Chapitre 5

Dérivation

5.1 Taux de variation

Dans cette partie, f est une fonction numérique définie sur un intervalle I, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère. a et x sont deux réels distincts dans l'intervalle I. On note h le réel non nul tel que $x = a + h$.

5.1.1 Taux de variation

Définition 5.1
Le *taux de variation* de la fonction f entre a et x est le quotient :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Avec $x = a + h$, ce quotient s'écrit aussi : $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

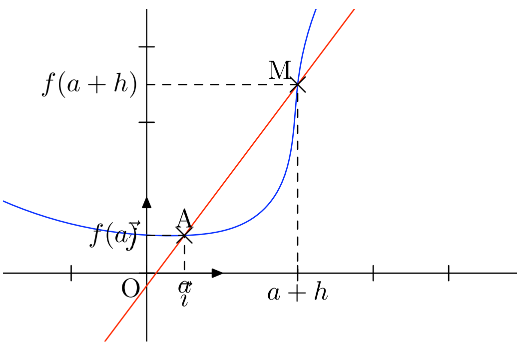
Exemple 5.1
Pour f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2$, le taux de variation de f entre a et $a + h$ est :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = 2a + h$$

Exercice 5.1
Pour f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x + 1$, calculer le taux de variation de f entre a et $a + h$.

5.1.2 Interprétation graphique

On note A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a, et M celui d'abscisse x.
Le taux de variation de la fonction f entre a et x, $\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$ est le coefficient directeur de la droite (AM).



5.2 Nombre dérivé

f est une fonction numérique définie sur un intervalle I, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère. a et x sont deux réels distincts dans l'intervalle I. On note h le réel non nul tel que $x = a + h$.

5.2.1 Nombre dérivé

Définition 5.2
Lorsque h se rapproche de plus en plus de 0 (soit quand x se rapproche de a), si le taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ devient de plus en plus proche d'un nombre réel l fixe, on dit que la limite lorsque h tend vers 0 de ce taux de variation vaut l. On note :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l$$

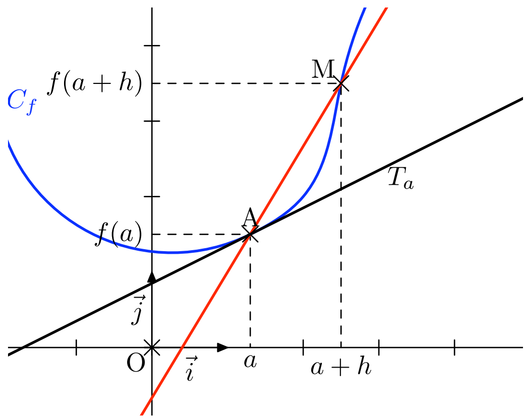
Dans ce cas, on dit que f *est dérivable en* a, et l est *le nombre dérivé* de f en a. Ce nombre dérivé est noté $f'(a)$. Ainsi on a :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \text{ lorsque cette limite existe}$$

5.2.2 Interprétation graphique

Lorsque h se rapproche de 0, le point M se rapproche de A, et la droite (AM) se rapproche de la *tangente* à $\mathscr{C}$ au point A.
Ainsi, $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a.
Conséquence :
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et dérivable en $a \in I$. La tangente T_a à la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour équation :

$$T_a : y = f'(a)\,(x-a) + f(a)$$



5.2.3 Interprétation cinématique

On considère un objet en mouvement. On note t la durée en secondes de son parcours, et $y(t)$ la distance en mètres, parcourue après t secondes.
Le taux de variation de y entre deux instants t_1 et t_2 : $\frac{y(t_2)-y(t_1)}{t_2-t_1}$ est la vitesse moyenne de l'objet entre les instants t_1 et t_2.

Définition 5.3
Dans les conditions précédentes, la limite quand t_2 se rapproche de t_1 du taux de variation (c'est à dire le nombre dérivé de y en t_1) est appelée *vitesse instantanée* de l'objet à l'instant t_1.

$$V(t_1) = \lim_{t_2\to t_1} \frac{y(t_2)-y(t_1)}{t_2-t_1} = \lim_{h\to 0} \frac{y(t_1+h)-y(t_1)}{h}$$

Exemple 5.2
On lache un objet en chute libre. On note $x(t)$ la distance parcourue (en m) après t secondes. On admet que la distance parcourue s'exprime en fonction du temps de parcours par $x(t) = 4{,}9x^2$.
Calculer la vitesse instantanée de l'objet après une chute de t secondes.
On exprime le taux de variation de x entre les instants t et $t+h$:

$$v = \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \frac{4{,}9(t+h)^2 - 4{,}9t^2}{h}$$

En développant, réduisant et simplifiant, on obtient :

$$v = \frac{4{,}9(t^2 + 2th + h^2) - 4{,}9t^2}{h} = \frac{9,8th + 4{,}9h^2}{h} = 9,8t + 4{,}9h$$

Lorsque h tend vers 0, ce taux de variation se rapproche de $9{,}8t$: $\lim\limits_{h\to 0}(9{,}8t + 4{,}9t) = 9,8t$.
Donc la vitesse instantanée de l'objet en chute libre est donnée par l'expression $v(t) = x'(t) = 9{,}8t$.
Après 5 secondes de chute libre, la vitesse est de $9{,}8 \times 5 = 49$ m/s. (soit 179,4 km/h).

5.2.4 Approximation affine

Exemple 5.3
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x$. Il n'est pas trop difficile de calculer mentalement les images par f de 1, 3, -2 etc.... Par contre, si on souhaite calculer $f(0{,}98)$ ou $f(1{,}01)$ c'est plus difficile.
On exprime $f(1+h) = (1+h)^3 - 2(1+h) = -1 + h + 3h^2 + h^3$. Pour h proche de 0, $3h^2 + h^3$ est encore plus proche de 0, et donc $f(1+h)$ est voisin de $-1+h$. On dit que $-1+h$ est une approximation affine de f au voisinage de 1.
Ainsi, on a $f(0{,}98) = f(1 + (-0{,}02)) \approx -1 + (-0{,}02) = -1{,}02$
et $f(1{,}01) \approx -0{,}99$.

De façon générale, si f est une fonction dérivable en a, on a :
$f(a+h) \approx f(a) + f'(a) \times h$, lorsque h est « proche » de 0.

5.3 Fonction dérivée

5.3.1 Fonction dérivée

Soit f une fonction définie et dérivable en tout a d'un intervalle I. On a vu que pour $a \in I$, $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et on l'a appelée « nombre dérivé de f en a » et noté $f'(a)$.

Définition 5.4
Soit f une fonction dérivable en tout x d'un intervalle I, alors la fonction qui à x associe $f'(x)$ est appelée *fonction dérivée* de f sur I. On la note f'.

5.3.2 Dérivées des fonctions usuelles

Fonction constante

Soit $k \in \mathbf{R}$ et $f : x \mapsto k$, pour $x \in \mathbf{R}$.
pour $h \neq 0$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{k-k}{h} = 0$. Donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = 0$.
La dérivée d'une fonction constante est la fonction nulle.

La fonction $x \mapsto x^n, n \in \mathbf{N}^*$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^n$. Alors, pour $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = nx^{n-1}$.

Exemple 5.4
On a donc les résultats suivants :
- si $f(x) = x$, alors $f'(x) = 1$;
- si $f(x) = x^2$, alors $f'(x) = 2x$;
- ....

Ainsi en posant, $f(x) = x^3$, on a alors $f'(x) = 3x^2$.
Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 de $\mathscr{C}$ est donc $f'(1)$.
Pour calculer $f'(1)$ on peut utiliser
- la définition du nombre dérivé : c'est la limite lorsque h tend vers 0 du taux de variation $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$;
- ou, et c'est plus rapide, la fonction dérivée de f : $f'(1) = 3 \times 1^2 = 3$.

Fonction inverse

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. Alors, pour $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Exemple 5.5
Soit f la fonction inverse : pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
Cette tangente T_1 a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.
Pour la déterminer nous avons besoin de $f'(1)$ et de $f(1) = \frac{1}{1} = 1$.
On a pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ donc $f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$.
Ainsi T_1 a pour équation $y = -1 \times (x-1) + 1$ soit $T_1 : y = -x + 2$.

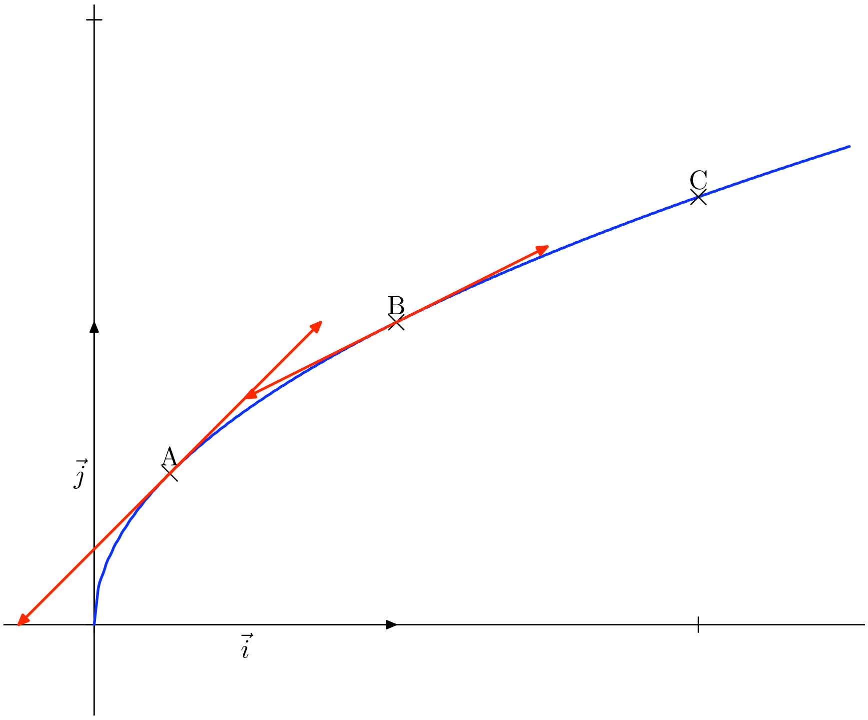
Fonction racine carrée

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$. Alors, pour $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Attention : f n'est pas dérivable en 0

Application au tracé de la courbe :
Pour tracer la courbe représentant la fonction racine carrée on dresse un tableau de valeur et pour chaque point de ce tableau on calcule le coefficient directeur de la tangente à la courbe en ce point, puis on détermine l'équation de la tangente :

a	$\frac{1}{4}$	1	2
$f(a)$	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$
$f'(a)$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$

- En $a = \frac{1}{4}$, l'équation de la tangente est : $y = 1 \times (x - \frac{1}{4}) + \frac{1}{2}$ soit $y = x + \frac{1}{4}$.
- En $a = 1$, l'équation de la tangente est : $y = \frac{1}{2}(x-1) + 1$ soit $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.
- En $a = 2$, l'équation de la tangente est : $y = \frac{1}{2\sqrt{2}}(x-2) + \sqrt{2}$ soit $y = \frac{x\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}$.



5.4 Opérations sur les fonctions dérivables

5.4.1 Dérivée d'une somme

Propriété 5.1
Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Alors la fonction $f + g$ est dérivable sur I et pour $x \in I$, $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Exemple 5.6
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 + 3$.

f est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$, et pour $x \in \mathbf{R}$, on a : $f'(x) = 3x^2 + 2x$

5.4.2 Produit par un réel

Propriété 5.2
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, et λ un réel quelconque. Alors, la fonction $\lambda f : x \mapsto \lambda f(x)$ est dérivable sur I et pour $x \in I$, $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$.

Exemple 5.7
Soit f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 2x^2$, et g définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = 4x^3 - 2x$.
Alors, $f'(x) = 2 \times 2x$ et $g'(x) = 4 \times 3x^2 - 2$.

Conséquence :
Les fonctions polynômes sont donc dérivables sur leur ensemble de définition.

5.4.3 Dérivée d'un produit

Propriété 5.3
Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = u(x)v(x)$. Alors, f est dérivable sur I et pour $x \in I$, $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. On note $f' = u'v + uv'$.

Exemple 5.8
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f(x) = x^3\sqrt{x}$.
f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables : f s'écrit $u \times v$ avec $\left\{ \begin{array}{l} u(x) = x^3 \\ v(x) = \sqrt{x} \end{array} \right.$,
où u est dérivable sur $\mathbf{R}$ et v dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$.
On a donc : $\left\{ \begin{array}{l} u'(x) = 3x^2 \\ v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{array} \right.$.
Avec ces notations, on a $f' = u'v + uv'$ donc :

$$\text{Pour } x > 0,\ f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (3x^2)\sqrt{x} + x^3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 3x^2\sqrt{x} + \frac{x^3}{2\sqrt{x}}.$$

En simplifiant, on obtient même :

$$f'(x) = 3x^2\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^3 \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = x^2\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2\sqrt{x} = \frac{7}{2}x^2\sqrt{x}$$

5.4.4 Dérivée d'un quotient

Propriété 5.4
Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, avec $v(x) \neq 0$ pour $x \in I$. Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Alors, f est dérivable sur I et pour $x \in I$, $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$. On note $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Exemple 5.9
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$, par $f(x) = \frac{3x-4}{x^2+3}$.
f est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas : on a $f = \frac{u}{v}$ avec $\left\{ \begin{array}{l} u(x) = 3x - 4 \\ v(x) = x^2 + 3 \end{array} \right.$.
On a donc : $\left\{ \begin{array}{l} u'(x) = 3 \\ v'(x) = 2x \end{array} \right.$. Et ainsi, $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. Donc :

$$\text{Pour } x \in \mathbf{R},\ f'(x) = \frac{3 \times (x^2 + 3) - (3x - 4) \times (2x)}{(x^2 + 3)^2} = \frac{-3x^2 + 8x + 9}{(x^2 + 3)^2}.$$

Conséquence :
Les fonction rationnelles (quotients de deux polynômes) sont dérivables sur leur ensemble de définition.

On pourra se référer à l'annexe C de la page 77 pour un tableau récapitulatif des dérivées de fonctions usuelles.

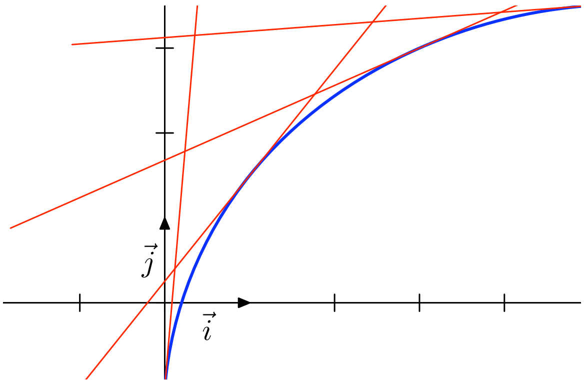
5.5 Fonction dérivée et sens de variation

5.5.1 Variations d'une fonction affine

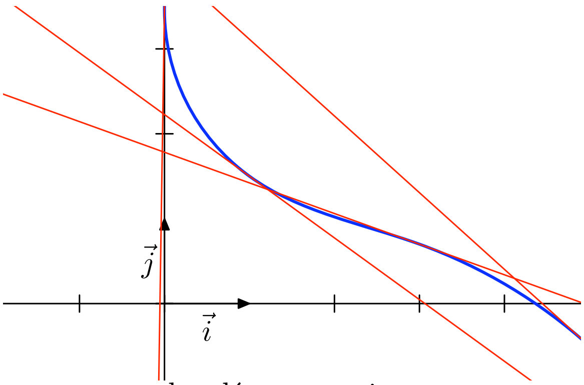
La tangente à une courbe en un point est une droite qui représente une fonction affine. Si le coefficient directeur de la droite est positif, alors la fonction affine associée est croissante ; si le coefficient directeur de la droite est négatif, alors la fonction affine associée est décroissante.

Interprétation graphique :

Sur la figure ci-dessous, toutes les tangentes à $\mathscr{C}$ ont un coefficient directeur positif ; les nombres dérivés de f sont positifs. Les tangentes « montent », et donc la courbe $\mathscr{C}$ aussi : la fonction f est croissante.



Sur la figure ci-dessous, toutes les tangentes à $\mathscr{C}$ ont un coefficient directeur négatif ; les nombres dérivés de f sont négatifs. Les tangentes « descendent », et donc la courbe $\mathscr{C}$ aussi : la fonction f est décroissante.



Attention, ces résultats ne sont que des conjectures et non pas des démonstrations.

5.5.2 Théorèmes

Théorème 5.1 (admis)
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- Si f' est *positive* sur I, alors f est *croissante* sur I.
- Si f' est *négative* sur I, alors f est *décroissante* sur I.
- Si f' est *nulle* sur I, alors f est *constante* sur I.

Théorème 5.2
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a; b]$. Si f' est strictement positive (resp. négative) sur $]a; b[$, alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur $[a; b]$.

Exemple 5.10
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^3 + 1{,}5x^2 - 6x + 1$.

1. Calculer la dérivée de f.
2. Étudier le signe de f' sur $\mathbf{R}$.
3. Dresser le tableau de variation de f.

1. f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour $x \in \mathbf{R}$, on a :

$$f'(x) = 3x^2 + 2 \times 1{,}5x - 6 = 3(x^2 + x - 2)$$

2. x^2+x-2 est un polynôme de degré 2. On calcule son discriminant : $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2)$, soit $\Delta = 9$. On a donc deux racines qui sont $\frac{-1-\sqrt{9}}{2} = -2$ et $\frac{-1+\sqrt{9}}{2} = 1$. Notre polynôme est du signe de $a = 1$ (positif) pour $x < -2$ ou pour $x > 1$. On obtient le tableau suivant :

3.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
3		$+$		$+$		$+$	
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	11	$\searrow$	$-2{,}5$	$\nearrow$	

$$f(-2) = (-2)^3 + 1{,}5 \times (-2)^2 - 6 \times (-2) + 1 = -8 + 6 + 12 + 1 = 11$$

$$f(1) = 3 \times 1^3 + 1{,}5 \times 1^2 - 6 \times 1 + 1 = -2{,}5$$