Chapitre 3

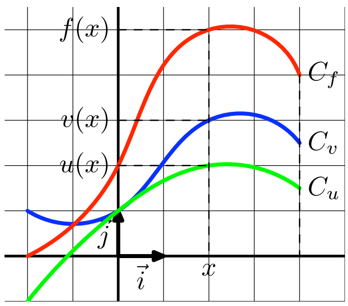
Variations d'une fonction. Dérivation

3.1 Variations et opérations

3.1.1 Somme

Théorème 3.1
Soit u et v deux fonctions définies sur un même intervalle I.
- Si u et v sont croissantes sur I, alors $u+v$ est croissante sur I.
- Si u et v sont décroissantes sur I, alors $u+v$ est décroissante sur I.

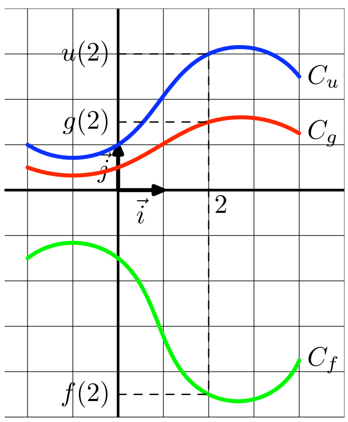
Exemple 3.1
En reprenant la figure de l'exemple 2.1, sur l'intervalle $[0;2]$, u et v sont croissantes, et f l'est aussi. Sur l'intervalle $[3;4]$, u et v sont décroissantes et f l'est aussi.



3.1.2 Produit par un réel

Théorème 3.2
Soit k un réel non nul et f une fonction définie sur I.
- Si $k>0$, alors les fonctions f et kf ont les mêmes variations.
- Si $k<0$, alors les fonctions f et kf ont des variations de sens contraire.

Exemple 3.2
Dans l'exemple 2.2, sur l'intervalle $[0;2]$, u est croissante.
- la fonction f est le produit de u par $-1{,}5<0$: elle est décroissante sur $[0;2]$.
- la fonction g est le produit de u par $0{,}5>0$: elle est croissante sur $[0;2]$.



3.1.3 Variations d'une fonction composée

Théorème 3.3
Soit u et g deux fonctions telles que $g \circ u$ soit définie sur I avec u et g monotones sur leur ensemble de définition.
– Si u et g ont le même sens de variation, alors $g \circ u$ est croissante sur I.
– Si u et g ont des variations de sens contraires alors $g \circ u$ est décroissante sur I.

Démonstration :
si u et g sont croissantes.
soit a et b dans I avec $a < b$.
u est croissante donc $u(a) < u(b)$.
g est croissante donc $g(u(a)) < g(u(b))$.
Donc $g \circ u$ est croissante.

si u et g sont décroissantes.
soit a et b dans I avec $a < b$.
u est décroissante donc $u(a) > u(b)$.
g est décroissante donc $g(u(a)) < g(u(b))$.
Donc $g \circ u$ est croissante.

si u est croissante et g décroissante.
soit a et b dans I avec $a < b$.
u est croissante donc $u(a) < u(b)$.
g est décroissante donc $g(u(a)) > g(u(b))$.
Donc $g \circ u$ est décroissante.

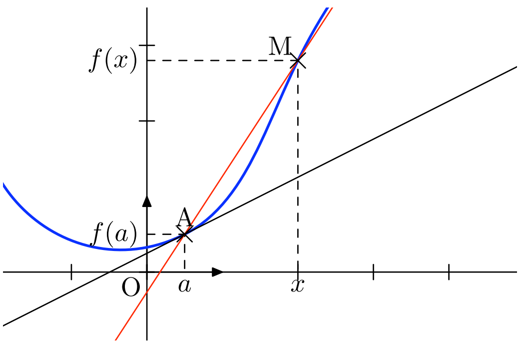
3.2 Dérivation

3.2.1 Théorème fondamental

Définition 3.1
Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$. On dit que f est *dérivable* en a si la limite lorsque x tend vers a du quotient $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est finie. Cette limite est appelée *nombre dérivé* de f en a qu'on note $f(a)$.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \text{ lorsque cette limite existe.}$$

Si f est dérivable pour tout a de I, on dit que f est dérivable sur I.
Grpahiquement le nombre dérivé de f en a est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.



Conséquence :
Soit f une fonction numérique définie et dérivable sur un intervalle I. Soit $a \in I$. La tangente T_a à la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour équation :

$$T_a : y = f'(a)\,(x - a) + f(a)$$

Exemple 3.3
Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Déterminons l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 2 :

On a : $f'(x) = 2x - 3$, donc $f'(2) = 2 \times 2 - 3 = 1$. De plus, $f(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 1 = -1$. Donc la tangente T_2 à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 a pour équation :

$$T_2 : y = 1 \times (x - 2) + (-1) \text{ c'est à dire : } T_a : y = x - 3$$

Théorème 3.4 (admis)
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
- Si $f'(x) > 0$ sur I, alors f est croissante sur I.
- Si $f'(x) < 0$ sur I, alors f est décroissante sur I.
- Si $f'(x) = 0$ sur I, alors f est constante sur I.

3.2.2 Quelques formules de dérivées

Dans la suite de ce formulaire, k est un réel quelconque fixé et n est un entier naturel non nul.

Fonction f	Dérivée f'	Ensemble de dérivabilité de f
$x \mapsto k$	$x \mapsto 0$	$\mathbf{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	$\mathbf{R}$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto 2x$	$\mathbf{R}$
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbf{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbf{R}_+^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbf{R}^*$

- Si f est dérivable sur I, alors, kf est dérivable sur I, et $(kf)' = kf'$.
- Si u et v sont dérivables sur I, alors $u + v$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$.
- Si u et v sont dérivables sur I, alors uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.
- Si u et v sont dérivables sur I, avec pour $x \in I, v(x) \neq 0$, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

3.2.3 Extremum

Théorème 3.5
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, et $c \in I$.
Si la dérivée de f s'annule en c en changeant de signe, alors f admet un extremum en c.

x	$-\infty$		c		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$f(c)$	$\searrow$	

f admet un maximum en c.

x	$-\infty$		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$	

f admet un minimum en c.

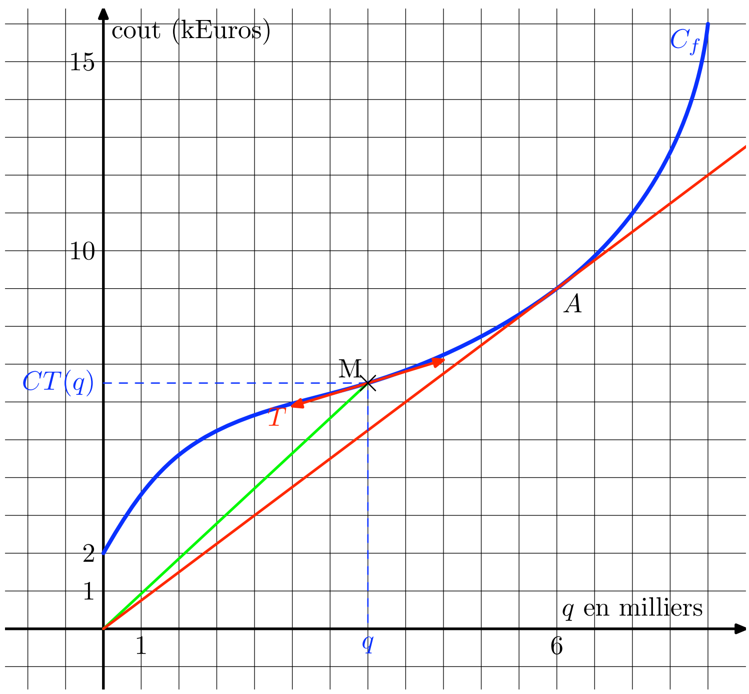
3.2.4 Un exemple : fonction de coût

Le coût total de production d'un bien en quantité q est la somme des coûts de fabrication. La fonction de coût total de production est toujours croissante.

On note $CT(q)$ le coût total de production pour une quantité q de biens produite. En notant $\mathscr{C}_f$ la courbe représentant la fonction de coût total, $CT(q)$ est l'ordonnée du point de $\mathscr{C}_f$ qui a pour abscisse q.
Les coûts fixes sont les coûts lorsque la quantité produite est nulle : il s'agit de $CT(0)$.
Le coût moyen est le quotient du coût total par la quantité produite : $CM(q) = \frac{CT(q)}{q}$.
Le coût marginal qui est le coût de la dernière unité produite est assimilé à la dérivée du coût total : $C_m(q) = CT'(q)$.
Lectures graphiques :
Sur la figure ci-après, on a tracé une courbe $\mathscr{C}_f$ de coût total. M est un point de cette courbe. L'abscisse de M est une quantité produite q ; son ordonnée est le coût total correspondant à cette quantité produite.
La pente de la droite (OM), c'est à dire son coefficient directeur, est le coût moyen pour la quantité q produite. On peut dresser facilement le tableau de variation de la fonction CM : coût moyen de production. En partant de l'abscisse 0, la pente de la droite (OM) décroit jusqu'à $x = 6$ (en effet la droite est de plus en plus « horizontale »), puis la pente de la droite augmente (la droite est de plus en plus « verticale »).

q	0		6		8
$C_M(q)$	‖	↘	1,5	↗	2

La pente de la droite T, tangente à la courbe en M, est le coût marginal.



3.2.5 Dérivée d'une fonction composée

Théorème 3.6
Soit u et g deux fonctions telles que $f = g \circ u$ existe sur un intervalle I.
Si u est dérivable en x_0 et si g est dérivable en $y_0 = u(x_0)$, alors f est dérivable en x_0 et on a :

$$f'(x_0) = g'(u(x_0)) \times u'(x_0)$$

En généralisant à tout x_0 de I, on obtient : si u et g sont dérivables sur leurs ensembles de définition respectifs, alors f est dérivable sur I et on a :

$$(g \circ u)' = g'(u) \times u'$$

Exemple 3.4
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = (2x+3)^3$. Cette fonction est la composée de g définie par $g(x) = x^3$ et de u définie par $u(x) = 2x + 3$: $f(x) = g(u(x))$.
u et g sont dérivables sur $\mathbf{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbf{R}$. On a :

$$\text{pour } x \in \mathbf{R}, g'(x) = 3x^2 \text{ et } u'(x) = 2$$

$$\text{Et donc, } f'(x) = g'(u(x)) \times u'(x) = 3(2x+3)^2 \times 2 = 6(2x+3)^2$$

Application : des nouvelles formules de dérivées.
Si f est une fonction qui s'écrit sous la forme $f = u^n$ où $n \in \mathbf{N}^*$, alors $f' = n \times f^{n-1} \times f'$. ($u$ étant une fonction dérivable)
Si f est une fonction qui s'écrit sous la forme $f = \sqrt{u}$, alors $f' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$. ($u$ étant une fonction dérivable strictement positive)
Si f est une fonction qui s'écrit sous la forme $f = \frac{1}{u}$, alors $f' = -\frac{u'}{u^2}$. (u étant une fonction dérivable qui ne s'annule pas)

3.3 Complément : asymptotes

3.3.1 Asymptote horizontale

Définition 3.2
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle du type $[A\,;+\infty[$ (resp. $]-\infty\,;A]$), et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
On dit que la droite d d'équation $y = b$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \quad \left(\text{resp. } \lim_{x\to-\infty} f(x) = b\right)$$

Exemple 3.5
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \frac{2x^2-3x+1}{3x^2+1}$. On a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}$$

Donc la droite d'équation $y = \frac{2}{3}$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$. (Elle l'est aussi en $-\infty$).

3.3.2 Asymptote verticale

Définition 3.3
Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]a\,;b]$, avec a valeur interdite, et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
On dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$ si :

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

Exemple 3.6
Soit f la fonction définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x-1}$. On a :

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$$

Donc la droite d'équation $x=1$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$

3.3.3 Asymptote oblique

Définition 3.4
Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[A\,;\,+\infty[$ (resp. $]-\infty\,;\,A]$), et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
On dit que la droite d d'équation $y=ax+b$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0 \qquad \left(\text{resp. } \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0\right)$$

Remarque 3.1 (Positions relatives)
Si $f(x)-(ax+b)>0$ alors $\mathscr{C}_f$ est au dessus de d et si $f(x)-(ax+b)<0$ alors $\mathscr{C}_f$ est en dessous de d.

Exemple 3.7
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x)=2x-1+\frac{1}{x+1}$. On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-1)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x-1+\frac{1}{x+1}-(2x-1)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$$

Donc la droite d d'équation $y=2x+1$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

Étudions la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à d :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
signe de $f(x)-(2x+1)$	-	0	+
position de $\mathscr{C}_f$ % d	$\mathscr{C}_f$ en dessous de d	|	$\mathscr{C}_f$ au dessus de d