

Pour certains des exercices qui suivent il peut être intéressant d'effectuer des calculs en s'aidant d'un tableur pour tester les résultats sur un grand nombre de valeurs possibles de n .
(Comme par exemple dans l'exercice 6)

Exercice 1.

1. Proposer des entiers naturels non nuls a , b et c tels que a divise bc mais a ne divise ni b ni c .
2. Montrer que la somme de cinq entiers consécutifs est divisible par 5.
3. Est-ce que la somme de quatre entiers consécutifs est divisible par 4 ?

Exercice 2.

Soit n un entier naturel non nul. L'objectif de cet exercice est de montrer que si l'entier a divise $n + 2$ et $3n - 1$, alors a divise 7.

1. Énoncer la propriété permettant de justifier que a divise $3 \times (n + 1) + (-1) \times (3n - 1)$.
2. Développer et réduire $3 \times (n + 1) + (-1) \times (3n - 1)$.
3. Conclure.

Exercice 3.

1. Utiliser une méthode analogue à celle de l'exercice 2 pour montrer que pour tout entier naturel n , si l'entier a divise $2n + 5$ et $3n + 1$ alors a divise 13.
2. Soit n un entier naturel tel que $n > 3$. Utiliser une méthode analogue à celle de l'exercice 2 pour déterminer les entiers a tels que a divise $n - 3$ et a divise $2n + 1$.

Exercice 4.

L'objectif de cet exercice est de déterminer pour quelle(s) valeur(s) de l'entier naturel n , le nombre $14n + 8$ est-il divisible par $3n + 5$.

1. Expliquer pourquoi $3n + 5$ divise $14n + 8$ et $3n + 5$.
2. En déduire que $3n + 5$ divise $14 \times (3n + 5) + (-3) \times (14n + 8)$.
3. Développer et réduire $14 \times (3n + 5) + (-3) \times (14n + 8)$.
4. Écrire la liste des diviseurs de 46. Expliquer pourquoi $3n + 5$ est forcément un de ces nombres.
5. Résoudre dans \mathbf{N} les équations $3n + 5 = d_i$ où les « d_i » sont les diviseurs de 46.
6. Conclure.

Exercice 5.

Utiliser une méthode analogue à celle de l'exercice 4 pour répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer les entiers n tels que $n - 1$ divise $n + 17$.
2. Déterminer les entiers n tels que $n - 4$ divise $3n + 24$.
3. Déterminer les entiers n tels que $5n + 7$ divise $2n + 16$.

Exercice 6.

Soit n un entier naturel non nul. Quel est le reste de la division euclidienne de $(n + 2)^2$ par $n + 4$?
Même question pour la division euclidienne de $7n + 16$ par $2n + 3$.

Pour la première question, on peut créer une feuille de calcul en indiquant dans la colonne A l'entier n , dans la colonne B l'entier $(n + 2)^2$, dans la colonne C l'entier $n + 4$ et enfin dans la colonne D le reste de la division euclidienne¹ de $(n + 2)^2$ par $n + 4$.

¹Dans le tableur on obtient le reste de la division euclidienne de la cellule B2 par la cellule C2 grâce à la commande MOD(B2;C2)

Exercice 7.

1. Développer $(n + 3)(3n^2 - 9n + 16)$ où $n \in \mathbf{N}$.
2. En déduire que pour tout n , $3n^3 - 11n + 48$ est divisible par $n + 3$.

Exercice 8.

Soit n un entier naturel. On pose $A = n(n^2 + 5)$.

1. On remarque que n peut s'écrire sous une des trois formes $n = 3k$, $n = 3k + 1$ ou $n = 3k + 2$ avec $k \in \mathbf{N}$.
 - a. Montrer que si $n = 3k$ alors A est divisible par 3.
 - b. Que peut-on conclure si $n = 3k + 1$? Si $n = 3k + 2$?
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$ l'entier A est divisible par A .

Exercice 9.

Soit n un entier naturel. On appelle *diviseur strict* de n un diviseur de n strictement inférieur à n .

1. Deux nombres sont dits *amiables* si la somme des diviseurs stricts de chacun d'eux est égal à l'autre. Montrer que 220 et 284 sont des nombres amiables. Qu'en est-il de 60 et 100?
2. Un nombre est dit *parfait* si la somme de ses diviseurs stricts est égale à lui-même. Trouver le seul nombre parfait compris entre 1 et 10. Même question entre 25 et 30.

Exercice 10.

1. Existe-t-il un entier naturel x tel que $65 + x^2$ soit le carré d'un entier n ?
2. Résoudre l'équation suivante : $x^2 = 4y^2 + 3$ avec x et y entiers naturels.

Exercice 11.

Déterminer le pgcd des couples suivants : $(1\ 414; 666)$, $(44\ 350; 20\ 785)$, $(202; 102)$, $(66\ 105; 52\ 884)$, $(n; 3n)$, $(n; n^2)$ où $n \in \mathbf{N}^*$.

Exercice 12.

Peut-on trouver des entiers a et b tels que $a + b = 500$ et $\text{pgcd}(a, b) = 7$?

Exercice 13.

Soit n un entier naturel non nul.

1. Montrer que $\text{pgcd}(n, 2n + 5) = \text{pgcd}(n, 5)$.
2. Déterminer $\text{pgcd}(n, 2n + 5)$ lorsque $n = 5k$.

Exercice 14.

Soit n un entier naturel. On pose $a = 3n + 11$ et $b = n + 6$.

1. Calculer $3b - a$. En déduire que $\text{pgcd}(a, b)$ est un diviseur de 7.
2. Montrer que $\text{pgcd}(a, b) = 7$ si et seulement si 7 divise b .
3. En déduire les n pour lesquels $\text{pgcd}(a, b) = 7$.

Exercice 15.

Déterminer les diviseurs communs à 1 386 et 1 170. Même question pour 6 292 et 5 852 puis pour 1 326 et 1 482.