Chapitre 4

Dérivation

4.1 Taux de variation

Dans cette partie, f est une fonction numérique définie sur un intervalle I, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère. a et x sont deux réels distincts de I. On note h le réel tel que $x = a + h$.

4.1.1 Taux de variation

Définition 4.1
Le *taux de variation* de la fonction f entre a et x est le quotient :

$$t = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \text{ où } x = a + h$$

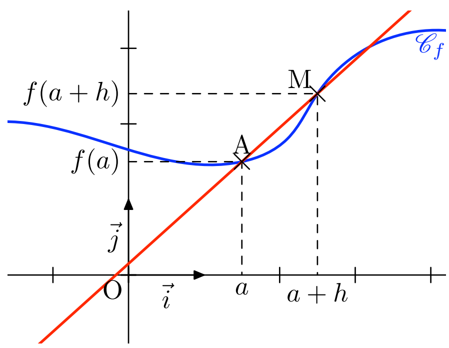
Exemple 4.1
Pour f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2$, le taux de variation de f entre a et $a + h$ est :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = 2a + h$$

Exercice 4.1
Pour f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x + 1$, calculer le taux de variation de f entre a et $a + h$.

4.1.2 Interprétation graphique

On note A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a, et M celui d'abscisse $x = a + h$.
Le taux de variation de la fonction f entre a et x, $\left(t = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$ est le coefficient directeur de la droite (AM).



4.2 Nombre dérivé

f est une fonction numérique définie sur un intervalle I, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère. a et x sont deux réels distincts de I. On note h le réel tel que $x = a + h$.

4.2.1 Nombre dérivé

Définition 4.2
Lorsque h se rapproche de plus en plus de 0 (soit quand x se rapproche de a), si le taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ devient de plus en plus proche d'un nombre réel l fixe, on dit que la limite lorsque h tend vers 0 de ce taux de variation vaut l. On note :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$$

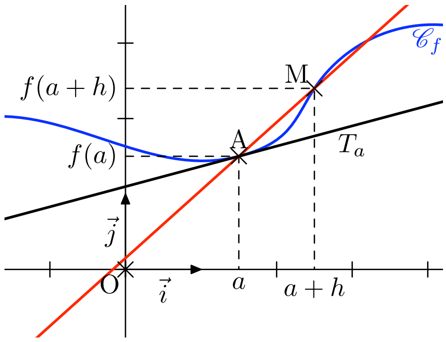
Dans ce cas, on dit que f *est dérivable en* a, et l est alors appelé *le nombre dérivé* de f en a. Ce nombre dérivé est noté $f'(a)$. Ainsi on a :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \text{ lorsque cette limite existe.}$$

Définition 4.3
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est dérivable en tout $a \in I$, on dit que f est dérivable sur l'intervalle I.

4.2.2 Interprétation graphique

Lorsque h se rapproche de 0, le point M se rapproche de A, et la droite (AM) se rapproche de la *tangente* à $\mathscr{C}$ au point A.
Ainsi, $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a.



4.2.3 Interprétation cinématique

On considère un objet en mouvement. On note t la durée en secondes de son parcours, et $f(t)$ la distance en mètres, parcourue après t secondes.
Le taux de variation de f entre deux instants t_1 et t_2 : $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$ est la vitesse moyenne de l'objet entre les instants t_1 et t_2.

Définition 4.4
Dans ces conditions, la limite quand t_2 se rapproche de t_1 du taux de variation (c'est à dire le nombre dérivé de f en t_1) est appelée *vitesse instantanée* de l'objet à l'instant t_1.

Exemple 4.2
On lache un objet en chute libre. On note x la distance parcourue (en m) après t secondes. On admet que la distance parcourue s'exprime en fonction du temps de parcours par $x(t) = 4{,}9t^2$. Calculer la vitesse instantanée de l'objet après une chute de t secondes.

On exprime le taux de variation de x entre les instants t et $t+h$:

$$v_M = \frac{x(t+h)-x(t)}{h} = \frac{4{,}9(t+h)^2-4{,}9t^2}{h} = \frac{4{,}9(t^2+2th+h^2)-4{,}9t^2}{h} = \frac{9,8th+4{,}9h^2}{h}$$

Ainsi, pour $h \neq 0$, on a : $v_M = 9,8t + 4{,}9h$.
Lorsque h se rapproche de 0, le nombre $4{,}9h$ est proche de 0 aussi et donc ce taux de variation (qui est la vitesse moyenne de l'objet entre les instants t et $t+h$) se rapproche de $9{,}8t$:

$$\lim_{h\to 0}(9{,}8t + 4{,}9h) = 9,8t$$

Donc la vitesse instantanée de l'objet en chute libre est donnée par l'expression :

$$v_I(t) = x'(t) = 9{,}8t$$

Après 5 secondes de chute libre, la vitesse est de $9{,}8 \times 5 = 49$ m/s. (Soit 179,4 km/h).

4.2.4 Approximation affine

Exemple 4.3
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x$. Il n'est pas trop difficile de calculer mentalement les images par f de 1, 3, -2 etc.... Par contre, si on souhaite calculer $f(0{,}98)$ ou $f(1{,}01)$ c'est plus difficile.
On exprime $f(1+h) = (1+h)^3 - 2(1+h) = -1 + h + 3h^2 + h^3$.
Si h est proche de 0, le réel $3h^2 + h^3$ sera aussi proche de 0, et donc $f(1+h)$ est voisin de $-1+h$. On dit que $-1+h$ est une approximation affine de f au voisinage de 1.
Ainsi, on a $f(0{,}98) = f(1+(-0{,}02)) \approx -1 + (-0{,}02) = -1{,}02$
et $f(1{,}01) \approx -0{,}99$.

Propriété 4.1 (Généralisation)
Si f est une fonction dérivable en a et h un réel « proche » de 0, alors :

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a) \times h$$

4.3 Fonction dérivée

4.3.1 Fonction dérivée

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. On a vu que pour $a \in I$, $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et on l'a appelé « nombre dérivé de f en a » et noté $f'(a)$.

Définition 4.5
Soit f une fonction dérivable en tout point x d'un intervalle I, alors la fonction qui à x associe $f'(x)$ est appelée *fonction dérivée* de f sur I. On la note f'.

4.3.2 Dérivées des fonctions usuelles

Fonction constante

Soit $k \in \mathbf{R}$ et $f : x \mapsto k$, pour $x \in \mathbf{R}$.
pour $h \neq 0$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{k-k}{h} = 0$. Donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = 0$.
La dérivée d'une fonction constante est la fonction nulle.

la fonction $x \mapsto x^n, n \in \mathbf{N}^*$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^n$. Alors, pour $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = nx^{n-1}$.

Exemple 4.4
$f(x) = x^3$. Alors $f'(x) = 3x^2$.

Fonction inverse

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. Alors, pour $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Fonction racine carrée

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$. Alors, pour $x > 0$, (Attention, f n'est pas dérivable en 0) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

4.4 Opérations sur les fonctions dérivables

4.4.1 Dérivée d'une somme

Propriété 4.2
Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Alors la fonction $f + g$ est dérivable sur I et pour $x \in I$, $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Exemple 4.5
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 + 3$. f est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$, et pour $x \in \mathbf{R}$, on a : $f'(x) = 3x^2 + 2x$

4.4.2 Produit par un réel

Propriété 4.3
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, et λ un réel quelconque. Alors, la fonction $\lambda f : x \mapsto \lambda f(x)$ est dérivable sur I et pour $x \in I$, $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$.

Exemple 4.6
Soit f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 2x^2$, et g définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = 4x^3 - 2x$.
Alors, $f'(x) = 2 \times 2x$ et $g'(x) = 4 \times 3x^2 - 2$.

4.4.3 Dérivée d'un produit

Propriété 4.4
Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = u(x)v(x)$. Alors, f est dérivable sur I et pour $x \in I$, $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. On note $f' = u'v + uv'$.

Exemple 4.7
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f(x) = x^3\sqrt{x}$.
f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables : f s'écrit $u \times v$ avec $\begin{cases} u(x) = x^3 \\ v(x) = \sqrt{x} \end{cases}$,
où u est dérivable sur $\mathbf{R}$ et v dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$.

On a donc : $\begin{cases} u'(x) = 3x^2 \\ v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$.
Avec ces notations, on a $f' = u'v + uv'$ donc :

$$\text{Pour } x > 0,\ f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (3x^2)\sqrt{x} + x^3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 3x^2\sqrt{x} + \frac{x^3}{2\sqrt{x}}.$$

4.4.4 Dérivée d'un quotient

Propriété 4.5
Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, avec $v(x) \neq 0$ pour $x \in I$. Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Alors, f est dérivable sur I et pour $x \in I$, $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$. On note $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Exemple 4.8
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$, par $f(x) = \frac{3x-4}{x^2+3}$.
f est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas.
On a $f = \frac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = 3x - 4 \\ v(x) = x^2 + 3 \end{cases}$, et $\begin{cases} u'(x) = 3 \\ v'(x) = 2x \end{cases}$.
Et ainsi avec $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, on obtient pour $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = \frac{3\times(x^2+3)-(3x-4)\times(2x)}{(x^2+3)^2} = \frac{-3x^2+8x+9}{(x^2+3)^2}$.

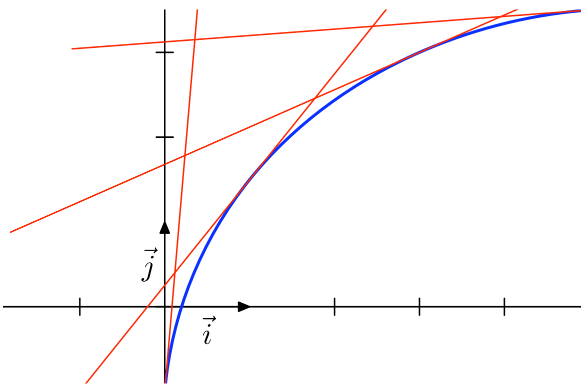
4.5 Fonction dérivée et sens de variation

4.5.1 Variations d'une fonction affine

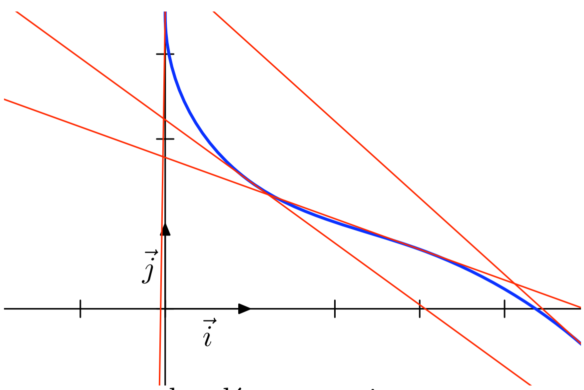
La tangente à une courbe en un point est une droite qui représente une fonction affine. Si le coefficient directeur de la droite est positif, alors la fonction affine associée est croissante ; si le coefficient directeur de la droite est négatif, alors la fonction affine associée est décroissante.

Interprétation graphique :

Sur la figure ci-dessous, toutes les tangentes à $\mathscr{C}$ ont un coefficient directeur positif ; les nombres dérivés de f sont positifs. Les tangentes « montent », et donc la courbe $\mathscr{C}$ aussi : la fonction f est croissante.



Sur la figure ci-dessous, toutes les tangentes à $\mathscr{C}$ ont un coefficient directeur négatif ; les nombres dérivés de f sont négatifs. Les tangentes « descendent », et donc la courbe $\mathscr{C}$ aussi : la fonction f est décroissante.



Attention, ces résultats ne sont que des conjectures et non pas des démonstrations.

4.5.2 Théorèmes

Théorème 4.1 (admis)
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
– Si f' est *positive* sur I, alors f est *croissante* sur I.
– Si f' est *négative* sur I, alors f est *décroissante* sur I.
– Si f' est *nulle* sur I, alors f est *constante* sur I.

Théorème 4.2
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a; b]$. Si f' est strictement positive (resp. négative) sur $]a; b[$, alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur $[a; b]$.

Exemple 4.9
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x + 1$.

1. Calculer la dérivée de f.
2. Étudier le signe de f' sur $\mathbf{R}$.
3. Dresser le tableau de variation de f.

1. f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour $x \in \mathbf{R}$, on a : $f'(x) = 2x - 6$.
2. $2x - 6 > 0$ si et seulement si $x > 3$. On obtient donc le tableau suivant :
3.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	-8	$\nearrow$	

$$f(3) = 3^2 - 6 \times 3 + 1 = 9 - 18 + 1 = -8$$

Exemple 4.10
Soit f la fonction définie sur $\mathscr{D} = [-5\,; -1[\cup]-1\,; 3]$ par $f(x) = \frac{2x+5}{x+1}$.

1. Déterminer f' la dérivée de f sur $\mathscr{D}$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathscr{D}$.
4. Calculer les coordonnées des points A et B de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives -2 et 0.
5. Calculer le coefficient directeur des tangentes T_A et T_B à $\mathscr{C}_f$ aux points A et B.
6. Tracer T_A, T_B et $\mathscr{C}_f$ dans un repère.