Chapitre 9

Lois de probabilité

9.1 Lois de probabilité

9.1.1 Cas général

On considère une expérience aléatoire ayant un nombre fini d'éventualités. On dit qu'on a défini la loi de probabilité de cette expérience si on connaît la probabilité de chaque éventualité de cette expérience.
Généralement, on donne une loi de probabilité sous la forme d'un tableau :

Éventualité x_i	...	...
Probabilité p_i		

Remarque 9.1
La somme des « p_i » vaut 1 : $\sum p_i = 1$

Exemple 9.1
Dans une urne, on a placé trois boules rouges, deux boules blanches, cinq boules vertes et dix boules jaunes. On tire une boule au hasard dans l'urne. On note B l'événement « la boule est blanche », ...
La loi de probabilité de cette expérience est donc :

x_i	R	B	V	J
p_i	0,15	0,1	0,25	0,5

On a bien : $\sum p_i = 0{,}15 + 0{,}1 + 0{,}25 + 0{,}5 = 1$

9.1.2 Loi de Bernoulli

Définition 9.1
Lorsqu'une expérience aléatoire n'admet que deux issues qu'on nomme alors *succès* et *échec*, on l'appelle *épreuve de Bernoulli*[1].
Dans une épreuve de Bernoulli, on note généralement« p » la probabilité de succès. La probabilité de l'échec est alors $1 - p$.

La loi de probabilité d'une épreuve de Bernoulli est définie par :

x_i	Succès	Échec
p_i	p	$1-p$

[1]Famille de mathématiciens et physiciens suisses

Exemple 9.2
On lance un dé équilibré à six faces. On s'intéresse à la divisibilité par 3 du chiffre obtenu. On note S (succès) l'événement « le chiffre obtenu est divisible par 3 ».
Cette expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{3}$ car $p(S) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (seuls 3 et 6 sont divisibles par 3).

9.1.3 Loi Binomiale

Définition 9.2
On répéte n fois de manière indépendante la même épreuve de Bernoulli de paramètre p. On s'intéresse au nombre de succès obtenus au cours de ces n expériences.
Cette expérience admet $n+1$ éventualités : 0 succès, 1 succès, 2 succès, ..., n succès.
La loi de probabilité sur ces $n+1$ éventualités est appelée *loi Binomiale* de paramètres p et n.

Obtenir une loi Binomiale :
Pour obtenir la loi Binomiale de paramètres n et p, on construit un arbre pondéré à n niveaux où chaque noeud se sépare en deux branches : S et E.
Pour k compris entre 0 et n, on compte alors le nombre N_k de chemins ayant k succès.
Chaque chemin ayant k succès a pour probabilité le produit des probabilités de chaque éventualité qui le constitue soit :

$$\underbrace{p \times \cdots \times p}_{\substack{k \text{ facteurs} \\ (k \text{ succès})}} \times \underbrace{(1-p) \times \cdots \times (1-p)}_{\substack{n-k \text{ facteurs} \\ (n-k) \text{ échecs}}} = p^k \times (1-p)^{n-k}$$

La loi Binomiale est donc donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	...	k	...	n
p_i	$(1-p)^n$	$N_1 p(1-p)^{n-1}$	$N_2 p^2(1-p)^{n-2}$		$N_k p^k (1-p)^{n-k}$		p^n

où x_i est le nombre de succès obtenus.

Exemple 9.3
Un élève vient au lycée tous les jours en vélo. Sur son chemin il rencontre un feu qui est vert 40 % du temps.
L'élève part de chez lui à un horaire aléatoire et n'arrive donc pas toujours à la même heure au feu. On s'intéresse au nombre de fois où l'élève arrive au feu vert au cours d'une semaine de quatre jours. Déterminer la loi de cette expérience aléatoire.
Il s'agit d'une expérience de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}4$ répétée quatre fois : on est donc en présence d'une loi binomiale de paramètres $p = 0{,}4$ et $n = 4$.
On détermine le nombre de chemins ayant k succès (k feux verts) pour $0 \leq k \leq 4$:
arbre
On obtient : $N_0 = 1$, $N_1 = 4$, $N_2 = 6$, $N_3 = 4$ et $N_4 = 1$. La loi de cette expérience est donc :

x_i	0	1	2	3	4
p_i	$1 \times 0{,}4^0 \times 0{,}6^4$ $= 0{,}129\,6$	$4 \times 0{,}4^1 \times 0{,}6^3$ $= 0{,}345\,6$	$6 \times 0{,}4^2 \times 0{,}6^2$ $= 0{,}345\,6$	$4 \times 0{,}4^3 \times 0{,}6^1$ $= 0{,}153\,6$	$1 \times 0{,}4^4 \times 0{,}6^0$ $= 0{,}025\,6$

9.2 Espérance et variance d'une loi

Définition 9.3
On considère une loi de probabilité dont les n éventualités x_i $(1 \leq i \leq n)$ sont des réels. Les probabilités associées sont notées p_i.
On appelle *espérance* de cette loi le réel :

$$E = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i$$

On appelle *variance* de cette loi le réel positif :

$$V = p_1(x_1 - E)^2 + p_2(x_2 - E)^2 + \cdots + p_n(x_n - E)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E)^2$$

On appelle *écart-type* de cette loi le réel positif :

$$\sigma = \sqrt{V}$$

Interprétation :
- En considérant les x_i comme des gains algébriques[2], l'espérance est le gain (algébrique) moyen qu'on peut espérer sur un grand nombre d'épreuves.
- On dit qu'un jeu est *équitable* si son espérance est nulle.
- La variance mesure le « risque » de s'écarter de l'espérance.
- Si les gains sont exprimés en €, l'espérance est exprimée en € et la variance en €^{2}.

Propriété 9.1
Dans les conditions de la définition 9.3, on a aussi :

$$V = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i^2 - E^2$$

Exemple 9.4
On lance deux fois de suite une pièce équilibrée. Les issues possibles sont notées PP, PF, FP et FF. À chaque sortie de P on gagne 1 € et à chaque sortie de F on perd 1 €.

1. Quels sont les gains algébriques possibles ?
2. Quelle est la loi de probabilité de cette expérience ?
3. Calculer son espérance.
4. Ce jeu est-il équitable ?

Propriété 9.2 (admise)
L'espérance d'une loi binomiale de paramètres n et p est $E = n \times p$.

[2]Les x_i positifs sont des gains et les x_i négatifs sont des pertes