Révisions de mathématiques

Thomas Rey

Classe de première L

Table des matières

1 Les pourcentages

À retenir

Un pourcentage est un nombre. Il est utilisé dans plusieurs situations :
- pour représenter une proportion : la part que représente une quantité dans une autre (résultats d'élections, part des filles parmi les élèves, ...) ;
- pour représenter une évolution : augmentation ou réduction d'effectif, de prix, ...).

Règle 1 (Pourcentage de ... dans ...)

À retenir

La proportion d'une quantité A dans une quantité B est égal au quotient $\frac{A}{B}$.
En le multipliant par 100, on obtient cette proportion en pourcentage.

Exemple 1
Dans une classe de 32 élèves, on compte 20 filles. La proportion de filles est : $\frac{20}{32} = 0{,}625 = 62{,}5\%$.
En multipliant par 100 on écrit : $\frac{20}{32} \times 100 = 62{,}5$ (**Sans le « % » ! ! !**) Donc les filles représentent 62,5% des élèves de la classe.

Règle 2

À retenir

Si une quantité passe d'une valeur de départ V_D à une valeur d'arrivée V_A, sa variation en pourcentage vaut :

$$Variation = \frac{V_A - V_D}{V_D} = \frac{\text{Valeur d'arrivée} - \text{Valeur de départ}}{\text{Valeur de départ}}$$

Exemple 2
Un prix passe de 32€ à 38€. Sa variation est : $t = \frac{38-32}{32} = 1\ 875 = 18{,}75\%$. Il augmente de 18,75%.

Règle 3 (Coefficient multiplicateur)

À retenir

Si une quantité varie de $t\%$ (t peut être négatif ou positif), alors cette quantité est multipliée par le coefficient multiplicateur CM égal à :

$$CM = 1 + \frac{t}{100}$$

Exemple 3
Pour augmenter un nombre de 15%, il suffit de le multiplier par $1 + \frac{15}{100} = 1{,}15$. Ainsi, si l'effectif du lycée était de 1 100 élèves et qu'il augment de 15%, le nouvel effectif sera $1\ 100 \times 1{,}15 = 1\ 265$.
Pour diminuer un nombre de 30%, (ici, il s'agit d'un taux de variation $t = -30 < 0$), il suffit de le multiplier par $1 + \frac{-30}{100} = 0{,}70$. Ainsi, un article coûtant 37€ est soldé à -30%, son nouveau prix est $37 \times 0{,}70 = 25{,}90$€.

Règle 4

À retenir

Si le coefficient multiplicateur d'une variation est k, alors le taux de variation est égal à :

$$t = (k - 1) \times 100$$

Exemple 4
Le coefficient multiplicateur d'une variation est égal à 0,87. Cette variation a un taux de :

$$t = (0{,}83 - 1) \times 100 = -13$$

C'est donc une baisse de 13%.

Règle 5 (Pourcentage de pourcentage)

À retenir

Prendre $t\%$ de $p\%$ d'un nombre N c'est effectuer le calcul

$$\frac{t}{100} \times \frac{p}{100} \times N$$

Exemple 5
Aux dernières élections, dans un bureau où 4 000 électeurs sont inscrits, le taux de participation était de 80% et parmi les votants, le candidat A a obtenu 32% des suffrages.
Le candidat A a obtenu $\frac{32}{100} \times \frac{80}{100} \times 4\,000 = 1\,024$ voix.

Règle 6 (Variations successives)

À retenir

Si un nombre subit une variation de t% puis une variation de p%, il est multiplié par :

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right) \times \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

Exemple 6
Un prix augmente de 20% puis baisse de 20%, au total, il a été multiplié par :

$$\left(1 + \frac{20}{100}\right)\left(1 - \frac{20}{100}\right) = 1{,}20 \times 0{,}80 = 0{,}96$$

Ce prix a donc baissé de 4%.

Règle 7

À retenir

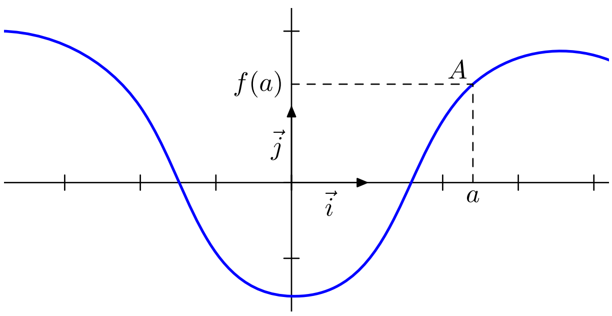
On ne peut additionner des pourcentages que s'ils portent sur le même ensemble de référence et qu'ils représentent des ensembles sans élément commun.

2 Lectures graphiques

Dans cette partie, f est une fonction numérique définie sur un ensemble $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}_f$ est sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

À retenir

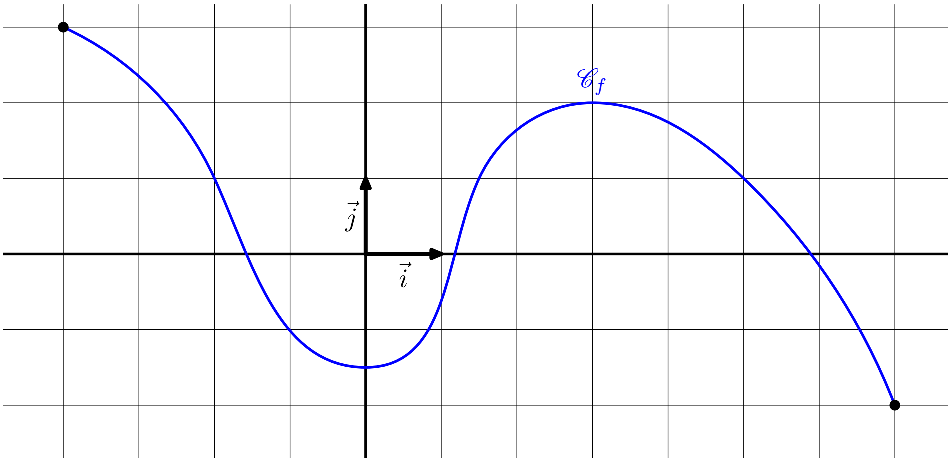
L'image $f(a)$ d'un nombre $a \in \mathscr{D}$ par la fonction f est l'ordonnée du point de la courbe $\mathscr{C}_f$ qui a pour abscisse a.



À retenir

Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = m$ c'est trouver les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ qui ont pour ordonnée m. Cela revient à rechercher les *antécédents* de m par la fonction f.
Pour déterminer graphiquement les solutions d'une telle équation on cherche les abscisses des points communs entre $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y = m$.

Exemple 7
Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;\,7]$.

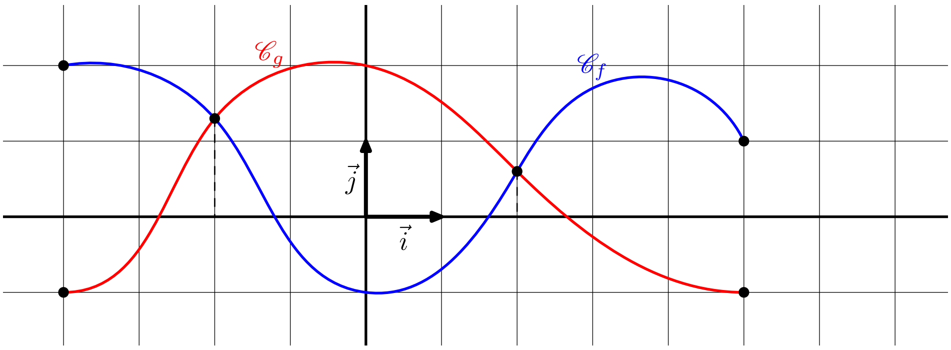


- L'équation $f(x) = 2{,}5$ a une unique solution sur $[-4\,;\,7]$ car un seul point de $\mathscr{C}_f$ a pour ordonnée 2,5 : il s'agit du point qui a pour abscisse environ $-3{,}3$. On écrit $\mathscr{S} = \{-3{,}3\}$.
- L'équation $f(x) = 1$ a trois solutions car il y a trois points de $\mathscr{C}_f$ qui ont pour ordonnée 1 : les points d'abscisses -2 ; 1,5 et 5. On écrit $\mathscr{S} = \{-2\,;\,1{,}5\,;\,5\}$.
- L'équation $f(x) = -3$ n'a pas de solution car la courbe $\mathscr{C}_f$ n'a pas de point ayant -3 pour ordonnée.
- Les équations $f(x) = 2$ et $f(x) = -1; 5$ ont chacune deux solutions.

À retenir

Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ c'est trouver les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exemple 8
Dans le repère ci-dessous, on a tracé les représentations graphiques de deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-4\,;\,5]$.



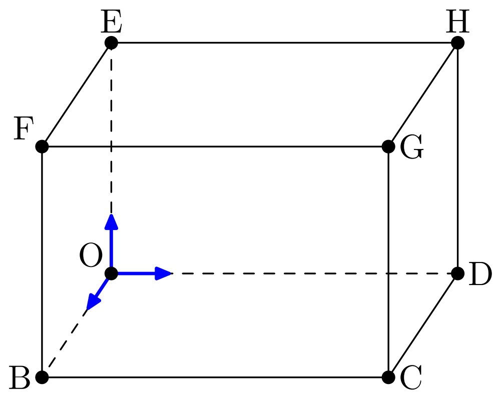
Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$: $\mathscr{S} = \{-2\,;\,2\}$

3 Espace et courbes de niveau

3.1 Repère de l'espace

Pour repérer les points de l'espace, on a besoin d'un repère formé de trois droites graduées qui ne sont pas dans un même plan et qui ont la même origine.
Chaque point est alors repéré par trois nombres : ses coordonnées.

Exemple 9
Sur la figure ci-contre, le repère de l'espace utilisé est le repère $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OK})$. Il est *orthonormal* car les axes sont orthogonaux deux à deux et $OI = OJ = OK = 1$.
$OBCDEFGH$ est le pavé droit construit sur les axes tel que $OB = 3$, $OD = 6$ et $OE = 4$.
Dans ce repère on a par exemple :
$C(3;6;0)$, $E(0;0;4)$, $F(3;0;4)$, ...
Le point M de coordonnées $(\frac{3}{2},3,4)$ est le centre de la face supérieure du pavé.



3.2 Courbe de niveau

Dans l'espace, l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient une relation algébrique (par exemple $z = x^2 + y^2$ ou $z = xy$ ou encore $z = x^2 - y^2$, ...) est une *surface*.
La *courbe de niveau* k d'une surface est l'ensemble des points de la surface situés à une altitude (ou côte) k.
Un plan en relief de la Savoie peut être considéré comme une surface. La ligne de niveau 1 400m serait constituée de tous les points de la Savoie situés à 1 400m d'altitude. Les lignes de niveau sont représentés par exemple sur les cartes de l'Institut Géographique National.

4 Statistiques

Définition 1
On considère une série statistique qui regroupe les résultats obtenus lors d'une étude (sondage, résultats sportifs, médicaux, ...)
- la *population* est l'ensemble des individus étudiés ; il peut s'agir de personnes d'animaux, d'objets, ... ;
- un *caractère* est une des caractéristiques étudiées chez les individus de la population : taille, couleur des cheveux, note à un devoir, ... ;
- une *classe* ou *catégorie* est un groupe de la population ayant un même caractère ;
- l'*effectif* d'une classe (ou « catégorie ») est le nombre d'éléments de la classe.
- la *fréquence* d'une classe est le quotient de l'effectif de la classe par l'effectif total :

$$f_i = \text{fréquence de } x_i = \frac{\text{effectif de } x_i}{\text{effectif total}} = \frac{n_i}{N}$$

Définition 2
Le *mode* ou *valeur modale* est la valeur de la variable statistique qui est le plus souvent observée. C'est à dire la valeur du caractère ou la classe qui a le plus grand effectif.

4.1 Paramètres de tendance centrale

Définition 3
La *médiane* d'une série statistique est la valeur de la variable qui partage la population en deux groupes de même effectif :
- ceux qui ont une valeur du caractère inférieure à la médiane,
- ceux qui ont une valeur du caractère supérieure à la médiane,

À retenir

Deux cas sont possibles :
- s'il y a un nombre impair d'observations : $N = 2k+1$, où $k \in \mathbf{N}$, alors la médiane est la $k+1^{\text{e}}$ valeur du caractère (les valeurs étant rangées par ordre croissant).
- s'il y a un nombre pair d'observations : $N = 2k$, où $k \in \mathbf{N}$, alors on convient de prendre comme médiane la moyenne des k^{e} et $k+1^{\text{e}}$ valeurs du caractère (les valeurs étant rangées par ordre croissant).

Exemple 10 (nombre impair d'observations)
On donne la série statistique suivante :

valeur	3	4	6	7
effectif	1	3	2	1

On a ici un effectif total de 7. La médiane est donc la 4^{e} valeur lorsqu'elles sont rangées par ordre croissant :
3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 6 ; 6 ; 7. La médiane vaut 4.

Exemple 11 (nombre pair d'observations)

On donne la série statistique suivante :

valeur	3	4	6	7
effectif	2	3	1	4

On a ici un effectif total de 10. La médiane est donc la moyenne des 5^{e} et 6^{e} valeurs lorsqu'elles sont rangées par ordre croissant :
3 ; 3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 6 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7.
La médiane vaut $\frac{4+6}{2} = 5$.

4.2 Quartiles

Définition 4
Le *premier quartile* d'une série statistique, noté Q_1, est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins un quart des valeurs soient inférieures ou égales à Q_1.
De même, le *troisième quartile* d'une série statistique, noté Q_3, est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins trois quarts des valeurs soient inférieures ou égales à Q_3.
La différence $Q_3 - Q_1$ est appelée *écart interquartile* et l'intervalle $[Q_1 ; Q_3]$ est appelé *intervalle interquartile* : il contient au moins 50% des valeurs de la série.

Exemple 12
On donne la série suivante :

Valeur x_i	3	5	6	7	10	12	15	20
Effectif n_i	2	2	4	3	3	7	5	3

À retenir

Cette série comporte 29 valeurs.
On a $\frac{1}{4} \times 29 = 7{,}25$. Le premier quartile Q_1 est donc la 8^{e} valeur de la série lorsque celles-ci sont rangées par ordre croissant : $Q_1 = 6$.
On a $\frac{3}{4} \times 29 = 21{,}75$. Le troisième quartile Q_3 est donc la 22^{e} valeur de la série lorsque celles-ci sont rangées par ordre croissant : $Q_3 = 15$.

4.3 Boîtes à moustaches

La représentation graphique de la dispersion d'une série statistique se fait à l'aide de graphiques appelés *diagrammes en boites*, *boites à moustaches*, ou *box plot*, voire *diagramme de Tuckey*. On les trace comme ceci :

À retenir

- on construit en face d'un axe gradué, permettant de repérer les valeurs extrêmes de la série étudiée, un rectangle dont la longueur est égale à l'écart interquartile et dans lequel on représente la médiane par un trait ;
- deux traits repèrent les valeurs extrêmes de la série.

Exemple 13

Voici deux séries de notes à un même contrôle pour deux classes :

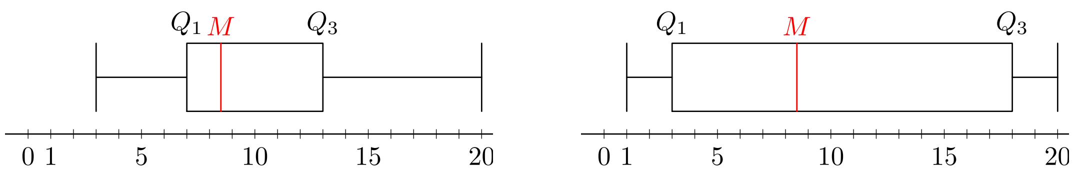
Groupe 1 :

note x	3	5	6	7	8	9	10	13	14	18	20
effectif	1	1	2	2	4	2	1	2	3	1	1

Groupe 2 :

note y	1	2	3	4	13	14	18	19	20
effectif	3	2	2	4	1	2	4	2	2

Pour le groupe 1, l'effectif total est $N_1 = 20$ et $\frac{1}{4} \times 20 = 5$, donc Q_1 est la cinquième valeur de la série : $Q_1 = 7$; de même, $\frac{3}{4} \times 20 = 15$ donc Q_3 est la quinzième valeur de la série : $Q_3 = 13$.
Pour le groupe 2, l'effectif total est $N_2 = 22$ et $\frac{1}{4} \times 22 = 5{,}5$, donc Q_1 est la sixième valeur de la série : $Q_1 = 3$; de même, $\frac{3}{4} \times 22 = 16{,}5$ donc Q_3 est la dix-septième valeur de la série : $Q_3 = 18$.
Voici les deux boîtes à moustaches :



4.4 Écart-type et normalité

Définition 5

On considère une série statistique regroupée dans un tableau d'effectif comme ci-dessous :

valeur x_i	x_1	x_2	......	x_{p-1}	x_p
effectif n_i	n_1	n_2	......	n_{p-1}	n_p

Si on note $\overline{x}$ la moyenne de cette série et N l'effectif total, alors on appelle *variance* de la série le réel positif V défini par :

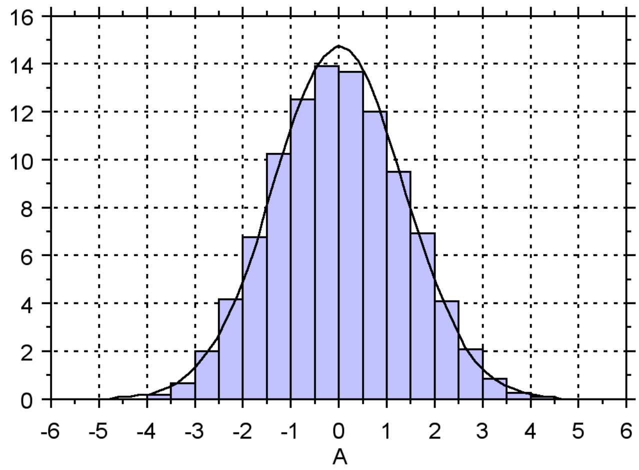
$$V = \frac{n_1(x_1 - \overline{x})^2 + n_2(x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + n_{p-1}(x_{p-1} - \overline{x})^2 + n_p(x_p - \overline{x})^2}{N}$$

La variance est donc la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.
L'*écart-type* d'une série statistique est la racine carrée de sa variance. On note : $\sigma = \sqrt{V}$.

À retenir

Il faut savoir utiliser la calculatrice pour déterminer les paramètres d'une série statistique (moyenne, quartiles, écart-type). Voir la fiche « Statistiques et calculatrice » déjà distribuée...

Dans la plupart des examens médicaux, les résultats sont donnés en indiquant une plage de *normalité* permettant de savoir si les résultats du patient sont « normaux » ou pas. Ces plages ont été établies à partir d'un grand nombre d'obervations sur des patients sains ou non.
L'étude de ces observations conduit à la production d'un d'histogramme d'effectifs ayant la forme ci-contre. La courbe décrite par les sommets des rectangles est une courbe dite *en cloche* ou courbe *gaussienne*, du nom du mathématicien allemand Carl-Friedrich Gauss (1777 - 1855).



Cette courbe a un axe de symétrie qui est la moyenne $\mu = \overline{x}$ (aussi égale à la médiane). Plus on s'éloigne de la moyenne, moins il y a d'individus. On parle alors d'une distribution gaussienne ou suivant une loi de Gauss ou encore une loi normale.

Propriété 1 (Plage de normalité)

À retenir

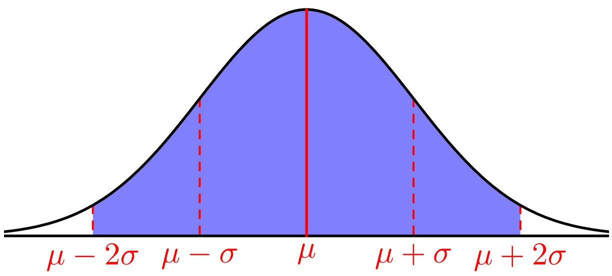
Dans une distribution gaussienne de moyenne μ et d'écart-type σ, on démontre que :

68 % de la population est dans l'intervalle $[\mu - \sigma\,;\,\mu + \sigma]$;

95 % de la population est dans l'intervalle $[\mu - 2\sigma\,;\,\mu + 2\sigma]$;

99 % de la population est dans l'intervalle $[\mu - 3\sigma\,;\,\mu + 3\sigma]$.

$[\mu - 2\sigma\,;\,\mu + 2\sigma]$ est la plage de normalité à 95 % (représentée en bleu ci-dessous).



Exemple 14
Lors d'un examen sanguin, pour un homme, la plage de normalité à 95 % de la densité d'hémoglobine en grammes pour 100 ml est $[13; 17]$ (source : l'encyclopédie libre Wikipédia[1]). Cette densité d'hémoglobine suit une loi gaussienne.
Cela signifie 95 % de la population a entre 13 et 17 grammes d'hémoglobine pour 100 ml de sang.
La moyenne μ du taux d'hémoglobine est donc le centre de l'intervalle $[13; 17]$.
On a donc : $\mu = \frac{13+17}{2} = 15$.
De plus cette plage de normalité est *à 95 %* donc entre la moyenne μ et les bornes de l'intervalle, il y a 2σ.
Donc $2\sigma = 17 - 15$. Donc $\sigma = \frac{2}{2} = 1$.

[1] Wikipédia : http ://fr.wikipedia.org

5 Suites numériques

5.1 Généralités

Définition 6
Une *suite numérique* est une liste ordonnée de nombres. On la note (u_n) ou u.

Exemple 15
Soit u la suite des entiers naturels pairs. On a : $u_0 = 0$, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$, $u_3 = 6$, ...
Ici le deuxième terme est $u_1 = 2$.

Exemple 16
Soit v la suite définie sur $\mathbf{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n}$. On a : $u_1 = 1$, $u_2 = \frac{1}{2}$, $u_3 = \frac{1}{3}$, $u_4 = \frac{1}{4}$, ...
Ici le deuxième terme est v_2 car la suite « commence » pour $n = 1$.

Mode de génération d'une suite :

À retenir

Une suite peut être définie de deux manières :
- en fonction de n : $u_n = f(n)$; ici on peut calculer u_n directement pour n'importe quelle valeur de n ;
- par récurrence : on donne le premier terme et une méthode pour calculer chaque terme quand on connait le précédent : $u_{n+1} = g(u_n)$.

Exemple 17 (suite définie par récurrence)
La population d'une ville croît de 5% par an. En 2000, la population était de 25 000 habitants. On note P_n le nombre d'habitants à l'année $2000 + n$. On a :

$$\begin{cases} P_0 = 25\ 000 \\ P_{n+1} = 1{,}05 P_n \end{cases}$$

Grâce à P_0 et à la relation de récurrence, on peut calculer P_1, puis P_2, puis ...

5.2 Suites arithmétiques

Définition 7
On dit d'une suite qu'elle est *arithmétique* si la différence entre deux termes consécutifs est constante.
C'est-à-dire que u est arithmétique s'il existe un réel r tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - u_n = r$.
Ce réel r est alors appelé *raison* de la suite et on a pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
Lorsqu'une suite est arithmétique on dit que ses termes suivent une *progression arithmétique ou linéaire*.

Propriété 2

À retenir

Soit u une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Alors :
pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = u_0 + n \times r$.
De façon plus générale, on a même pour tout n et tout p :
$u_n = u_p + (n - p) \times r$.

5.3 Suites géométriques

Définition 8
On dit d'une suite qu'elle est *géométrique* si chaque terme est le produit du précédent par un même nombre.
C'est-à-dire que la suite u est une suite géométrique s'il existe un réel q tel que pour tout n, $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le réel q est appelé *raison* de la suite.
Lorsqu'une suite est géométrique, on dit que ses termes suivent une *progression exponentielle ou géométrique.*

Propriété 3

À retenir

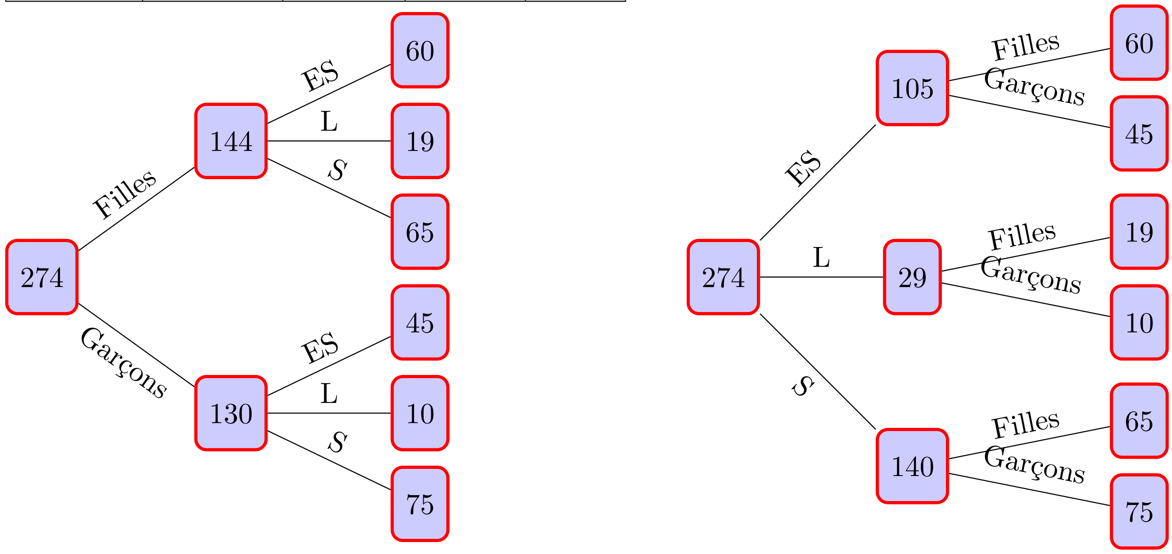
Si u est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q alors :
pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$.
On a même plus généralement, pour tout n et tout p :
$u_n = u_p \times q^{n-p}$.

6 Tableaux et arbres

Lorsqu'on étudie sur une population deux caractères, on peut regrouper les résultats sous la forme d'un tableau à deux entrées ou de plusieurs arbres.

Exemple 18
On donne la répartition des élèves de première d'un lycée suivant le sexe et la série de bac (d'abord sous forme d'un tableau, puis des deux arbres possibles) :

	Série ES	Série L	Série S	Total
Filles	60	19	65	144
Garçons	45	10	75	130
Total	105	29	140	274



À retenir

Il faut savoir construire les arbres à partir du tableau et réciproquement.