

# Chapitre 6

## Suites

### 6.1 Suite de nombres réels

#### 6.1.1 Définition

##### Définition 6.1

On appelle suite de terme général  $u_n$  et on note  $(u_n)_{n \geq 0}$  ou plus simplement  $u$  la liste *ordonnée* des nombres  $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$ . Les nombres  $u_i$  sont appelés les *termes* de la suite.

##### Remarque 6.1

Parfois le premier terme d'une suite peut être  $u_1$  et non pas  $u_0$ .

##### Exemple 6.1

On définit  $(u_n)$  comme la suite des nombres pairs.

Dans ce cas, on a :  $u_0 = 0, u_1 = 2, u_2 = 4, \dots$ . On peut écrire aussi  $u_n = 2 \times n$ .

#### 6.1.2 Mode de génération

Une suite  $(u_n)$  est entièrement définie si on est capable de calculer  $u_n$  pour n'importe quelle valeur de  $n$ . Il existe deux façons usuelles pour définir une suite :

##### Suite définie « en fonction de $n$ »

##### Exemple 6.2

On considère la fonction  $f : x \mapsto f(x) = \frac{x+3}{x^2+1}$ .

Si  $x \in \mathbf{N}$ ,  $f(x)$  est toujours défini. On peut donc considérer la suite  $u$  de terme général :

$$u_n = f(n) = \frac{n+3}{n^2+1}$$

On a alors :

$$u_0 = \frac{0+3}{0^2+1} = 3, \quad u_1 = \frac{1+3}{1^2+1} = 2, \quad \dots$$

Dans cette situation, on est bien en mesure de calculer  $u_n$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .

## Suite définie par récurrence

### Exemple 6.3

Je possède 1 000 € sur mon livret d'épargne. Chaque année on me reverse dessus 5 % en intérêts et je rajoute 100 €. J'appelle  $u_n$  la somme dont je dispose sur mon livret après  $n$  ans. On a donc :

– pour  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+1} = (1 + \frac{5}{100}) \times u_n + 100 = 1,05u_n + 100$ .

– la somme disponible sur le livret aujourd'hui est 1 000 €. Donc :  $u_0 = 1\,000$

On a :  $u_1 = 1,05 \times 1\,000 + 100 = 1\,150$ , puis  $u_2 = 1,05 \times 1\,150 + 100 = 1\,307,50 \dots$  De proche en proche, on peut donc calculer  $u_n$  pour n'importe quelle valeur de  $n$ .

### Remarque 6.2

Lorsqu'une suite est définie par récurrence, pour calculer  $u_n$ , on est obligé d'avoir calculé avant tous les termes précédents.

## 6.2 Suites arithmétiques

### 6.2.1 Définition

#### Définition 6.2

Une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est dite *arithmétique* si la différence entre deux termes consécutifs est constante. C'est à dire qu'il existe un réel  $r$  tel que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n + r$ . Le réel  $r$  est appelé *raison* de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ .

#### Exemple 6.4

Si  $u$  est la suite arithmétique de premier terme  $u_0 = 5$  et de raison 3, on a :

$$u_0 = 5$$

$$u_1 = u_0 + 3 = 5 + 3 = 8$$

$$u_2 = u_1 + 3 = 8 + 3 = 11$$

### 6.2.2 Calcul du terme général

#### Théorème 6.1

- si  $u$  est une suite arithmétique de premier terme  $u_0$  et de raison  $r$ , alors, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n = u_0 + nr$ .
- si pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n = a + b \cdot n$ , alors,  $u$  est la suite arithmétique de premier terme  $u_0 = a$  et de raison  $b$ .

#### Exemple 6.5

En reprenant la suite de l'exemple 6.4, on a :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbf{N}, \quad u_n = 5 + n \times 3 = 5 + 3n$$

### Remarque 6.3

Si le premier terme d'une suite arithmétique est  $u_1$ , et sa raison est  $r$ , on a :

$$\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = u_1 + (n - 1)r$$

### 6.2.3 Calcul de la somme des premiers termes

#### Propriété 6.1

La somme  $S$  des  $n$  premiers termes d'une suite arithmétique est :

$$S = \frac{n \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

Dans le cas où le premier terme est  $u_0$ , on obtient :  $S = \frac{n \times (u_0 + u_{n-1})}{2}$ .

Dans le cas où le premier terme est  $u_1$ , on obtient :  $S = \frac{n \times (u_1 + u_n)}{2}$ .

#### Exemple 6.6

Soit  $u$  la suite arithmétique de premier terme  $u_1 = 1$  et de raison  $r = 1$ . On a pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $u_n = u_1 + (n - 1) \times r = nr$ . On a donc la somme des  $n$  premiers termes qui vaut :

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) + n = \frac{n \times (1 + n)}{2}$$

Application :  $1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = \frac{100 \times 101}{2} = 5\,050$ .

## 6.3 Suites géométriques

### 6.3.1 Définition

#### Définition 6.3

Une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est dite *géométrique* si chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par un même nombre  $q$ . C'est à dire qu'il existe un réel  $q$  tel que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+1} = q \times u_n$ . Le réel  $q$  est appelé *raison* de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ .

#### Remarque 6.4

Si on considère que la suite  $u$  n'est pas la suite nulle<sup>1</sup>,  $u$  est géométrique si pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on a :  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ .

#### Exemple 6.7

Si  $u$  est la suite géométrique de premier terme  $u_0 = 5$ , et de raison  $q = 2$ , on a :

$u_0 = 5$ ,  $u_1 = q \times u_0 = 2 \times 5 = 10$ ,  $u_2 = q \times u_1 = 2 \times 10 = 20$ ,  $u_3 = q \times u_2 = 2 \times 20 = 40$ , ...

### 6.3.2 Calcul du terme général

#### Théorème 6.2

- si  $u$  est une suite géométrique de premier terme  $u_0$  et de raison  $q$ , alors, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n = u_0 \times q^n$  ;
- si pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n = a \times b^n$ , alors,  $u$  est la suite géométrique de premier terme  $u_0 = a$  et de raison  $b$ .

#### Exemple 6.8

En reprenant la suite géométrique de l'exemple 6.7, on a : pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n = u_0 \times q^n = 5 \times 2^n$

#### Remarque 6.5

Si le premier terme est  $u_1$ , on a : pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ .

<sup>1</sup>La suite nulle est la suite dont tous les termes sont égaux à zéro.

### 6.3.3 Calcul de la somme des premiers termes

**Propriété 6.2**

Soit  $u$  une suite géométrique de premier terme  $u_0$  et de raison  $q$ , avec  $q$  différent de 1 et de 0.

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{u_0 - u_0 \times q^{n+1}}{1 - q}$$

On peut aussi écrire :

$$S = \frac{\text{premier terme} - q \times \text{dernier terme}}{1 - q} = \frac{1^{\text{er}} \text{ terme} - 1^{\text{er}} \text{ terme} \times q^{\text{nbre de termes}}}{1 - q}$$

**Exemple 6.9**

Calculer  $S = 3 + 9 + 27 + 81 + \dots + 2187$  :

$S$  est la somme des 7 premiers termes d'une suite géométrique  $u$  de premier terme  $u_0 = 3$  et de raison  $q = 3$ . Donc :

$$S = 3 \times \frac{1 - 3^7}{1 - 3} = 3 \times 1093 = 3279$$