

Lycée Marlioz - Aix les bains

BAC BLANC 2008

Mathématiques - Terminale ES

février 2008

Pour cette épreuve, la rédaction, la clarté et la précision des explications entrent pour une large part dans l'appréciation des copies, sauf mention explicite du contraire dans l'énoncé.

Le barème est donné à titre indicatif.

Les calculatrices sont autorisées.

Le candidat rendra avec sa copie la feuille numérotée « page 6 »
et uniquement celle là !

Exercice 1 (5 points).

Les résultats numériques seront arrondis avec deux décimales.

Une entreprise recherche trois personnes expérimentées pour occuper trois postes techniques importants. On a constaté, lors d'embauches précédentes, que parmi les candidats qui peuvent se présenter, 80 % ont les compétences requises pour occuper ces postes. Pour sélectionner les candidats, les recruteurs de l'entreprise élaborent un test. On estime que :

- si une personne est compétente, elle a 85 chances sur 100 de réussir le test ;
- si une personne est incompétente, elle a 20 chances sur 100 de réussir le test.

1. Une personne se présente pour le premier poste. On pourra construire un arbre en notant :

- C l'événement « la personne est compétente » ;
- R l'événement « la personne réussit le test » ;
- \bar{C} et \bar{R} désignent les événements contraires respectifs de C et R ;
- Si A et B sont des événements,
 - $p(A)$ est la probabilité de réalisation de A ;
 - $p_B(A)$ est la probabilité de réalisation de A sachant que B est réalisé.

a. À l'aide des informations indiquées dans l'énoncé :

Donner les valeurs de $p(C)$ et $p_C(R)$. Donner la probabilité qu'une personne réussisse le test, sachant qu'elle n'est pas compétente.

b. Calculer la probabilité qu'une personne réussisse le test et soit compétente.

c. Montrer que $p(R) = 0,72$.

d. Une personne réussit le test. Quelle est la probabilité qu'elle soit compétente ?

2. Trois candidats se présentent pour pourvoir les trois postes.

Ils subissent successivement le test de façon indépendante.

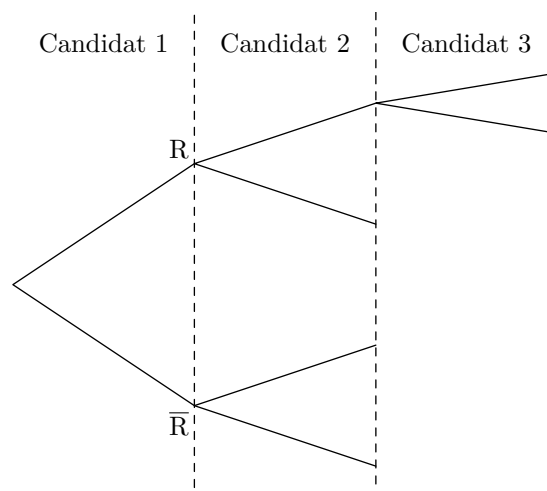
On admet que la probabilité de réussite au test est de 0,72 pour chacun.

a. On a esquissé ci-dessous un arbre pondéré traduisant la situation.

Recopier cette esquisse sur la copie et la compléter par les branches et les légendes manquantes.

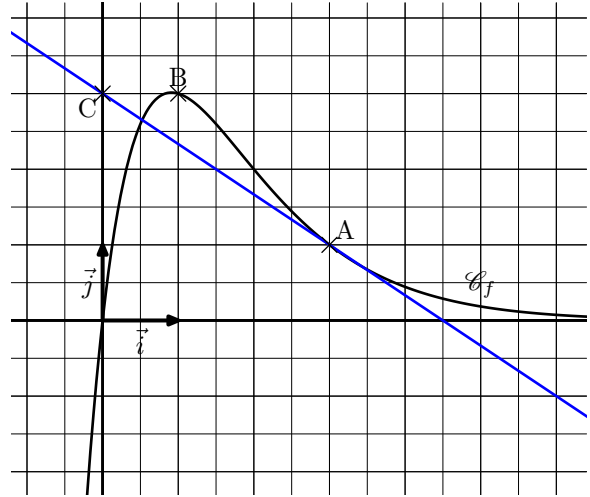
b. Calculer la probabilité que les trois candidats réussissent le test.

c. Calculer la probabilité qu'exactement deux candidats sur les trois réussissent le test.



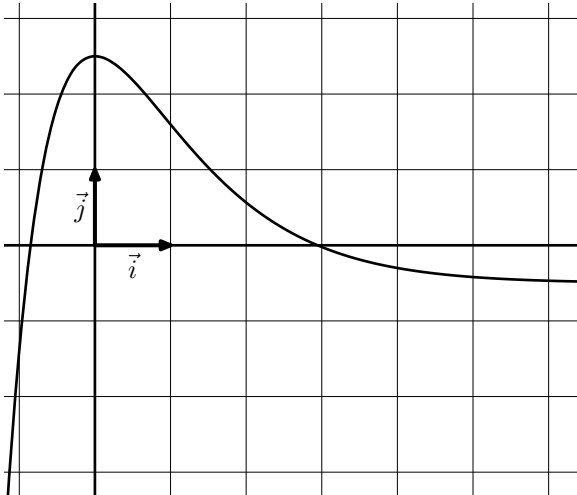
Exercice 2 (4 points).

On a représenté ci-contre, dans un repère orthonormal, la courbe représentative \mathcal{C}_f d'une fonction f définie et dérivable sur \mathbf{R} . La courbe \mathcal{C}_f passe par l'origine du repère et par les points $A(3; 1)$ et $B(1; 3)$. La droite (AC) (où $C(0; 3)$) est la tangente à \mathcal{C}_f au point A . La tangente à \mathcal{C}_f au point B est parallèle à l'axe des abscisses.

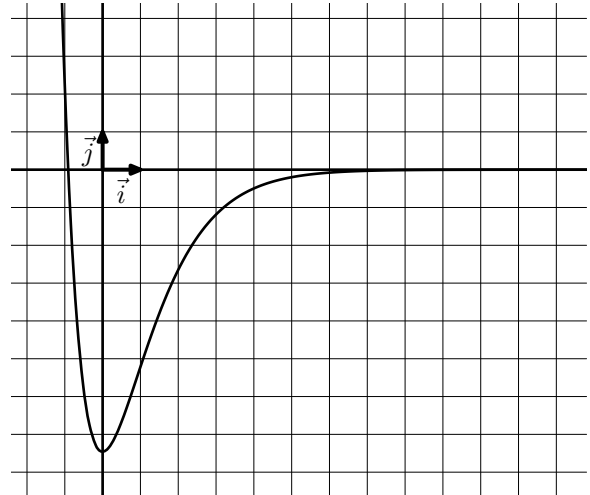


On donne ci-dessous quatre courbes représentatives de fonctions définies sur \mathbf{R} :

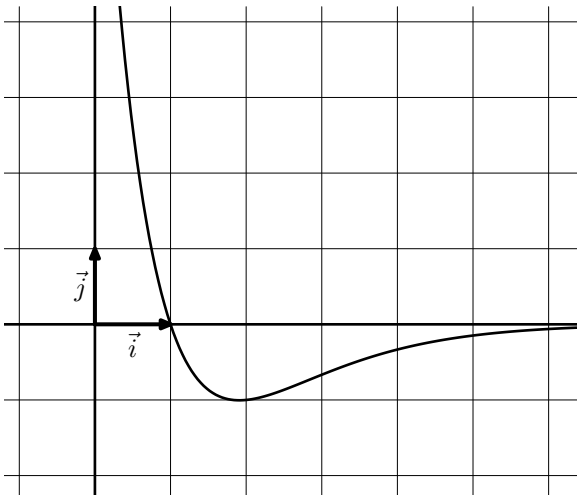
Courbe 1 :



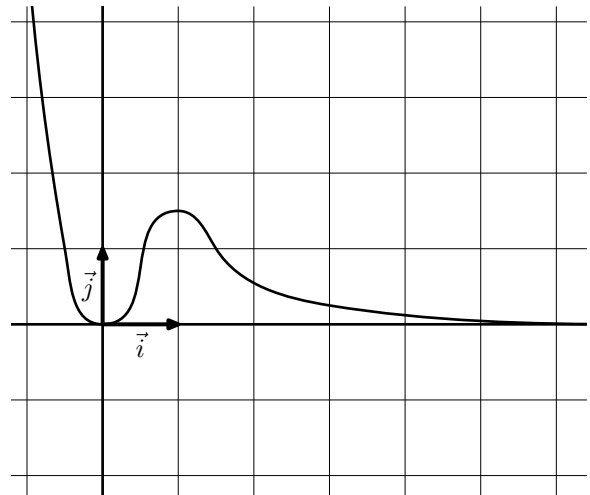
Courbe 2 :



Courbe 3 :



Courbe 4 :



Pour chacune des questions qui sont posées page 6, plusieurs réponses sont proposées et une seule est correcte. Le candidat cochera dans le tableau de la page 6 la case correspondant à la réponse qui lui semble juste. Aucune justification n'est demandée.

Une bonne réponse rapporte 0,5 point, une mauvaise réponse enlève 0,25 point et l'absence de réponse vaut zéro point. En cas de total négatif, la note de l'exercice sera ramenée à zéro.

Attention : l'exercice suivant est différent suivant si vous avez choisi l'enseignement de spécialité ou pas. Ne vous trompez pas!!!

Exercice 3 (Pour les candidats **ayant** choisi l'enseignement de spécialité - 5 points).

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ représenté sur la figure de la page 6 de ce sujet. Le plan (R) est représenté par ses traces sur les plans de coordonnées; il a pour équation : $x + z = 2$.

1. On donne les points A, B, C définis par leurs coordonnées respectives : A(6; 0; 0), B(0; 3; 0) et C(0; 0; 6).

a. Placer les points A, B, C dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et tracer le triangle ABC.

b. Calculer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .

c. Soit \vec{n} le vecteur de coordonnées (1; 2; 1).

Montrer que le vecteur \vec{n} est normal au plan (P) passant par A, B et C.

d. Vérifier que le plan (P) a pour équation $x + 2y + z = 6$.

2. On a placé dans le repère les points G, E et F à coordonnées entières. Le point G est situé sur l'axe $(O; \vec{j})$ le point E dans le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et le point F dans le plan $(O; \vec{j}, \vec{k})$.

Le plan (Q) passant par les points G, E et F est parallèle au plan $(O; \vec{i}, \vec{k})$.

a. Donner l'équation du plan (Q).

b. Lire les coordonnées des points G, E et F.

c. Parmi les points E, F et G, quels sont ceux situés dans le plan (P) ?

d. Quelle est la nature de l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x; y; z)$ vérifient le système

$$\begin{cases} y & = & 2 \\ x + 2y + z & = & 6. \end{cases}$$

e. Représenter cet ensemble sur la page 6 de ce sujet (à rendre avec la copie).

3. On considère le système S de trois équations à trois inconnues x, y, z :

$$\begin{cases} x + & & z & = & 2 \\ & y & & = & 2 \\ x + 2y + & z & = & 6. \end{cases}$$

Quel est l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées sont les solutions du système S ?

Exercice 3 (Pour les candidats **n'ayant pas** choisi l'enseignement de spécialité - 5 points).

Si une entreprise fabrique q produits, on note $C(q)$ les coûts de production pour fabriquer ces q produits. On rappelle les résultats suivants :

- le coût marginal $C_m(q)$ est le coût de la q^e unité produite. On assimile le coût marginal à la dérivée du coût total ; ainsi on a $C_m(q) = C'(q)$;
- les coûts fixes sont donnés par le calcul de $C(0)$;
- le coût moyen est le quotient des coûts totaux par la quantité produite.

Une entreprise produit des tee-shirts. On note q la quantité produite en milliers de tee-shirts, $C(q)$ les coûts totaux pour produire ces q milliers de tee-shirts et $C_m(q)$ le coût marginal.

Le coût marginal C_m est donné en fonction de q par $C_m(q) = 0,6q^2 - 2q + 80$.

1. Déterminer les coûts de production $C(q)$ en fonction de q sachant que les coûts fixes s'élèvent à 24 000€.
2. Justifier que le coût moyen est de 1,01€ par tee-shirt quand on en produit 50 000.
3. a. Montrer que le coût moyen par millier de tee-shirt est donné par :

$$CM(q) = \frac{0,2q^3 - q^2 + 80q + 24000}{q}.$$

- b. Vérifier que $CM'(q) = \frac{(q - 40)(0,4q^2 + 15q + 600)}{q^2}$.

- c. Montrer que $CM'(q)$ est du signe de $q - 40$.

En déduire les variations de CM .

- d. Pour quelle quantité q_0 le coût moyen par millier est-il minimal ? Vérifier qu'alors le coût moyen est égal au coût marginal.

Exercice 4 (6 points).

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{2x}{e} - 1 - \ln x$.

1. a. Montrer que pour $x > 0$, $g'(x) = \frac{2x - e}{e \times x}$. En déduire le sens de variation de g .

- b. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$. On admettra que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

- c. Donner la valeur exacte, puis une valeur approchée au dixième de $g(\frac{1}{e})$ puis de $g(\frac{e}{2})$.

- d. Dresser le tableau des variations de g .

- e. Calculer $g(e)$ et justifier que $g(x) \geq 0$ pour $x \geq e$.

- f. Montrer que g s'annule sur $[\frac{1}{e}; \frac{e}{2}]$ pour une valeur unique α .

Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

2. Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(0; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités 2 cm en abscisses et 4 cm en ordonnées.

Tracer la courbe Γ représentative de la fonction g et placer les points d'abscisses α et e .

3. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2}{e} - x \ln x$.

Montrer que f est une primitive de g .

NUMÉRO DE CANDIDAT :

Exercice 2

QUESTIONS	RÉPONSES
<p>1. Parmi les propositions suivantes, quelle est celle où les deux égalités sont vraies ?</p>	<p><input type="checkbox"/> $f(0) = 3$ et $f'(3) = -\frac{2}{3}$</p> <p><input type="checkbox"/> $f(3) = 1$ et $f'(3) = -\frac{3}{2}$</p> <p><input type="checkbox"/> $f(1) = 3$ et $f'(1) = -\frac{2}{3}$</p> <p><input type="checkbox"/> $f(3) = 1$ et $f'(3) = -\frac{2}{3}$</p>
<p>2. Une équation de la tangente à \mathcal{C}_f en A est :</p>	<p><input type="checkbox"/> $y = -\frac{2}{3}(x - 1) + 3$</p> <p><input type="checkbox"/> $y = -\frac{2}{3}x + 3$</p> <p><input type="checkbox"/> $y = -\frac{3}{2}x + 3$</p> <p><input type="checkbox"/> $y = -\frac{3}{2}(x - 3) + 1$</p>
<p>3. Parmi les courbes proposées à la page 3, quelle est celle qui représente la dérivée de f ?</p>	<p><input type="checkbox"/> Courbe 1</p> <p><input type="checkbox"/> Courbe 2</p> <p><input type="checkbox"/> Courbe 3</p> <p><input type="checkbox"/> Courbe 4</p>
<p>4. Parmi les courbes proposées à la page 3, quelle est celle qui représente une primitive de f ?</p>	<p><input type="checkbox"/> Courbe 1</p> <p><input type="checkbox"/> Courbe 2</p> <p><input type="checkbox"/> Courbe 3</p> <p><input type="checkbox"/> Courbe 4</p>

Figure pour l'exercice 3 de spécialité :

