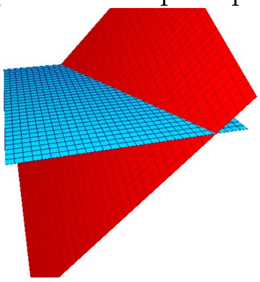
Chapitre 2 : Calcul vectoriel dans l'espace

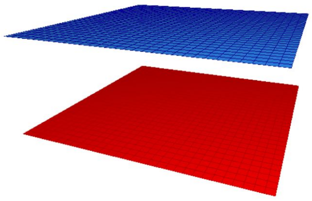
1 Préliminaires : positions relatives

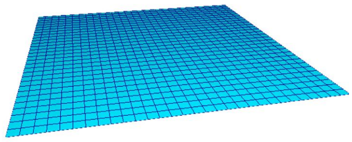
Par deux points distincts de l'espace il ne passe qu'une seule droite.
Trois points non alignés de l'espace définissent un unique plan.
On dit que deux droites sont coplanaires si elles sont dans un même plan. On peut le dire aussi de quatre points (ou plus...).

1.1 Deux plans

Deux plans de l'espace peuvent être sécants, strictement parallèles ou confondus.

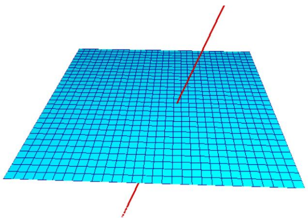

Plans sécants

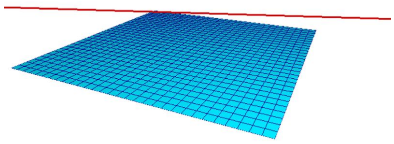

Plans parallèles

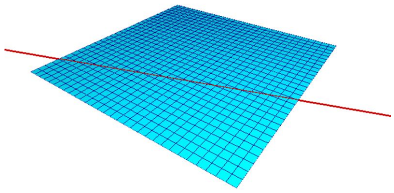

Plans confondus

1.2 Un plan et une droite

Une droite peut être sécante à un plan, elle peut être strictement parallèle au plan ou encore être contenue dans le plan :

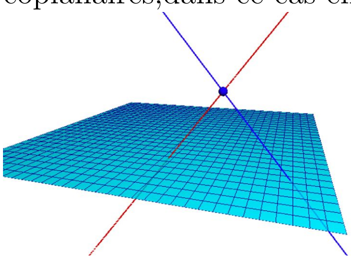

Droite sécante au plan

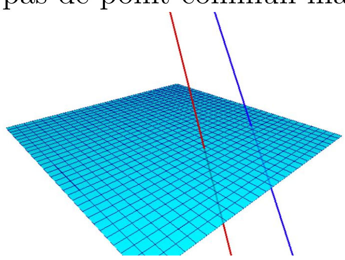

Droite parallèle au plan

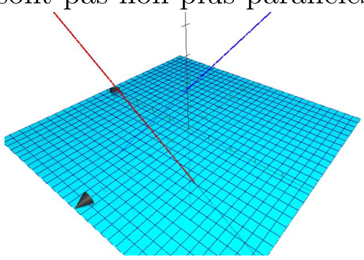

Droite contenue dans le plan

1.3 Deux droites

Deux droites peuvent être coplanaires, dans ce cas elles sont parallèles ou sécantes, ou alors non-coplanaires,dans ce cas elles n'ont pas de point commun mais ne sont pas non plus parallèles.


Droites sécantes


Droites parallèles


Droites non coplanaires

2 Calcul vectoriel

2.1 Vecteurs de l'espace

Définition 1
Soit A et B deux points de l'espace. On peut définir le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par :
– sa *direction* : celle de la droite (AB).
– son *sens* : de A vers B.
– sa *longueur* : la distance AB.

Remarque 1

– La longueur d'un vecteur est aussi appelée sa *norme*. On la note $||\overrightarrow{AB}||$.
– Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est appelé *vecteur nul*. On le note $\vec{0}$.
– Un vecteur peut être désigné par une seule lettre : on peut poser par exemple $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

2.2 Vecteurs égaux

On dit que deux vecteurs sont égaux, lorsqu'ils ont la même direction, le même sens, et la même norme.

Propriété 1
Soit A, B, C, et D quatre points non alignés. Dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux équivaut à dire que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.

2.3 Vecteurs et opérations

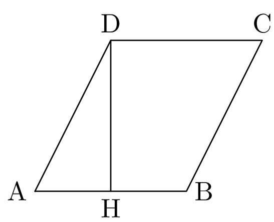
2.3.1 Addition vectorielle

Les règles de l'addition des vecteurs de l'espace sont les mêmes que dans le plan :
– Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
– Règle du parallélogramme : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$, où D est le point de l'espace tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

Exemple 1
Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un parallélogramme. On a les égalités vectorielles suivantes (il en existe bien d'autres…) :

$$\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{AD}; \qquad \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

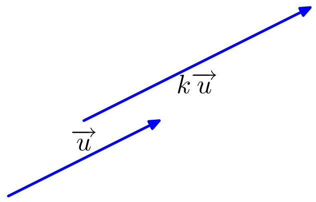
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}; \qquad \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$$



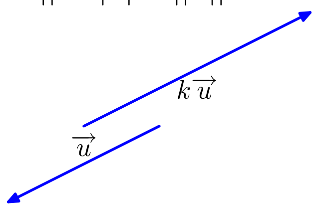
2.3.2 Multiplication par un réel

Définition 2
Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace, et k un nombre réel.

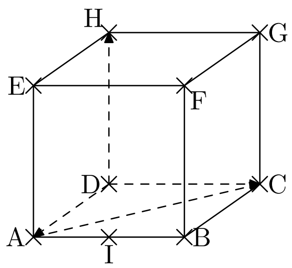
– Si $k > 0$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors le vecteur $k \cdot \vec{u}$ a la même direction et le même sens que $\vec{u}$, et il a pour norme : $||k \cdot \vec{u}|| = k \times ||\vec{u}||$.



– Si $k < 0$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors le vecteur $k \cdot \vec{u}$ a la même direction que $\vec{u}$, il est de *sens contraire* à celui de $\vec{u}$, et il a pour norme : $||k \cdot \vec{u}|| = |k| \times ||\vec{u}||$.



Exemple 2
Sur la figure ci-dessous, $ABCDEFGH$ est un cube ; I est le milieu de $[AB]$.



– Pour retrouver un vecteur égal à $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG}$, on peut remplacer $\overrightarrow{FG}$ par le vecteur $\overrightarrow{BC}$ car $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FG}$. D'où :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad \text{d'après Chasles}$$

– De même, $\frac{1}{2}\overrightarrow{FE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$, car $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BA}$. Donc : $\frac{1}{2}\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BI}$.

Application : Compléter à l'aide d'un seul vecteur.

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} = \dots\dots ; \qquad \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BC} = \dots\dots ; \qquad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FH} = \dots\dots ; \qquad \frac{1}{2}\overrightarrow{HG} = \dots\dots ;$$

$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \dots\dots ; \qquad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GF} = \dots\dots ; \qquad \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HB} = \dots\dots ;$$

3 Vecteurs colinéaires. Vecteurs coplanaires

3.1 Vecteurs colinéaires

Définition 3
On dit que deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *colinéaires* s'il existe un réel non nul k tel que $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$.

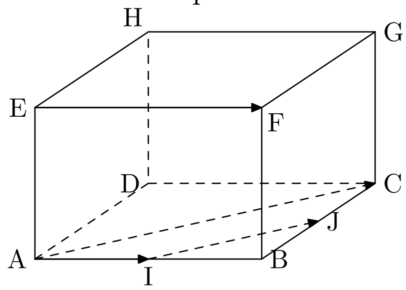
Par *convention*, le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire avec tous les vecteurs de l'espace.

Exemple 3

Sur la figure ci-contre, $ABCDEFGH$ est un pavé droit avec I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[BC]$.

Les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires car $\overrightarrow{EG} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{EG}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires car $\overrightarrow{EF} = 2 \cdot \overrightarrow{AI}$.



Remarque 2

Deux vecteurs égaux sont colinéaires.

Propriété 2

Dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

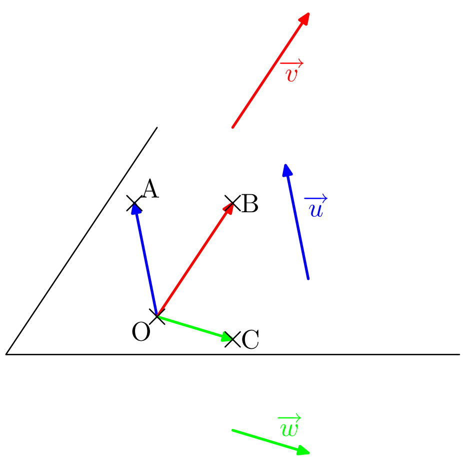
Propriété 3

Dire que les points A, B, et C sont alignés équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires. (Ou encore que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, ou encore que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.)

3.2 Vecteurs coplanaires

Définition 4

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$ sont dits *coplanaires* s'il existe des représentants respectifs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, et $\overrightarrow{OC}$ de même origine O, de sorte que les points O, A, B, et C soient dans un même plan.



Théorème 1

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne soient pas colinéaires.

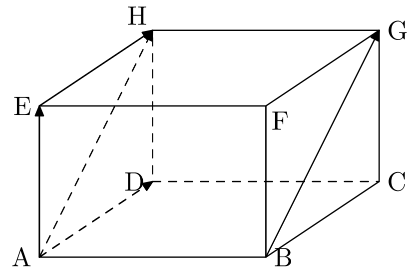
Dire que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires équivaut à dire qu'il existe deux réels a et b tels que :

$$\vec{w} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$$

Remarque 3

Dans le cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$ sont nécessairement coplanaires.

Exemple 4
Sur la figure ci-contre, $ABCDEFGH$ est un pavé droit.



– Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{EH}$, et $\overrightarrow{BG}$ sont coplanaires car : $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$, et les points A, E, D, et H sont coplanaires (sur la face latérale gauche.)
  On peut écrire : $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{BG} = a \cdot \overrightarrow{AE} + b \cdot \overrightarrow{EH}$, avec $a = b = 1$.
– Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}$, et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires car les points A, E, D et B ne sont pas dans un même plan.

Propriété 4
Dire que quatre points A, B, C et D sont coplanaires équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

4 Repérage dans l'espace

4.1 Repère de l'espace

Définition 5
Si O, I, J sont trois points non alignés et K un point qui n'est pas dans le plan (OIJ), on dit que $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$ est un repère de l'espace.

Remarque 4
– Si les droites (OI), (OJ) et (OK) sont deux à deux perpendiculaires, on dit que le repère est orthogonal.
– Si de plus on a $OI = OJ = OK = 1$, on dit que le repère est orthonormal.
– En posant : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$, on peut aussi noter le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

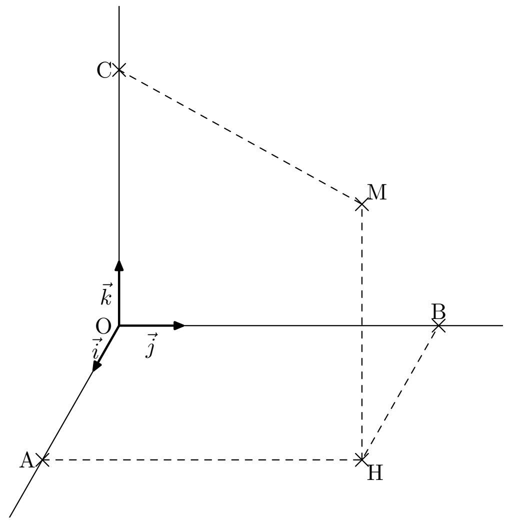
4.2 Coordonnées d'un point de l'espace

Théorème 2
Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace. Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet (x, y, z) de réels tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Démonstration (existence) :
On se place dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Soit H le point d'intersection du plan (OIJ) et de la parallèle à $(O;\vec{k})$ passant par M. Soit $(x;y)$ les coordonnées de H dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan (OIJ). On a : $\overrightarrow{OH} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et le couple $(x;y)$ est unique.
Par définition de H, les vecteurs $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{k}$ sont colinéaires. Donc il existe un unique réel z tel que $\overrightarrow{HM} = z\vec{k}$. On a donc :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = x\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

Donc le triplet $(x;y;z)$ existe et il est unique.



Remarque 5
La première coordonnée (x) est appellée *l'abscisse*, la deuxième (y) est appelée *l'ordonnée*, et la troisième (z) est appelée *la cote*.

4.3 Coordonnées d'un vecteur de l'espace

Définition 6
Soit $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur de l'espace. On appelle *coordonnées* du vecteur $\vec{u}$ dans ce repère le triplet $(x;y;z)$ coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. On note $\vec{u}(x;y;z)$.

4.4 Propriétés

Dans la suite, $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère de l'espace.
Les propriétés sur les coordonnées de vecteurs du plan restent valables dans l'espace :

Théorème 3
Dire que deux vecteurs de l'espace sont égaux équivaut à dire qu'ils ont les mêmes coordonnées.

Théorème 4
Soit $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ deux vecteurs et k un réel quelconque.
– le vecteur $k \cdot \vec{u}$ a pour coordonnées $(kx;ky;kz)$.
– le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x+x';y+y';z+z')$.

Théorème 5
Soit $M(x;y;z)$ et $N(x';y';z')$ deux points de l'espace. Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées $(x'-x;y'-y;z'-z)$.

Théorème 6
Soit $M(x;y;z)$ et $N(x';y';z')$ deux points de l'espace. Le milieu I du segment $[MN]$ a pour coordonnées $(\frac{x+x'}{2};\frac{y+y'}{2};\frac{z+z'}{2})$.

Exemple 5
Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on donne : $A(2;-1;0)$, $B(-3;5;3)$, et $C(0,0,6)$. Calculer

les coordonnées de :

$$\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}, \quad \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right), \quad I \text{ milieu de } [BC]$$

4.5 Colinéarité

Théorème 7
Soit $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère de l'espace et $\vec{u}(x;y;z)$, $\vec{v}(x';y';z')$ deux vecteurs non nuls.
Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à dire qu'il existe un réel k tel que :

$$x = kx', \quad y = ky', \quad z = kz'$$

Démonstration : par la définition de la colinéarité.

5 Distance et orthogonalité

5.1 Distance entre deux points

Dans ce paragraphe, on se place dans un repère orthonormal de l'espace.

Théorème 8
Dans un repère orthonormal, si les points M et N ont pour coordonnées respectives $(x;y;z)$ et $(x';y';z')$, alors :

$$MN^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$

Démonstration :
On choisit A le point de l'espace tel que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{MN}$. On a alors $MN = OA$. Soit I le point d'intersection de $(O;\vec{i},\vec{j})$ et de la parallèle à $(O,\vec{k})$ passant par A.
On est dans un repère orthonormal donc OIA est rectangle en I et donc $OA^2 = OI^2 + IA^2$. Or $OI^2 = x_A^2 + y_A^2$ et $IA = z_A$. Donc :

$$MN^2 = OA^2 = x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$

Exemple 6
On donne $A(5;3;-2)$ et $B(-1;2;4)$.

$$AB^2 = (-1-5)^2 + (2-3)^2 + (4-(-2))^2 = (-6)^2 + (-1)^2 + 6^2 = 73$$

Donc $AB = \sqrt{73}$.

Remarque 6
Le carré de la norme d'un vecteur $\vec{u}(x;y;z)$ est : $||\vec{u}||^2 = x^2+y^2+z^2$. En effet, soit M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. On alors $||\vec{u}||^2 = ||\overrightarrow{OM}||^2 = OM^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2$.

5.2 Orthogonalité de deux vecteurs

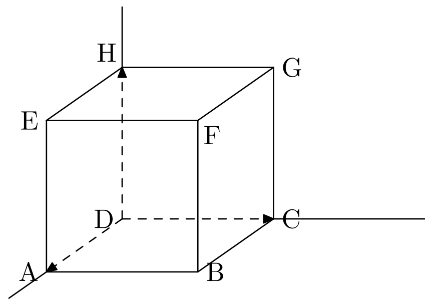
Définition 7
On dit que deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux si les droites (AB) et (CD) le sont (orthogonales).

Remarque 7
Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur de l'espace.

Théorème 9
Dans un repère *orthonormal*, dire que les vecteurs $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ sont orthogonaux équivaut à dire que :

$$xx' + yy' + zz' = 0$$

Exemple 7
Sur la figure ci-contre on a un cube $ABCDEFGH$. On considère le repère orthonormal $(D;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$. Les vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont-ils orthogonaux ? Même question pour $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{BD}$.



Dans le repère proposé, les vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{AG}$ ont pour coordonnées respectives $(0-1;0-1;1-0)$ et $(0-1;1-0;1-0)$. Soit : $\overrightarrow{BH}(-1;-1;1)$ et $\overrightarrow{AG}(-1;1;1)$.
On calcule $xx'+yy'+zz' = -1\times(-1)+(-1)\times 1+1\times 1 = 1$. Donc d'après le théorème 9, les vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{AG}$ ne sont pas orthogonaux.
Soit m et n deux réels de l'intervalle $[0;1]$. Sur la figure précédente, on place le point M de $[CG]$ tel que $CM = m$ et le point N de $[AE]$ tel que $AN = n$. À quelle condition sur m et n les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont-ils orthogonaux ?
$M(0;1;m)$ et $N(1;0;n)$. Donc $\overrightarrow{BM}(-1;0;m)$ et $\overrightarrow{BN}(0;-1;n)$. On calcule :

$$xx' + yy' + zz' = -1\times 0 + 0\times(-1) + m\times n = mn$$

Donc d'après le théorème 9, les deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si $mn = 0$; soit $m = 0$ ou $n = 0$. Pour que les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{BM}$ soient orthogonaux, il faut et il suffit que l'un des deux points M et N soit sur la face $ABCD$ du cube.