont négatifs.

7.2.2 logarithme d'un inverse, d'un quotient

Propriété 7.5
Pour tout $a > 0$, $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$.

Démonstration :
Pour tout $a > 0$ on a :

$$\begin{array}{rcll} \ln(a) + \ln(\frac{1}{a}) & = & \ln(a \times \frac{1}{a}) & \text{d'après la prop. 7.4} \\ & = & \ln(\frac{a}{a}) & \\ & = & \ln(1) & \\ & = & 0 & \end{array}$$

Donc $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = 0 - \ln(a) = -\ln(a)$.

Propriété 7.6
Si a et b sont deux réels strictement positifs, alors :

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

Démonstration :
Pour tout $a > 0$ et tout $b > 0$, on a :

$$\begin{array}{rcll}\ln(\frac{a}{b}) & = & \ln(a \times \frac{1}{b}) & \\ & = & \ln(a) + \ln(\frac{1}{b}) & \text{d'après la prop. 7.4} \\ & = & \ln(a) + (-\ln(b)) & \text{d'après la prop. 7.5} \\ & = & \ln(a) - \ln(b) & \end{array}$$

7.2.3 logarithme d'une puissance, d'une racine

Propriété 7.7
Si a est un réel strictement positif et n un entier relatif, alors :

$$\ln(a^n) = n\ln(a)$$

Démonstration :
- Si $n = 0$, alors $\ln(a^0) = \ln(1) = 0 = 0 \times \ln(a)$.
- Si $n > 0$, alors $\ln(a^n) = \ln(\underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}) = \underbrace{\ln(a) + \cdots + \ln(a)}_{n \text{ termes}} = n\ln(a)$.
- Si $n < 0$, on pose $m = -n > 0$. On a alors $\ln(a^n) = \ln(\frac{1}{a^m}) = -\ln(a^m) = -m\ln(a) = n\ln(a)$.

Propriété 7.8
Si a est un réel strictement positif, alors $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

Démonstration :
$a > 0$ donc $a = (\sqrt{a})^2$. Donc $\ln(a) = \ln\left((\sqrt{a})^2\right) = 2\ln(\sqrt{a})$.
Donc $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

7.3 Étude de la fonction ln

7.3.1 Étude des limites en $+\infty$ et en 0

On a les résultats suivants :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$$

Démonstration :
Il s'agit de montrer que pour tout $M > 0$, aussi grand soit-il, il existe une valeur $\alpha > 0$ telle que pour tous les $x > \alpha$, $\ln(x) > M$.
Pour tout $M > 0$ il existe un entier n tel que $n > \frac{M}{\ln(10)}$ (Il suffit de calculer $\frac{M}{\ln(10)}$ et de prendre la valeur arrondie à l'unité par excès).
En prenant $\alpha = 10^n$, on a :

$$\begin{array}{llll}\text{Pour tout } x > \alpha, & \text{on a} & \ln(x) > \ln(10^n) & \text{car ln est croissante} \\ & \text{donc} & \ln(x) > n\ln(10) & \text{Prop. 7.7} \\ & \text{donc} & \ln(x) > \frac{M}{\ln(10)} \times \ln(10) & \text{car } n > \frac{M}{\ln(10)} \\ & \text{donc} & \ln(x) > M & \end{array}$$

Pour la limite en 0, on pose $X = \frac{1}{x}$. On a alors :

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = \lim_{X\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{X\to+\infty} (-\ln(X)) = -\infty$$

Conséquence graphique :
L'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction ln.

7.3.2 Courbe représentative

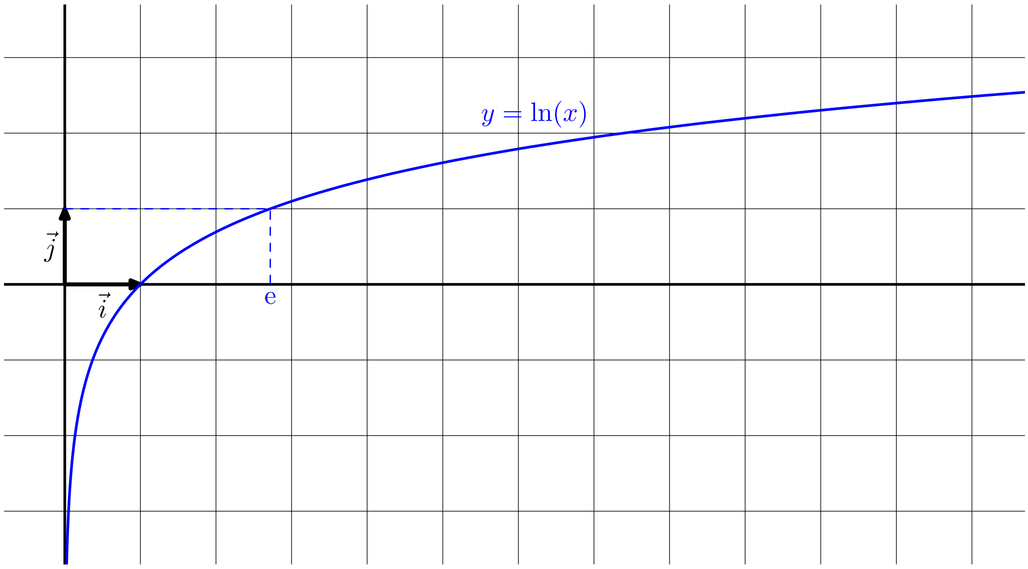
On peut compléter le tableau de variation de la fonction ln :

x	0		1		$+\infty$
$\ln' x$	||		$+$		
$\ln x$	||	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$		$+\infty$

Étude de la tangente à $\mathscr{C}_{\ln}$ en 1 :
On a $f(1) = 0$ et $f'(1) = \frac{1}{1} = 1$. Donc l'équation de la tangente est :

$$T_1 : y = x - 1$$

D'après ses variations la fonction ln est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$ et de plus, $\ln\left(\mathbf{R}_+^*\right) = \mathbf{R}$ (d'après les limites en 0 et $+\infty$). Or $1 \in \mathbf{R}$ donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire (Théorème 2.6 page 21), l'équation $\ln(x) = 1$ admet une unique solution sur $\mathbf{R}_+^*$: c'est l'abscisse du point de $\mathscr{C}_{\ln}$ qui a pour ordonnée 1. Ce nombre est noté e et il vaut environ 2,718.



7.3.3 Quelques limites à connaitre

Propriété 7.9

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0; \qquad \lim_{x \to 0} x \ln x = 0; \qquad \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$$

Démonstration :
On pose $g : x \longmapsto \ln(x) - \sqrt{x}$. La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$.
Pour $x > 0$, on a $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2-\sqrt{x}}{2x}$. Dressons le tableau de variation de la fonction g :

x	0		4		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
g	$\|\|$	$\nearrow$	$\ln 4 - 2$	$\searrow$	

On a $g(4) = \ln(4) - \sqrt{4} \approx -0{,}61$ (calculatrice), donc d'après le tabelau pour tout $x > 0$, on a $\ln x - \sqrt{x} < 0$; donc $\ln x < \sqrt{x}$. En divisant les deux membres de cette inéquation par $x > 0$, on obtient : $\frac{\ln x}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
Or pour $x > 1$ (cas qui nous intéresse puisqu'on cherche une limite en $+\infty$), $\frac{\ln(x)}{x} > 0$. On a donc pour $x > 1$:

$$0 < \frac{\ln(x)}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Donc d'après le théorème d'encadrement (théorème 2.4 page 19), on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

7.3.4 Équation $\ln x = m$

On a vu que la fonction ln est strictement croissante et continue sur $\mathbf{R}_+^*$. De plus, $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$. Donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire (Théorème 2.6 page 21), pour tout $m \in \mathbf{R}$, il existe une unique valeur $x_0 \in \mathbf{R}_+^*$ telle que $f(x_0) = m$.
Ainsi, pour tout $m \in \mathbf{R}$, l'équation $\ln(x) = m$ admet une unique solution dans $\mathbf{R}_+^*$. Nous verrons dans le chapitre 8 quelle sera cette solution.

7.4 Étude d'une fonction composée

7.4.1 Dérivée

Théorème 7.1
Soit u une fonction définie dérivable et strictement positive sur un intervalle I. Alors la fonction $\ln(u)$ est dérivable sur I et on a :

$$\text{Pour tout } x \in I, (\ln(u))'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

On écrit aussi : $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

Démonstration :
On a : $\ln \circ u$ qui est définie sur I, u est dérivable sur I et pour tout $x_0 \in I$, $u(x_0) > 0$ donc ln est dérivable en $u(x_0)$. Donc, d'après le théorème de dérivation d'une fonction composée (Théorème 3.6 page 26), pour tout $x_0 \in I$, $\ln \circ u$ est dérivable en x_0.
Ainsi, $\ln \circ u$ est dérivable sur I et on a :

$$(\ln(u))' = \ln'(u) \times u' = \frac{1}{u} \times u' = \frac{u'}{u}$$

Exemple 7.4
Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(x^2 - 2x - 4)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Calculer $f'(x)$.
4. En déduire les variations de f. Dresser son tableau de variation.

7.4.2 Primitive de $\frac{u'}{u}$

Théorème 7.2
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, de signe constant sur I et qui ne s'annule pas sur I.

– Si u est strictement positive sur I alors les primitives de $\frac{u'}{u}$ sont les fonction F_k qui s'écrivent sous la forme :
$$F_k(x) = \ln(u(x)) + k,\ \text{où } k \in \mathbf{R}$$
– Si u est strictement négative sur I alors les primitives de $\frac{u'}{u}$ sont les fonction F_k qui s'écrivent sous la forme :
$$F_k(x) = \ln(-u(x)) + k,\ \text{où } k \in \mathbf{R}$$

Exemple 7.5
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$. Déterminer la primitive de f sur $\mathbf{R}$ qui s'annule en 0.
Pour $x \in \mathbf{R}$, $x^2 + x + 1 > 0$ (il suffit de calculer le discriminant...). Ainsi f s'écrit sous la forme $f = \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + x + 1$, et u strictement positive sur $\mathbf{R}$.
Les primitives de f sont donc les fonctions F_k définies par $F_k(x) = \ln(x^2 + x + 1) + k$ où $k \in \mathbf{R}$.
$F_k(0) = 0$ si et seulement si $\ln(0^2 + 0 + 1) + k = 0$; soit $k = 0$. La primitive cherchée est donc la fonction F définie sur $\mathbf{R}$ par : $F(x) = \ln(x^2 + x + 1)$.

Exemple 7.6
Soit f la fonction définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$. Déterminer la primitive de f sur $]1\,;\,+\infty[$ qui s'annule pour $x = 2$.
On a $f = \frac{u'}{u}$ avec pour $x > 1$, $u(x) = 1 - x^2 = (1 - x)(1 + x) < 0$.
Donc d'après le théorème 7.2, les primitives de f sur $]1\,;\,+\infty[$ sont les fonctions F_k définie par :
$$\text{Pour } x > 1, F_K(x) = \ln\left(-(1 - x^2)\right) + k = \ln(x^2 - 1) + k,\ \text{où } k \in \mathbf{R}$$
On cherche k tel que $F_k(2) = 0$; Soit $\ln(3) + k = 0$. D'où $k = -\ln(3)$. La primitive cherchée est la fonction F définie pour $x > 1$ par :
$$F(x) = \ln(x^2 - 1) - \ln(3)$$

Chapitre 8

Fonction exponentielle

8.1 La fonction exponentielle

8.1.1 Définition

On a vu dans le chapitre 7 que l'équation $\ln(x) = m$ admet une unique solution pour tout $m \in \mathbf{R}$ et cette solution est un réel strictement positif (voir le paragraphe 7.3.4).
Autrement dit, pour tout $x \in \mathbf{R}$, il existe un unique $y > 0$ tel que $x = \ln(y)$.

Définition 8.1
La fonction exponentielle est la fonction définie sur $\mathbf{R}$ qui, à chaque réel x associe le réel strictement positif y vérifiant $x = \ln(y)$. La fonction exponentielle est notée exp.

Exemple 8.1
– On a $\ln(1) = 0$ donc $\exp(0) = 1$.
– On a $\ln(\mathrm{e}) = 1$ donc $\exp(1) = \mathrm{e}$, où e est le réel défini au chapitre 7 comme étant l'antécédent de 1 par la fonction ln. e valant environ 2,718.

Remarque 8.1
On a vu que pour $n \in \mathbf{Z}$, $\ln(\mathrm{e}^n) = n \times \ln(\mathrm{e}) = n$. Donc en utilisant la définition de la fonction exponentielle, on a : pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $\exp(n) = \mathrm{e}^n$. Par convention, on généralise cette notation à tous les nombres : pour $x \in \mathbf{R}$ on note e^x l'image de x par la fonction exponentielle.

$$\text{Pour } x \in \mathbf{R}, \text{ on a : } \mathrm{e}^x = \exp(x)$$

8.1.2 Premières propriétés

Propriété 8.1
(1) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\mathrm{e}^x > 0$.

(2) Pour tout $y \in \mathbf{R}_+^*$, $\mathrm{e}^x = y$ si et seulement si $x = \ln(y)$.

(3) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\ln\left(\mathrm{e}^x\right) = x$.

(4) Pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, on a $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$.

Démonstration :

(1) D'après la définition de la fonction exponentielle, e^x est le réel strictement positif y tel que $x = \ln(y)$. Donc $\mathrm{e}^x = y > 0$.

(2) Même démonstration que le point précédent.

(3) Soit $x \in \mathbf{R}$. D'après la définition 8.1, on a $\mathrm{e}^x = y$ avec $\ln(y) = x$.
Donc $\ln(\mathrm{e}^x) = \ln(y) = x$.

(4) On pose $y = \ln(x)$. On a $\mathrm{e}^y = z > 0$ avec $\ln(z) = y = \ln(x)$. Or $x > 0$ et $z > 0$ donc, $\ln(z) = \ln(x)$ si et seulement si $x = z$. Donc $x = z = \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{\ln(x)}$.

Propriété 8.2
Pour tous réels a et b on a :

$\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b$ si et seulement si $a = b$.

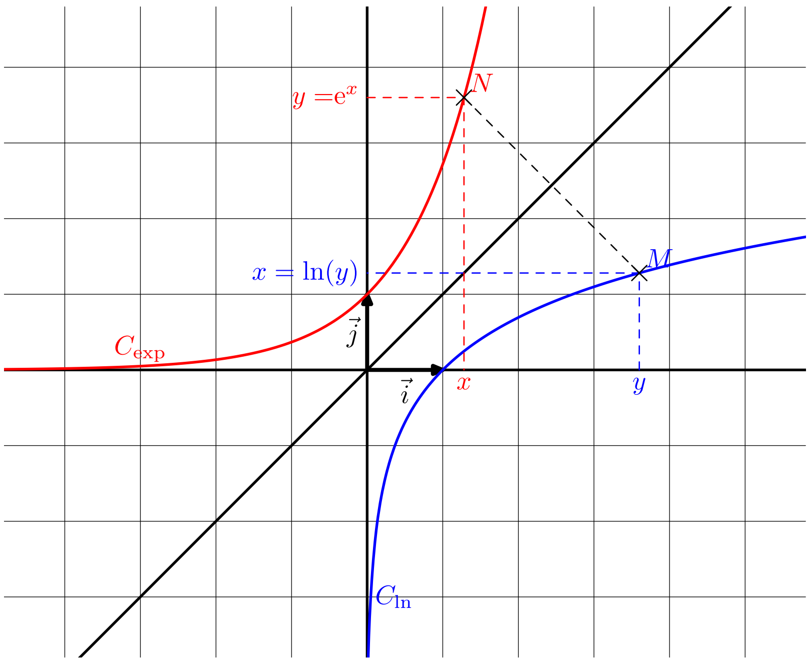
$\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b$ si et seulement si $a < b$.

Démonstration :
On pose $y_a = \mathrm{e}^a$ et $y_b = \mathrm{e}^b$ les réels strictement positifs tels que $\ln(y_a) = a$ et $\ln(y_b) = b$. On a donc :

$$\begin{aligned} a = b &\iff \ln(y_a) = \ln(y_b) \\ &\iff y_a = y_b \text{ (d'après la prop 7.2)} \\ &\iff \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a < b &\iff \ln(y_a) < \ln(y_b) \\ &\iff y_a < y_b \text{ (d'après la prop 7.2)} \\ &\iff \mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b \end{aligned}$$

8.1.3 Courbe représentative

Propriété 8.3 (admise)
Dans un repère orthonormal, les courbes représentatives des fonctions logarithme népérien et exponentielle sont symétriques par rapport à la droite d'equation $y = x$.



Dans le repère orthonormal ci-dessus, le point M est le point de $\mathscr{C}_{\ln}$ d'abscisse y. Ses coordonnées sont donc $M(y\,;\ln(y))$.
Son symétrique par rapport à $\Delta : y = x$ est le point N de coordonnées $N(\ln(y)\,;y)$. On a donc $y_N = \exp(x_N)$ car $\exp(x_N) = \exp(\ln(y)) = y$ d'après la propriété 8.1. Donc $N \in \mathscr{C}_{\exp}$.

8.2 Propriétés algébriques

Théorème 8.1

– Pour tous réels a et b, on a : $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^b$.
– Pour tout réel a et tout entier relatif p, on a : $(\mathrm{e}^a)^p = \mathrm{e}^{pa}$.
– Pour tout réel a, on a $\mathrm{e}^{-a} = \frac{1}{\mathrm{e}^a}$.
– Pour tous réels a et b, on a $\mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$.

Démonstration :
Deux nombres réels strictement positifs sont égaux si et seulement si leurs logarithmes népériens sont égaux (Propriété 7.2).
– On a : $\ln(\mathrm{e}^{a+b}) = a + b$ et $\ln(\mathrm{e}^a\mathrm{e}^b) = \ln(\mathrm{e}^a) + \ln(\mathrm{e}^b) = a + b$. D'où $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^b$.
– De même, $\ln((\mathrm{e}^a)^p) = p\ln(e^a) = pa$ et $\ln(\mathrm{e}^{pa}) = pa$. Donc $(\mathrm{e}^a)^p = \mathrm{e}^{pa}$.
– ...

8.3 Étude de la fonction exponentielle

8.3.1 Limites en $+\infty$ et en $-\infty$

Propriété 8.4

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$$

Démonstration :
Limite en $-\infty$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} \exp(\ln(x)) = \lim\limits_{X\to-\infty} \exp(X) \\ \text{Or } \exp(\ln(x)) = x \text{ donc :} \\ \lim\limits_{x\to 0} \exp(\ln(x)) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0 \end{array}\right\} \text{donc : } \lim_{X\to-\infty} = 0$$

Limite en $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \exp(\ln(x)) = \lim\limits_{X\to+\infty} \exp(X) \\ \text{Or } \exp(\ln(x)) = x \text{ donc :} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \exp(\ln(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \text{donc : } \lim_{X\to+\infty} = +\infty$$

8.3.2 Dérivée

Propriété 8.5
La dérivée de la fonction exponentielle sur $\mathbf{R}$ est elle-même :
pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\exp'(x) = \exp(x)$.

Démonstration :
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \ln(\exp(x))$.
Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $f(x) = x$, donc $f'(x) = 1$. Or en utilisant le théorème 7.1 sur la dérivée d'une fonction composée avec la fonction ln, on a :
Pour $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = \frac{\exp'(x)}{\exp(x)}$. Ainsi : $\frac{\exp'(x)}{\exp(x)} = 1$, d'où $\exp'(x) = \exp(x)$.

8.3.3 Variations et courbe

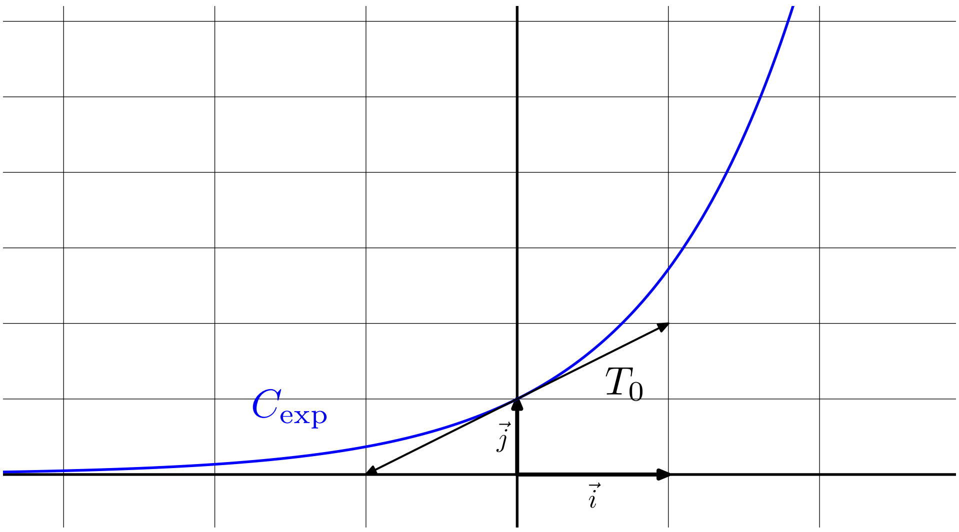
Propriété 8.6
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

Démonstration :
On a vu que la dérivée de l'exponentielle est elle-même et que l'exponentielle est une fonction strictement positive. Donc la dérivée de l'exponentielle est strictement positive d'où le résultat.
On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$	
$\exp$	0 ↗	1	↗ $+\infty$

Tangente en 0 :
L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_{\exp}$ au point A d'abscisse 0 est :
$y = \exp'(0)(x-0) + \exp(0)$, soit $y = x + 1$.

Courbe représentative :



8.3.4 Quelques limites à connaitre

Propriété 8.7
On a les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty; \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Démonstration :
– La première limite est une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ».
En posant $X = e^x$, on a $x = \ln(X)$ et $\lim x \to +\infty X = +\infty$. Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{X\to+\infty} \frac{X}{\ln X} = +\infty$$

En effet, pour $X > 1$, on a $\frac{X}{\ln(X)} > 0$ et $\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ donc $\lim_{X\to+\infty} \frac{X}{\ln X} = +\infty$

– La deuxième limite est une forme indéterminée du type « $-\infty \times 0$.
On pose $X = \mathrm{e}^x$, on a $x = \ln(X)$ et $\lim_{x \to -infty} X = 0$. Donc :

$$\lim_{xto-infty} e\mathrm{e}^x = \lim_{X \to 0} \ln(X) \times X = 0$$

– La troisième limite est une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ».
Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\exp'(x) = \exp(x)$; donc $\exp'(0) = 1$. Mais en utilisant la définition du nombre dérivé en 0, on a aussi :

$$1 = \exp'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$$

8.4 Étude d'une fonction composée e^u

8.4.1 Dérivée. Variations

Propriété 8.8
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors la fonction $f = \mathrm{e}^u = \exp \circ u$ est dérivable sur I et pour $x \in I$, $f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.

Exemple 8.2
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{2x^2-3x}$. f s'écrit e^u avec pour $x \in \mathbf{R}$, $u(x) = 2x^2-3x$. La fonction u est dérivable sur $\mathbf{R}$ donc f est également dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = (4x-3)\mathrm{e}^{2x^2-3x}$.

Remarque 8.2
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbf{R}$ donc les fonctions u et e^u ont les mêmes variations (voir le théorème 3.3).

8.4.2 Primitives

Propriété 8.9
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.
Alors la fonction f admet des primitives sur I et l'une d'entre elles est la fonction F définie sur I par $F(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$.

Exemple 8.3
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f(x) = -\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.
On peut écrire $f(x) = -\frac{1}{x^2} \times \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$ avec $u(x) = \frac{1}{x}$.
Donc f admet pour primitives sur $\mathbf{R}_+^*$ les fonctions F_k définies pour $x > 0$ par : $F_k(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + k$.

8.4.3 Exemple d'étude

Exemple 8.4
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

1. Étudier les limites de $f(x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Pour $x \in \mathbf{R}$, calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Déterminer l'équation de la tangente Δ à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
5. Tracer Δ et $\mathscr{C}_f$ dans un repère.

Chapitre 9

Lois de probabilité

9.1 Lois de probabilité

9.1.1 Cas général

On considère une expérience aléatoire ayant un nombre fini d'éventualités. On dit qu'on a défini la loi de probabilité de cette expérience si on connaît la probabilité de chaque éventualité de cette expérience.
Généralement, on donne une loi de probabilité sous la forme d'un tableau :

Éventualité x_i	...	...
Probabilité p_i		

Remarque 9.1
La somme des « p_i » vaut 1 : $\sum p_i = 1$

Exemple 9.1
Dans une urne, on a placé trois boules rouges, deux boules blanches, cinq boules vertes et dix boules jaunes. On tire une boule au hasard dans l'urne. On note B l'événement « la boule est blanche », ...
La loi de probabilité de cette expérience est donc :

x_i	R	B	V	J
p_i	0,15	0,1	0,25	0,5

On a bien : $\sum p_i = 0{,}15 + 0{,}1 + 0{,}25 + 0{,}5 = 1$

9.1.2 Loi de Bernoulli

Définition 9.1
Lorsqu'une expérience aléatoire n'admet que deux issues qu'on nomme alors *succès* et *échec*, on l'appelle *épreuve de Bernoulli*[1].
Dans une épreuve de Bernoulli, on note généralement « p » la probabilité de succès. La probabilité de l'échec est alors $1 - p$.

La loi de probabilité d'une épreuve de Bernoulli est définie par :

x_i	Succès	Échec
p_i	p	$1 - p$

[1]Famille de mathématiciens et physiciens suisses

Exemple 9.2
On lance un dé équilibré à six faces. On s'intéresse à la divisibilité par 3 du chiffre obtenu. On note S (succès) l'événement « le chiffre obtenu est divisible par 3 ».
Cette expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{3}$ car $p(S) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (seuls 3 et 6 sont divisibles par 3).

9.1.3 Loi Binomiale

Définition 9.2
On répéte n fois de manière indépendante la même épreuve de Bernoulli de paramètre p. On s'intéresse au nombre de succès obtenus au cours de ces n expériences.
Cette expérience admet $n+1$ éventualités : 0 succès, 1 succès, 2 succès, ..., n succès.
La loi de probabilité sur ces $n+1$ éventualités est appelée *loi Binomiale* de paramètres p et n.

Obtenir une loi Binomiale :
Pour obtenir la loi Binomiale de paramètres n et p, on construit un arbre pondéré à n niveaux où chaque noeud se sépare en deux branches : S et E.
Pour k compris entre 0 et n, on compte alors le nombre N_k de chemins ayant k succès.
Chaque chemin ayant k succès a pour probabilité le produit des probabilités de chaque éventualité qui le constitue soit :

$$\underbrace{p \times \cdots \times p}_{\substack{k \text{ facteurs} \\ (k \text{ succès})}} \times \underbrace{(1-p) \times \cdots \times (1-p)}_{\substack{n-k \text{ facteurs} \\ (n-k) \text{ échecs}}} = p^k \times (1-p)^{n-k}$$

La loi Binomiale est donc donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	...	k	...	n
p_i	$(1-p)^n$	$N_1 p(1-p)^{n-1}$	$N_2 p^2 (1-p)^{n-2}$		$N_k p^k (1-p)^{n-k}$		p^n

où x_i est le nombre de succès obtenus.

Exemple 9.3
Un élève vient au lycée tous les jours en vélo. Sur son chemin il rencontre un feu qui est vert 40 % du temps.
L'élève part de chez lui à un horaire aléatoire et n'arrive donc pas toujours à la même heure au feu. On s'intéresse au nombre de fois où l'élève arrive au feu vert au cours d'une semaine de quatre jours. Déterminer la loi de cette expérience aléatoire.
Il s'agit d'une expérience de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}4$ répétée quatre fois : on est donc en présence d'une loi binomiale de paramètres $p = 0{,}4$ et $n = 4$.
On détermine le nombre de chemins ayant k succès (k feux verts) pour $0 \leq k \leq 4$:
arbre
On obtient : $N_0 = 1$, $N_1 = 4$, $N_2 = 6$, $N_3 = 4$ et $N_4 = 1$. La loi de cette expérience est donc :

x_i	0	1	2	3	4
p_i	$1 \times 0{,}4^0 \times 0{,}6^4$ $= 0{,}129\,6$	$4 \times 0{,}4^1 \times 0{,}6^3$ $= 0{,}345\,6$	$6 \times 0{,}4^2 \times 0{,}6^2$ $= 0{,}345\,6$	$4 \times 0{,}4^3 \times 0{,}6^1$ $= 0{,}153\,6$	$1 \times 0{,}4^4 \times 0{,}6^0$ $= 0{,}025\,6$

9.2 Espérance et variance d'une loi

Définition 9.3
On considère une loi de probabilité dont les n éventualités x_i $(1 \leq i \leq n)$ sont des réels. Les probabilités associées sont notées p_i.
On appelle *espérance* de cette loi le réel :

$$E = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i$$

On appelle *variance* de cette loi le réel positif :

$$V = p_1(x_1 - E)^2 + p_2(x_2 - E)^2 + \cdots + p_n(x_n - E)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E)^2$$

On appelle *écart-type* de cette loi le réel positif :

$$\sigma = \sqrt{V}$$

Interprétation :
- en considérant les x_i comme des gains algébriques[2], l'espérance est le gain (algébrique) moyen qu'on peut espérer sur la répétition d'un grand nombre d'épreuves ;
- on dit qu'un jeu est *équitable* si son espérance est nulle ;
- la variance mesure le « risque » de s'écarter de l'espérance ;
- si les gains sont exprimés en €, l'espérance est exprimée en €, la variance en « €^{2} » et l'écart-type en €.

Propriété 9.1
Dans les conditions de la définition 9.3, on a aussi :

$$V = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i^2 - E^2$$

Exemple 9.4
On lance deux fois de suite une pièce équilibrée. Les issues possibles sont notées PP, PF, FP et FF. À chaque sortie de P on gagne 1 € et à chaque sortie de F on perd 1 €.

1. Quels sont les gains algébriques possibles ?
2. Quelle est la loi de probabilité de cette expérience ?
3. Calculer son espérance.
4. Ce jeu est-il équitable ?

Propriété 9.2 (admise)
L'espérance d'une loi binomiale de paramètres n et p est $E = n \times p$.

[2] Les x_i positifs sont des gains et les x_i négatifs sont des pertes

Chapitre 10

Exponentielle de base a. Croissances comparées

10.1 Fonction exponentielle de base a

10.1.1 Notation

Définition 10.1
Soit $a > 0$ et b un réel quelconque. Le nombre a^b est défini par :

$$a^b = \mathrm{e}^{b\ln(a)}$$

Remarque 10.1
Cette définition est cohérente avec la définition de a^n où n est un entier naturel non nul. En effet, si $n \in \mathbf{N}^*$ alors :

$$a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}} = \underbrace{\mathrm{e}^{\ln(a)} \times \cdots \times \mathrm{e}^{\ln(a)}}_{n \text{ facteurs}} = \mathrm{e}^{\overbrace{\ln(a)+\cdots+\ln(a)}^{n \text{ termes}}} = \mathrm{e}^{n\ln(a)}$$

Propriété 10.1
Soit $a > 0$, $a' > 0$, $b \in \mathbf{R}$ et $b' \in \mathbf{R}$. Alors on a :

$$\begin{array}{ccc} 1^b = 1 & (aa')^b = a^b \times a'^b & a^b \times a^{b'} = a^{b+b'} \\ \frac{a^b}{a'^b} = \left(\frac{a}{a'}\right)^b & \frac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'} & (a^b)^{b'} = a^{bb'} \end{array}$$

Démonstration :
$1^b = \mathrm{e}^{b\ln(1)} = \mathrm{e}^0 = 1$
$(aa')^b = \mathrm{e}^{b\ln(aa')} = \mathrm{e}^{b(\ln(a)+\ln(a'))} = \mathrm{e}^{b\ln(a)+b\ln(a')} = \mathrm{e}^{b\ln(a)}\mathrm{e}^{b\ln(a')} = a^b \times a'^b$
$a^b \times a^{b'} = \mathrm{e}^{b\ln(a)} \times \mathrm{e}^{b'\ln(a)} = \mathrm{e}^{b\ln(a)+b'\ln(a)} = \mathrm{e}^{(b+b')\ln(a)} = a^{b+b'}$
...
$(a^b)^{b'} = \mathrm{e}^{b'\ln(a^b)} = \exp\left(b'\ln(a^b)\right) = \exp\left(b' \times \ln\left(\mathrm{e}^{b\ln(a)}\right)\right) = \exp\left(b' \times b\ln(a)\right) = a^{bb'}$

Exemple 10.1
$2^{\sqrt{2}} \times 2^{\sqrt{8}} = 2^{\sqrt{2}+\sqrt{8}} = 2^{\sqrt{2}(1+2)} = 2^{3\sqrt{2}} = \left(2^3\right)^{\sqrt{2}} = 8^{\sqrt{2}}$

10.1.2 Racine n^{e} d'un réel strictement positif

Théorème 10.1
Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Alors :
d'une part, $\left(a^{1/n}\right)^n = a$
d'autre part, $a^{1/n}$ est l'unique réel strictement positif solution de $x^n = a$.
Ce nombre est appelé *racine n^e* de a.

Remarque 10.2
Dans le cas où $n = 2$, on retrouve la définition de la racine carrée d'un nombre positif.

Définition 10.2
Soit a_1, a_2, …, a_n n nombres strictement positifs.
On appelle *moyenne géométrique* de ces nombres le réel positif a défini par :

$$a = (a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

Exemple 10.2
La moyenne géométrique des cinq premiers entiers non nuls est :

$$(1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5)^{\frac{1}{5}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{5}\ln(120)} \approx 2{,}6$$

À ne pas confondre avec la moyenne arithmétique qui est :

$$\frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

10.1.3 Fonction $x \mapsto a^x$ avec $a > 0$

Définition 10.3
Soit a un réel strictement positif. On appelle *fonction exponentielle de base a* la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$x \mapsto a^x \quad \text{ou } x \mapsto \mathrm{e}^{x\ln(a)}$$

Remarque 10.3
La fonction exponentielle de base a est de la forme $\exp \circ u$ avec u définie par $u(x) = x\ln(a)$.
On en déduit que :
- pour $x \in \mathbf{R}$, $a^x > 0$,
- pour $a = \mathrm{e}$, on retrouve la fonction exponentielle « classique ».

Étude de la fonction :
Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$ et soit $f : x \mapsto a^x$.

Théorème 10.2
La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = a^x \times \ln(a)$.

Démonstration :
On utilise le théorème 3.6 sur la dérivée d'une fonction composée :
la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbf{R}$, la fonction $x \mapsto x\ln(a)$ est également dérivable sur $\mathbf{R}$ (c'est une fonction linéaire) donc f est dérivable sur $\mathbf{R}$.
De plus, on a pour $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = \exp'(x\ln(a)) \times \ln(a) = a^x \times \ln(a)$.

Théorème 10.3

- Si $a < 1$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbf{R}$;
- Si $a = 1$ alors f est constante sur $\mathbf{R}$ (égale à 1) ;
- Si $a > 1$ alors f est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

Théorème 10.4

- Si $a < 1$ alors $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{cases}$
- Si $a > 1$ alors $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$

Tableaux de variations :

Si $a < 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$+\infty$ ↘	1 ↘	0

Si $a > 1$

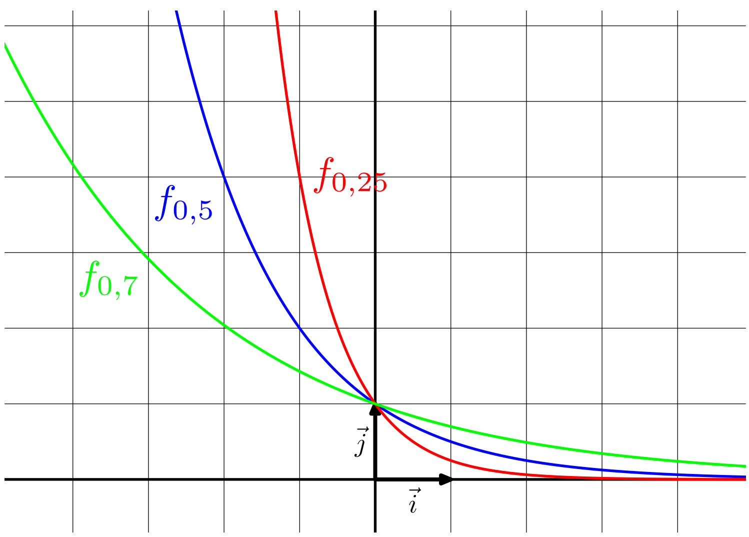
x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

On remarque que pour tout $a > 0$, la courbe représentant la fonction f passe par le point $J(0;1)$. Déterminons l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point J :

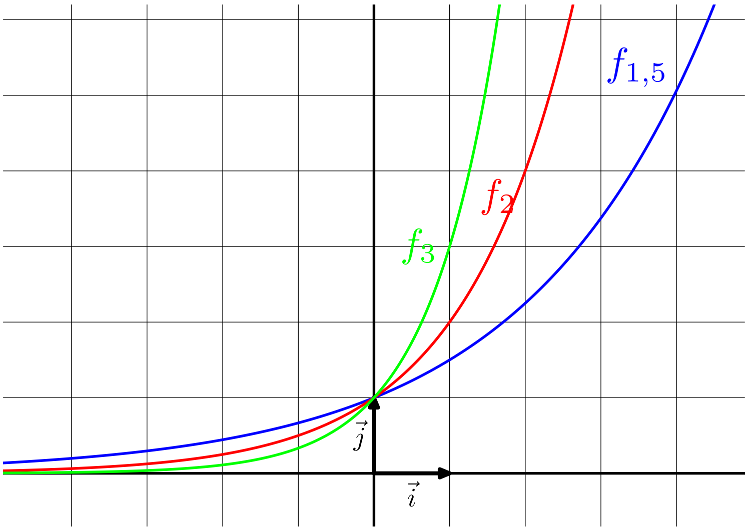
On a $f(0) = 1$ et $f'(0) = a^0 \times \ln(a) = \mathrm{e}^{0 \times \ln(a)} \times \ln(a) = \ln(a)$.

Donc $T_0 : y = \ln(a)(x-0) + 1$ soit $T_0 : y = \ln(a)x + 1$.

Exemples de courbes :



Si $a < 1$



Si $a > 1$

10.2 Croissances comparées

Les fonctions logarithme népérien, exponentielles et polynômes[1] ont toutes $+\infty$ pour limite en $+\infty$. L'objet de cette partie est de déterminer lesquelles de ces fonctions ont les valeurs qui « augmentent » le plus vite lorsque x tend vers $+\infty$.

Propriété 10.2
Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$

Remarque 10.4
Le cas où $n = 1$ a déjà été vu et démontré dans les chapitres sur le logarithme népérien (voir la propriété 7.9) et l'exponentielle (voir la propriété 8.7).

Propriété 10.3 (Conséquence)
Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\lim_{x \to -\infty} x^n \mathrm{e}^x = 0$$

Remarque 10.5
Ces deux dernières propriétés peuvent se retenir sous la forme suivante :
« *à l'infini, l'exponentielle de x l'emporte sur toute puissance de x et les puissances de x l'emportent sur le logarithme népérien de x.* »

[1] non constants

Chapitre 11

Calcul intégral

11.1 Intégrale d'une fonction continue

On rappelle la définition 5.2 (voir page 42) où on avait défini *l'intégrale* d'une fonction continue :

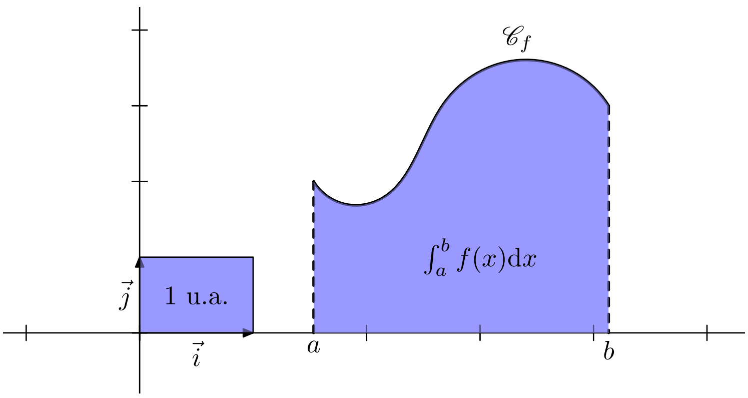
Définition 11.1
Soit f une fonction définie sur I un intervalle de $\mathbf{R}$ et admettant la fonction F comme primitive sur I. Si a et b sont deux réels de I, on appelle intégrale de a à b de $f(x)\mathrm{d}x$ le réel $F(b) - F(a)$.

$$\text{On note : } \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

11.2 Aire sous une courbe

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;\,b]$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.
L'unité d'aire (u.a.) est le rectangle construit sur les vecteurs unitaires de ce repère.
On admettra le résultat suivant :

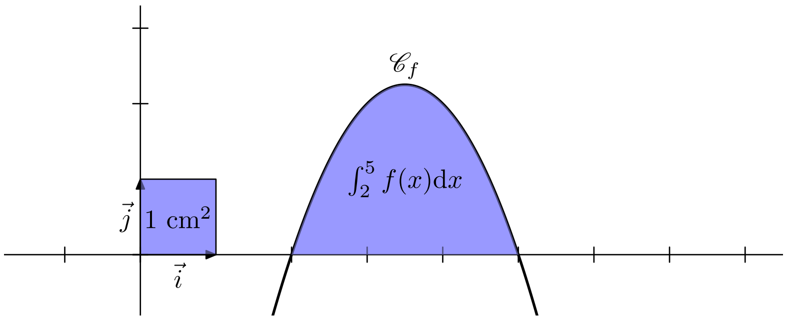
Propriété 11.1
L'intégrale de a à b de $f(x)\mathrm{d}x$ est égale à l'aire délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



Exemple 11.1
Soit f la fonction définie sur $[2\,;\,5]$ par $f(x) = -x^2 + 7x - 10$. Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité : 1cm). Déterminer l'aire sous la courbe entre 2 et 5.

Soit F une primitive de f sur $[2\,;\,5]$: $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 10x$. On a donc :

$$\mathscr{A} = \int_2^5 f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_2^5 = F(5) - F(2) = \frac{9}{2}\ \mathrm{cm}^2$$



11.3 Valeur moyenne

Définition 11.2
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a < b$.

On appelle *valeur moyenne* de la fonction f sur $[a\,;\,b]$ le réel $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

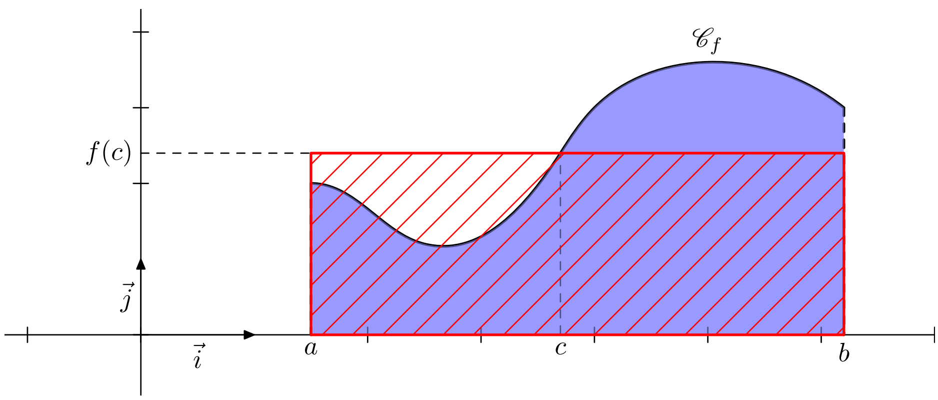
Exemple 11.2
En reprenant la fonction de l'exemple 11.1, la valeur moyenne de la fonction f entre 2 et 5 est :

$$\frac{1}{5-2}\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \times \frac{9}{2} = \frac{3}{2}$$

Propriété 11.2 (admise)
Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a < b$, alors il existe un réel $c \in [a\,;\,b]$ tel que $f(c)$ est égal à la valeur moyenne de la fonction sur $[a\,;\,b]$; c'est-à-dire tel que :

$$(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Remarque 11.1
Cette propriété signifie qu'il existe un réel $c \in [a\,;\,b]$ tel que l'aire sous la courbe entre a et b est égale à l'aire du rectangle de largeur $b-a$ et de hauteur $f(c)$.



Sur la figure ci-dessus, l'aire coloriée en bleu et l'aire hachurée en rouge sont égales.

11.4 Propriétés de l'intégrale

Théorème 11.1 (linéarité)
Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ et soit λ un réel quelconque. Alors :

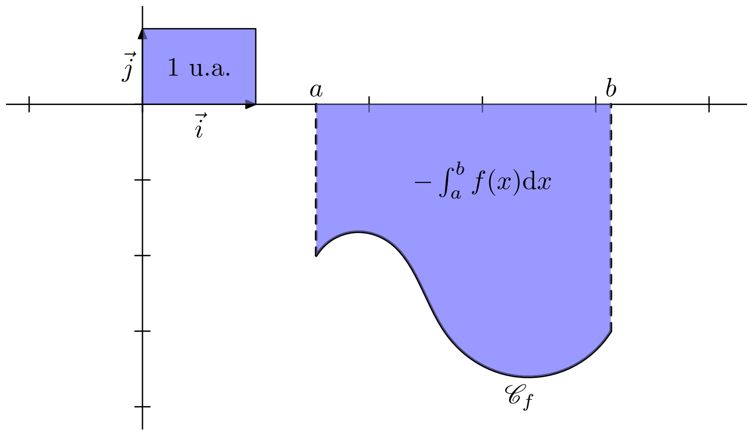
$$\int_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b (\lambda f)(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Remarque 11.2
Si f est une fonction continue sur $[a\,;\,b]$ et *négative* sur cet intervalle, alors la fonction $-f$ est aussi continue sur $[a\,;\,b]$ mais *positive* sur cet intervalle. On a donc :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b -f(x)\mathrm{d}x = -\mathscr{A}$$

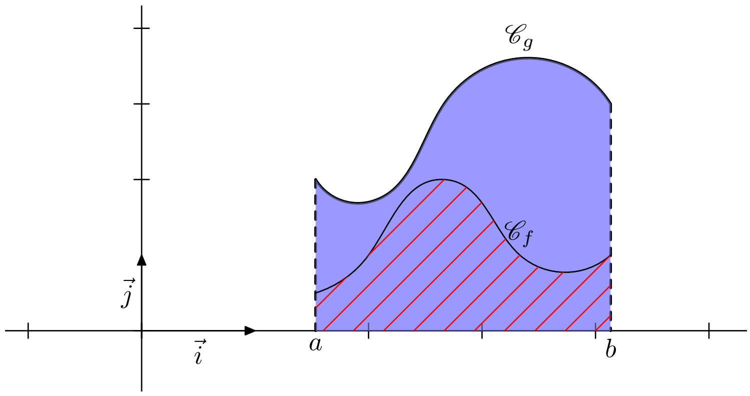
Ainsi l'intégrale de a à b d'une fonction négative est donc l'opposé de l'aire délimitée par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



Théorème 11.2 (positivité)
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
- Si f est positive sur $[a\,;\,b]$, alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.
- Si f est négative sur $[a\,;\,b]$, alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq 0$.

Théorème 11.3 (ordre)
Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ telles que pour tout $x \in [a\,;\,b]$ on a $f(x) \leq g(x)$. Alors :

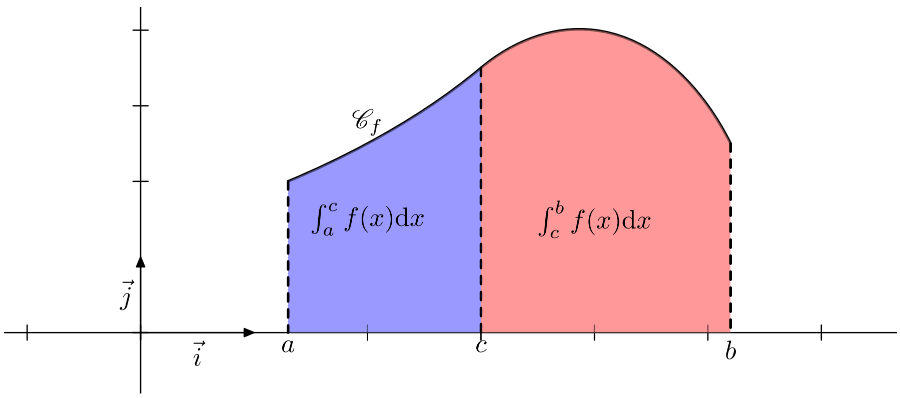
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$



Sur la figure ci-dessus, pour $x \in [a\,;\,b]$ on a $f(x) \leq g(x)$. L'aire hachurée en rouge (intégrale de f entre a et b) est inférieure à l'aire coloriée en bleu (intégrale de g entre a et b).

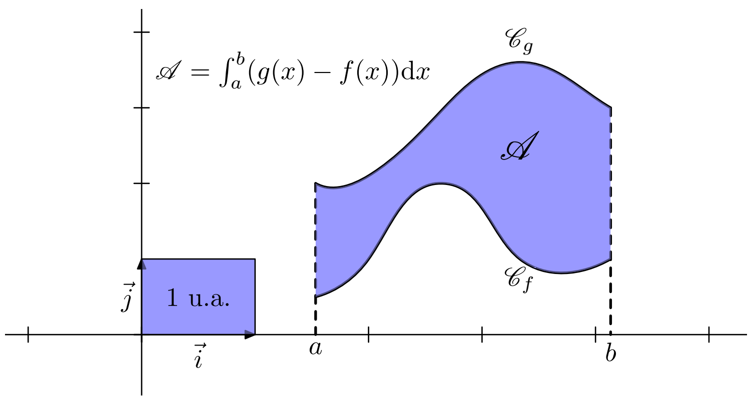
Propriété 11.3 (relation de Chasles)
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$ et soit $c \in [a\,;\,b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$



Propriété 11.4 (Aire entre deux courbes)
Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ telles que pour tout $x \in [a\,;\,b]$ on a $f(x) \leq (x)$. Alors, la surface délimitée par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ainsi que les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ vaut :

$$\mathscr{A} = \int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$$



Chapitre 12

Séries statistiques à deux variables

12.1 Introduction

On a étudié dans les classes antérieures des séries statistiques à une variable : série de notes, série de performances sportives, série de caractéristiques géographiques, économiques, ... L'objet du chapitre de la classe de terminale est d'étudier si deux variables sont dépendantes l'une de l'autre. On mesure par exemple aux mêmes dates le taux d'ozone dans l'air et le nombre d'entrée aux urgences pour des problèmes respiratoires. Les résultats de ces deux mesures ont-elles un lien l'un avec l'autre ?
Commençons par quelques rappels sur les séries statistiques à une variable...

12.1.1 Paramètre de position : la moyenne

Définition 12.1
La moyenne d'une série statistique est le quotient de la somme de toutes les valeurs de la série (comptées autant de fois que leur effectif) par l'effectif total. En considérant une série statistique de N observations où la variable x prend p valeurs notées x_1, x_2, ..., x_p, chacune ayant un effectif noté n_i, on a :

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}{N}, \text{ où } \sum_{i=1}^{p} n_i x_i = n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_p x_p$$

12.1.2 Paramètres de dispersion : variance et écart-type

Définition 12.2
La *variance* est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne. C'est un nombre positif.

$$V = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{N} = \frac{n_1 \left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + \cdots + n_p \left(x_p - \overline{x}\right)^2}{N}$$

L'*écart type* d'une série statistique est égal à la racine carrée de la variance ; on le note σ :

$$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{n_1 \left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + \cdots + n_p \left(x_p - \overline{x}\right)^2}{N}}$$

12.2 Série statistique à deux variables

Une série statistique à deux variables est obtenue en étudiant deux caractères d'une même population. On note x_i et y_i les valeurs de ces deux caractères pour l'individu i de la population.

Dans cette partie, on s'intéressera à des séries statistiques à deux variables x et y prenant chacune p valeurs x_1, x_2, … x_p et y_1, y_2, … y_p. On suppose que l'écart-type de chacune de ces deux séries n'est pas nul[1].

On présente généralement une série statistique à deux variables sous la forme d'un tableau :

Valeur de x	x_1	x_2	…	x_p
Valeur de y	y_1	y_2	…	y_p

12.2.1 Nuage de points

Définition 12.3
Si à chaque individu de la population on associe le point A_i de coordonnées $(x_i; y_i)$ dans un même repère, l'ensemble des points obtenus est appelé *le nuage de points* associé à cette série statistique.

Définition 12.4
En notant $\overline{x}$ et $\overline{y}$ les moyennes respectives des séries x et y, le point G de coordonnées $(\overline{x}; \overline{y})$ est appelé *point moyen* du nuage.

Exemple 12.1
On donne dans le tableau suivant la moyenne des températures dans un village canadien de la baie d'Hudson au cours des périodes d'été et la hauteur maximale de neige mesurée au cours des deux premières semaines d'avril.

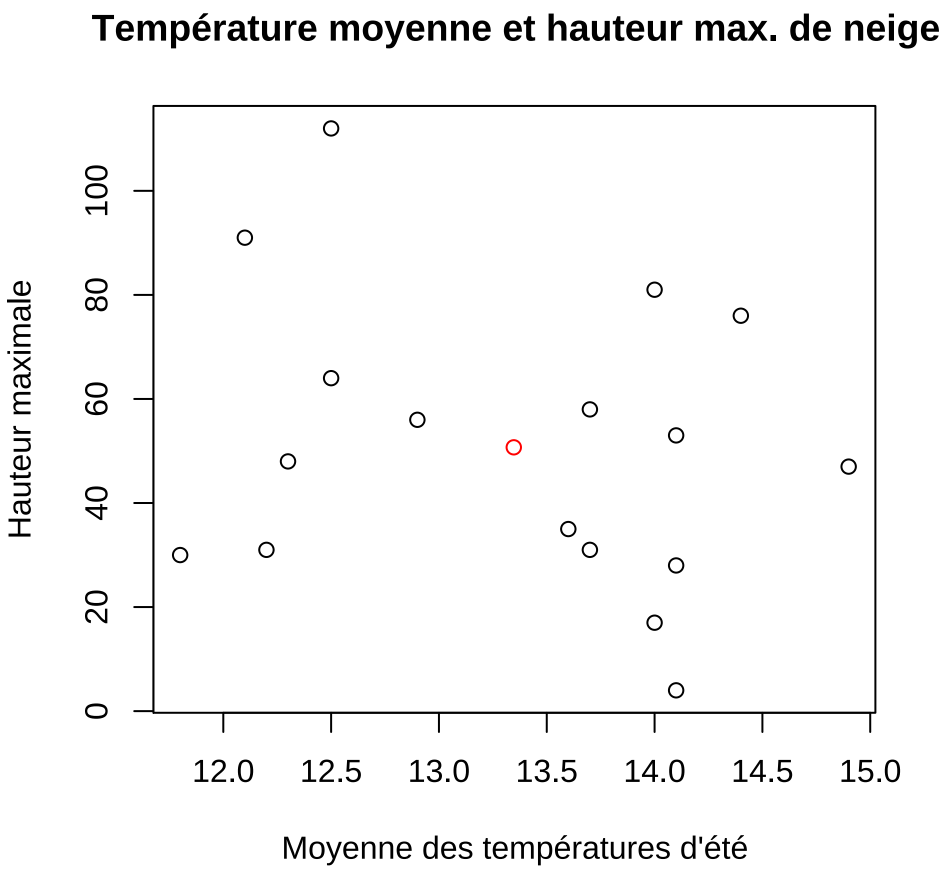
Année	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976
Temp. ($^\circ$C)	11.8	12.5	13.7	14.0	12.5	14.1	12.1	14.1	14.4
Neige (cm)	30	64	58	81	112	28	91	53	76

Année	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984
Temp. ($^\circ$C)	12.2	12.3	13.6	14.0	14.9	12.9	13.7	14.1
Neige (cm)	31	48	35	17	47	56	31	4

La moyenne des températures au cours de ces 19 années est de 13,34 $^\circ$C ; la hauteur moyenne de neige est de 50,70 cm.

On construit[2] le nuage de points et le point moyen (en rouge) sur le graphique ci-après :

[1]Cela signifie que les x_i ne sont pas tous égaux et de même pour les y_i.
[2]Le graphique ci-après est obtenu avec le logiciel de statistiques « R » disponible gratuitement à l'adresse http ://www.R-project.org. Un court manuel de prise en main est disponible à l'adresse http ://reymarlioz.free.fr dans la rubrique « pour tous ».



12.2.2 Ajustement linéaire

Définition 12.5
Soit x et y deux séries statistiques de même effectif n. On appelle *covariance* de x et y et on note C_{xy} ou cov(x,y) le réel égal à :

$$C_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

Propriété 12.1
La covariance de deux séries x et y d'effectif n est égale à :

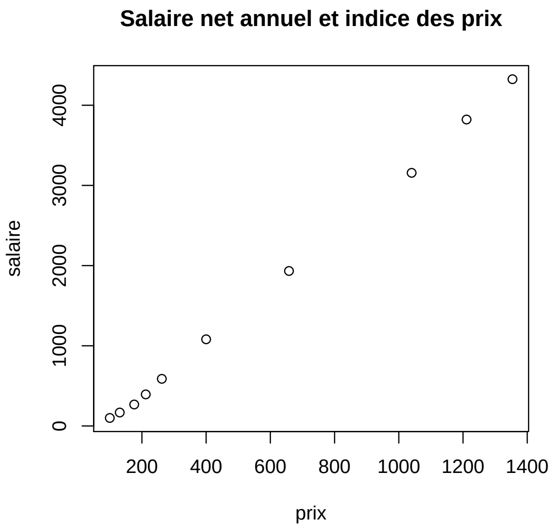
$$C_{xy} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \overline{x}\,\overline{y}$$

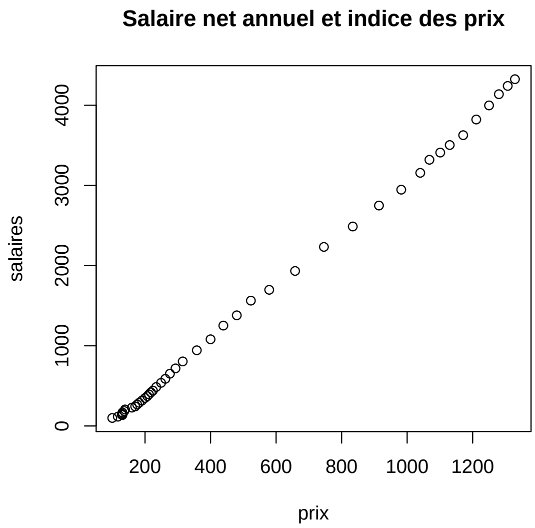
Exemple 12.2
En reprenant les données de l'exemple 12.1, on obtient : cov(températures,hauteurs)$= -5{,}8$.

Exemple 12.3
Dans ce deuxième exemple de série statistique à deux variables, le nuage de points a une forme particulière que nous allons étudier plus précisément. Dans le tableau ci-après, on donne l'indice des prix et des salaires nets annuels pour quelques années de 1950 à 1994 (Base 100 pour les deux en 1950 - Source : Quid 2001).

Année	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1994
Prix	100	131	176	212	262	400	658	1040	1211	1329
Salaire	100	168	268	394	588	1081	1933	3157	3822	4325

On appelle x la série des prix et y la série des salaires. Le nuage de points est tracé ci-dessous (d'abord avec les données du tableau, puis avec toutes les données de 1950 à 1994) :

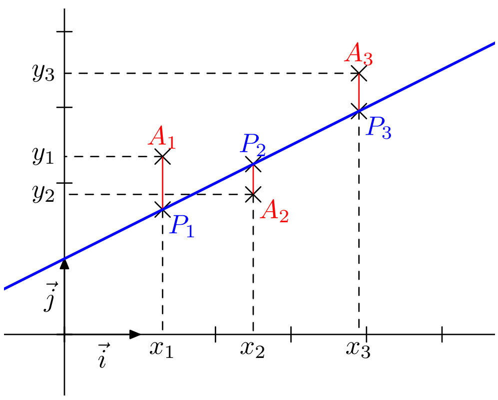




Les points sont presque alignés sur une droite. Nous allons tenter de tracer la droite qui passe « au mieux » parmi ces points.

Les deux théorèmes suivants sont admis :

Théorème 12.1
On considère une série statistique à deux variables x et y et on note A_i le point de coordonnées $(x_i; y_i)$ pour chaque i, $1 \leq i \leq n$.
Il existe une unique droite D associée à ce nuage de points telle que la somme des « $A_iP_i^2$ » soit minimale. (Où P_i est le point de D de même abscisse que A_i).
Cette droite est appelée *droite des moindres carrés* associée au nuage de points (ou à la série statistique).



Théorème 12.2
On considère une série statistique à deux variables x et y.
– la droite des moindres carrés du nuage de points associé à la série passe par le point moyen ;
– son équation est $y = ax + b$ avec :

$$a = \frac{C_{xy}}{V(x)} \text{ et } b = \overline{y} - a\overline{x}$$

Remarque 12.1
La somme des carrés $A_iP_i^2$ est appelée *somme des carrés des résidus.*

Exemple 12.4
Reprenons les données de l'exemple 12.3.
Dans la calculatrice on rentre dans la `liste 1` la série des prix et dans la `liste 2` la série des salaires.
Pour les Casio : dans le menu `STAT`, sélectionner `SET`, puis pour l'option `2Var XList`, choisir `list1` et pour l'option `2Var YList`, choisir `list2`, et enfin `EXIT`.
En sélectionnant `REG`, puis `x`, on obtient les coefficients a et b de la droite des moindres carrés. ($a \approx 3{,}41$ et $b \approx -300$)
Après avoir appuyé deux fois sur `EXIT`, on sélectionne `2VAR`, on obtient les paramètres de la série : $\sum xy$, $\overline{x}$, $\overline{y}$, n. Ces paramètres permettent de calculer la covariance de la série à l'aide de la formule de la propriété 12.1 : on obtient $C_{xy} \approx 694\ 011$. On retrouve a en divisant par $x\sigma n^2 (\approx 450{,}9^2)$: $a \approx 3{,}41$.
Pour les TI : pour obtenir les coefficient a et b, appuyer sur la touche `STAT`, puis dans le menu `CALC`, sélectionner `4:LinReg(ax+b)`. Saisir alors `L1,L2` et `ENTER` (`L1` s'obtient en appuyant sur `2NDE` et `1`).
Pour obtenir les paramètres statistiques de la série, appuyer sur la touche `STAT`, puis dans le menu `CALC`, sélectionner `2-Var Stats`. Saisir alors `L1,L2` et `ENTER`. Les paramètres statistiques s'affichent alors.

12.2.3 Ajustement non linéaire

Parfois, le nuage de points n'a pas la forme d'une droite mais plutôt d'une parabole, d'une fonction inverse, d'une fonction logarithme ou exponentielle, ... Dans ce cas on « transforme » une des deux variables à l'aide d'une fonction pour obtenir un nouveau nuage qui aura la forme d'une droite.

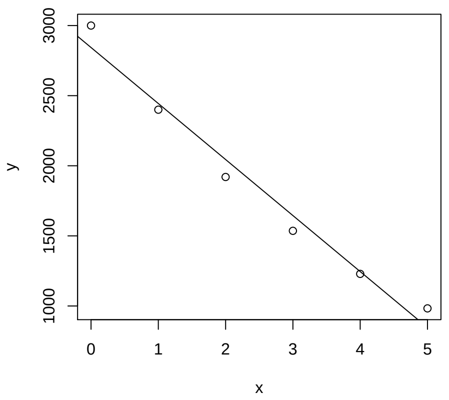
Exemple 12.5 (D'après bac ES. Amérique du Nord 2006)
Une machine est achetée 3 000 €. Le prix de revente y, exprimé en €, est donné en fonction du nombre x d'années d'utilisation dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	3 000	2 400	1 920	1 536	1 229	983

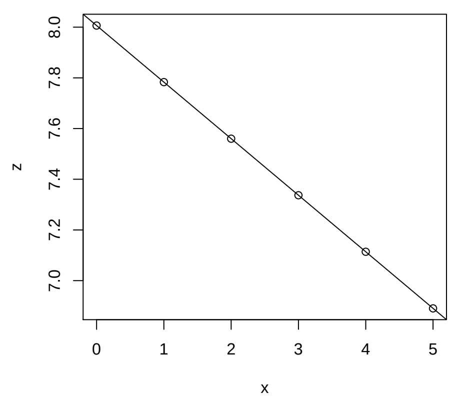
Le nuage de points associé à cette série est représenté ci-après.
À l'aide de la calculatrice on obtient l'équation de la droite d'ajustement : $y = -399x + 2\ 843$.
En utilisant cet ajustement, on peut prévoir la valeur à la revente de la machine après 6 ans : $y = -399 \times 6 + 2843 = 449$€.
Cependant, le nuage de points associé ne semble pas s'ajuster correctement à l'aide d'une droite, mais ressemble plutôt à une courbe représentant une fonction exponentielle négative. On pose alors $z = \ln(y)$; on obtient le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5
z_i	8	7,78	7,56	7,34	7,11	6,89

Le nouveau nuage de points est représenté ci-après, et la calculatrice nous donne comme droite de régression $z = -0{,}22x + 8{,}01$. L'estimation du prix de revente après 6 ans peut donc se calculer comme suit : $z = -0{,}22 \times 6 + 8{,}01 = 6{,}69$. On a alors $y = \exp(6{,}69) \approx 804$ €.
En réalité le prix de revente après 6 ans est de 780 €. Le second modèle d'ajustement semble donc plus pertinent.



Nuage des points $A_i(x_i; y_i)$.



Nuage des points $B_i(x_i; \ln(y_i))$.

12.3 Adéquation à une loi équirépartie

Dans les exercices de probabilité, on fait souvent l'hypothèse qu'on se place dans une situation d'*équiprobabilité* : on a un dé *équilibré*, on tire des boules *indiscernables* au toucher, ... Dans cette partie, on va chercher à déterminer si on peut, à la suite de répetitions d'une expérience aléatoire, rejeter raisonablement l'hypothèse d'équiprobabilité.

Exemple 12.6
Supposons qu'on possède un dé à six faces numérotées de 1 à 6. Nous allons chercher à vérifier si on peut faire l'hypothèse[3] que ce dé est équilibré.
Pour cela, lançons 200 fois de suite ce dé. On obtient les résultats suivants :

face	1	2	3	4	5	6
effectif	42	43	37	27	30	21
fréquence	0,21	0,215	0,185	0,135	0,15	0,105

Ces fréquences ne sont évidemment pas égales aux fréquences théoriques ($\frac{1}{6}$ si le dé est équilibré), et à chaque nouvelle expérience de 200 lancers on obtient des fréquences différentes : c'est ce qu'on appelle les *fluctuations d'échantillonnage*.
Pour mesurer l'écart entre la distribution de fréquences obtenue et la loi de probabilité « théorique », on calcule le réel noté d^2_{exp} défini par :

$$d^2_{exp} = \sum_{i=1}^{6} \left(f_i - \frac{1}{6}\right)^2 = \left(f_1 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(f_2 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(f_3 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(f_4 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(f_5 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(f_6 - \frac{1}{6}\right)^2$$

On obtient $d^2_{exp} \approx 0{,}009\ 63$.
Nous allons ensuite comparer ce « d^2_{exp} » aux résultats qu'on aurait obtenu avec un « vrai » dé équilibré : pour cela, on va lancer 200 fois de suite un dé équilibré[4] et calculer le « d^2 » correspondant.
On répète cette expérience avec le dé équilibré 1 000 fois. On simule donc 1 000 séries de 200 lancers d'un dé équilibré et pour chacune de ces séries de 1 000 lancers, on peut calculer la valeur

[3]On ne pourra jamais l'affirmer avec certitude, mais seulement l'accepter avec une marge d'erreur quantifiable.
[4]En fait, nous allons simuler ces lancers avec le logiciel R déjà évoqué.

correspondante de d^2. Finalement, on a une série de 1 000 valeurs de d^2. On peut déterminer le neuvième décile[5] de cette série ; on obtient $D_9 = 0{,}007\ 78$.
Cela signifie que 10% des valeurs de d^2 du dé équilibré sont supérieures à D_9 et que 90% des valeurs de d^2 du dé équilibré sont inférieures à D_9.
Le d^2_{exp} de départ (celui dont on ne sait pas s'il est équilibré) vaut 0,009 63 ; il est donc supérieur à D_9. On rejette[6] donc l'hypothèse que le dé est équilibré avec un risque de 10%.

Exemple 12.7
Nous allons utiliser le neuvième décile de la simulation précédente pour vérifier l'hypothèse qu'un deuxième dé est équilibré. La série de 200 lancers de ce deuxième dé donne les résultats suivants :

face	1	2	3	4	5	6
effectif	39	39	26	25	30	41
fréquence	0,295	0,295	0,13	0,125	0,15	0,205

On obtient pour ce dé $d^2_{exp} \approx 0{,}006\ 43$. Cette valeur est inférieure à D_9 ; on ne peut donc pas rejeter avec un risque de 10% l'hypothèse d'équiprobabilité.

[5] C'est-à-dire la valeur pour laquelle 90% des valeurs de la série sont inférieures à ce neuvième décile (voir votre cours de première…).
[6] Attention cela ne signifie pas que le dé est truqué avec certitude !

Index