Suites

1 Suite de nombres réels

1.1 Définition

Définition 1
On appelle suite de terme général u_n et on note $(u_n)_{n\geq 0}$ ou plus simplement u la liste *ordonnée* des nombres u_0, u_1, u_2, u_3, ... Les nombres u_i son appelés les *termes* de la suite.
Un suite (u_n) est donc une application définie par $u : \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ n & \longmapsto & u_n \end{array}$

Remarque 1
Parfois le premier terme d'une suite peut être u_1 et non pas u_0.

Exemple 1
On définit (u_n) comme la suite des nombres pairs.
Dans ce cas, on a : $u_0 = 0$, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$, ... On peut écrire aussi $u_n = 2 \times n$.

1.2 Mode de génération

Une suite (u_n) est entièrement définie si on est capable de calculer u_n pour n'importe quelle valeur de n. Il existe deux façons usuelles pour définir une suite :

1.2.1 Suite définie « en fonction de n »

Exemple 2
On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \frac{x+3}{x^2+1} \end{array}$.
Si $x \in \mathbf{N}$, $f(x)$ est toujours défini. On peut donc considérer la suite u de terme général :

$$u_n = f(n) = \frac{n+3}{n^2+1}$$

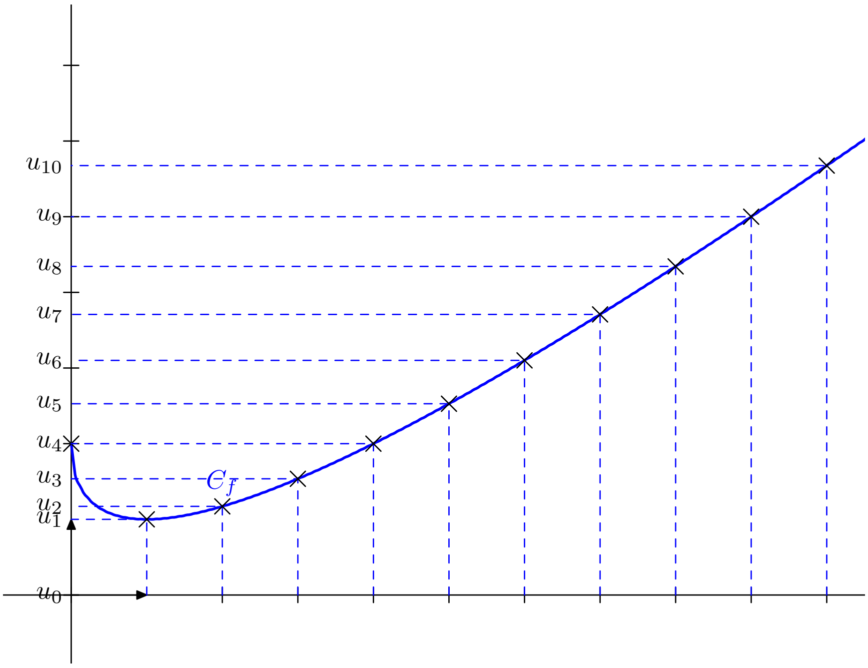
On a alors :

$$u_0 = \frac{0+3}{0^2+1} = 3,\ u_1 = \frac{1+3}{1^2+1} = 2,\ \ldots$$

Dans cette situation, on est bien en mesure de calculer u_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Représentation graphique d'une suite définie « en fonction de n »
Soit u une suite définie par $u_n = f(n)$ pour $n \in \mathbf{N}$, où f est une fonction numérique définie sur $\mathbf{R}$.
On trace dans un repère la représentation graphique de f. Le terme u_i de la suite est alors l'ordonnée du point de $\mathcal{C}_f$ dont l'abscisse est i.

Exemple 3
Le graphique ci-dessous représente la suite u définie par $u_n = f(n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2$



1.2.2 Suite définie par récurrence

Exemple 4

Je possède 1 000 € sur mon livret d'épargne. Chaque année on me reverse dessus 5 % en intérêts et je rajoute 100 €. J'appelle u_n la somme dont je dispose sur mon livret après n ans. On a donc :

– pour $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = (1 + \frac{5}{100}) \times u_n + 100 = 1,05u_n + 100$.

– la somme disponible sur le livret aujourd'hui est 1 000€. Donc : $u_0 = 1\ 000$

On a : $u_1 = 1,05 \times 1\ 000 + 100 = 1\ 150$, puis $u_2 = 1,05 \times 1\ 150 + 100 = 1\ 307{,}50 \ldots$. De proche en proche, on peut donc calculer u_n pour n'importe quelle valeur de n.

Définition 2

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbf{R}$, et a un réel quelconque. On dit que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ vérifiant $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour tout } n \in \mathbf{N} \end{cases}$ est définie par *récurrence* et on note :

$$u : \begin{cases} u_0 = a \\ \text{pour } n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Remarque 2

Lorqu'une suite est définie par récurrence, pour calculer u_n, on est obligé d'avoir calculé tous les termes précédents.

Représentation graphique d'une suite définie par récurrence

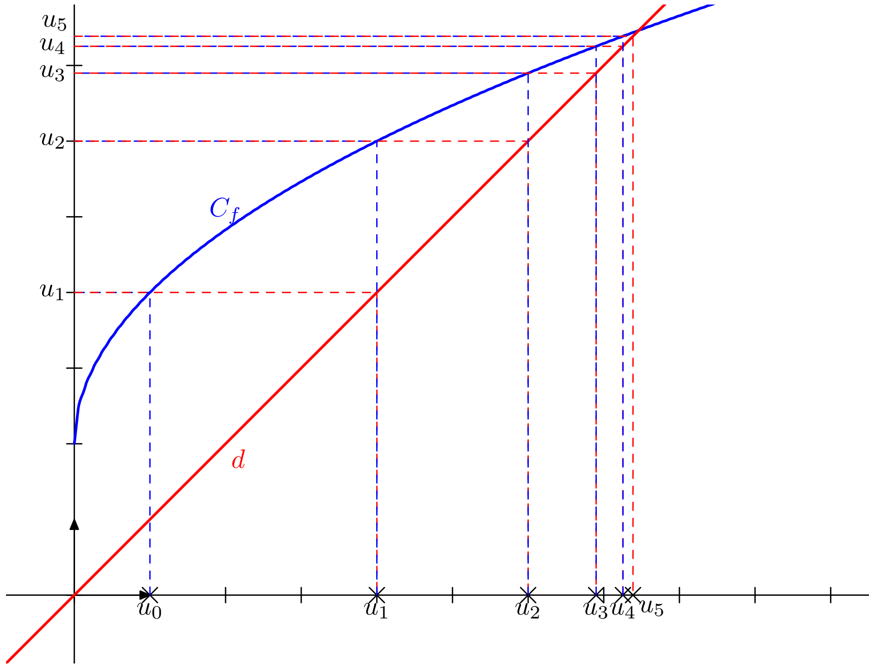
Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbf{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$

On trace dans un repère la droite d d'équation $y = x$ et la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f. On place ensuite sur l'axe des abscisses u_0. On a $u_1 = f(u_0)$; on peut donc lire u_1 sur l'axe des ordonnées comme l'image de u_0 par f. On reporte alors u_1 sur l'axe des abscisses grâce à d.

Exemple 5

Le graphique ci-dessous est obtenu avec $f : x \mapsto \sqrt{4x} + 2$ et $u_0 = 1$. On a donc u définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{4u_n} + 2 \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$



2 Variations d'une suite

Définition 3

On dit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est :

– strictement croissante si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} > u_n$.

– strictement décroissante si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} < u_n$.

Exemple 6

On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = (2n+1)^2$. Pour étudier les variations de $(u_n)_{n\geq 0}$, on calcule $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} - u_n & = & (2(n+1)+1)^2 - (2n+1)^2 \\ & = & (2n+3)^2 - (2n+1)^2 \\ & = & 4n^2 + 12n + 9 - (4n^2 + 4n + 1) \\ & = & 8n + 8 > 0, \text{ pour } n \in \mathbf{N} \end{array}$$

Donc la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante.

Exemple 7

On considère la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par récurrence par : $\begin{cases} v_0 = 10 \\ v_{n+1} = (v_n)^2 + 3v_n + 1 \end{cases}$.

Pour étudier les variations de (v_n), on va calculer $v_{n+1} - v_n$:

$$\begin{array}{rcl} v_{n+1} - v_n & = & (v_n)^2 + 3v_n + 1 - v_n \\ & = & (v_n)^2 + 2v_n + 1 \\ & = & (v_n + 1)^2 > 0, \text{ pour } n \in \mathbf{N} \end{array}$$

Donc la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante.

3 Suites arithmétiques

3.1 Définition

Définition 4
Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite *arithmétique* si la différence entre deux termes consécutifs est constante. C'est à dire qu'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$.
Le réel r est appelé *raison* de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exemple 8
Si u est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 3, on a :

$$\begin{aligned}
&u_0 = 5\\
&u_1 = u_0 + 3 = 5 + 3 = 8\\
&u_2 = u_1 + 3 = 8 + 3 = 11
\end{aligned}$$

3.2 Calcul du terme général

Théorème 1
- si u est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = u_0 + nr$.
- si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = a + b \cdot n$, alors, u est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = a$ et de raison b.

Démonstration :
- On a : $u_1 = u_0 + r$,
  puis, $u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r$.
  De même, $u_3 = u_2 + r = (u_0 + 2r) + r = u_0 + 3r, \ldots$ et ainsi de suite, on obtient $u_n = u_0 + nr$.
- Si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = a+nb$, alors $u_{n+1} - u_n = (a + (n + 1)b) - (a + nb) = b$. Donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + b$, et donc u est une suite arithmétique de raison b et de premier terme $u_0 = a + 0 \cdot b = a$.

Exemple 9
En reprenant la suite de l'exemple 8, on a :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbf{N}, \quad u_n = 5 + n \times 3 = 5 + 3n$$

Remarque 3
Si le premier terme d'une suite arithmétique est u_1, et sa raison est r, on a :

$$\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = u_1 + (n - 1)r$$

3.3 Calcul de la somme des premiers termes

Propriété 1
La somme S des n premiers termes d'une suite arithmétique est :

$$S = \frac{n \times (\text{premier terme } + \text{ dernier terme})}{2}$$

Dans le cas où le premier terme est u_0, on obtient : $S = \frac{n\times(u_0+u_{n-1})}{2}$.
Dans le cas où le premier terme est u_1, on obtient : $S = \frac{n\times(u_1+u_n)}{2}$.

Démonstration : (cas où le premier terme est u_1)
On va écrire S de deux façons différentes :

$$S = u_1 + (u_1 + r) + \cdots + (u_1 + (n-1)r) + (u_1 + nr)$$
$$S = (u_n - nr) + (u_n - (n-1)r) + \cdots + (u_n - r) + u_n$$

Donc : $2S = n \times u_1 + n \times u_n$ (les autres termes s'annulent) d'où le résultat en divisant les deux membres par 2.

Exemple 10
Soit u la suite arithmétique de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $r = 1$. On a pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = u_1 + (n-1) \times r = nr$. On a donc la somme des n premiers termes qui vaut :

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n \times (1+n)}{2}$$

Application : $1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = \frac{100 \times 101}{2} = 5\ 050$.

4 Suites géométriques

4.1 Définition

Définition 5
Une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est dite *géométrique* si chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par un même nombre q. C'est à dire qu'il existe un réel q tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le réel q est appelé *raison* de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

Remarque 4
Si on considère que la suite u n'est pas la suite nulle[1], u est géométrique si pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$.

Exemple 11
Si u est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$, et de raison $q = 2$, on a :

$$u_0 = 5, \quad u_1 = q \times u_0 = 2 \times 5 = 10, \quad u_2 = q \times u_1 = 2 \times 10 = 20, \quad u_3 = q \times u_2 = 2 \times 20 = 40, \ldots$$

4.2 Calcul du terme général

Théorème 2
- si u est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$.
- si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = a \times b^n$, alors, u est la suite géométrique de premier terme $u_0 = a$ et de raison b.

Exemple 12
En reprenant la suite géométrique de l'exemple 11, on a :

$$\text{pour tout } n \in \mathbf{N}, \quad u_n = u_0 \times q^n = 5 \times 2^n$$

Remarque 5
Si le premier terme est u_1, on a : pour tout $n \in \mathbf{N}^*, u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

[1]La suite nulle est la suite dont tous les termes sont égaux à zéro.

4.3 Calcul de la somme des premiers termes

Propriété 2
Soit q un réel différent de 0 et de 1. Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$1 + q + q^2 + \ldots \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Remarque 6
– Si $q = 0$, $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = 1$.
– Si $q = 1$, $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = n + 1$.

Exemple 13
si $q = 2$,
$1 + q + q^2 = 1 + 2 + 4 = 7$. En appliquant la formule : $1 + q + q^2 = \frac{1-2^3}{1-2} = \frac{-7}{-1} = 7$.
$1 + 2 + \cdots + 2^{10} = \frac{1-2^{11}}{1-2} = 2047$.

Propriété 3
Soit u une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, avec q différent de 1 et de 0. On a :

$$u_0 + u_1 + \ldots \ldots u_n = u_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Démonstration :
$u_0 = u_0 \times 1$, $u_1 = u_0 \times q$, $u_2 = u_0 \times q^2$,.... Ainsi, on a :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + \cdots + u_0 \times q^n = u_0 \left(1 + q + q^2 + \cdots + q^n\right)$$

En utilisant la propriété 2, on obtient :

$$u_0 + u_1 + \ldots \cdots + u_n = u_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Remarque 7
Si u est une suite géométrique de raison q, la somme des premiers termes peut aussi s'écrire :

$$S = \frac{\text{premier terme} - q \times \text{dernier terme}}{1 - q}$$

Exemple 14
Calculer $S = 3 + 9 + 27 + 81 + \cdots + 2187$:
S est la somme des 7 premiers termes d'une suite géométrique u de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 3$. Donc :

$$S = 3 \times \frac{1 - 3^7}{1 - 3} = 3 \times 1093 = 3279$$

Table des matières