Chapitre 2

Les systèmes

2.1 Équations de droites

Propriété 2.1
Dans un repère une droite d a une équation du type :

$y = mx + p$ si la droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.

$x = c$ si la droite est parallèle à l'axe des ordonnées.

Cela signifie que si $M \in d$ alors ses coordonnées vérifient l'équation de d et réciproquement les points $M(x; y)$ vérifiant une équation du type $y = mx + p$ ou $x = c$ sont alignés sur une droite d.

Dans le premier cas, m est appelé *coefficient directeur* et p est appelé *ordonnée à l'origine* de la droite.

Exemple 2.1
Pour chacune des équations suivantes, déterminer, s'il existe, le coefficient directeur de la droite :

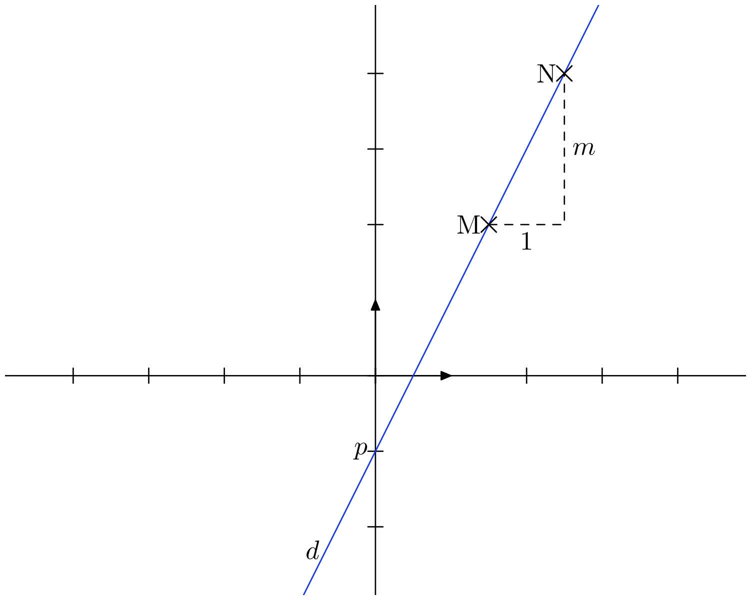
$$5x + y = -2; \qquad 2x - 3y = 1; \qquad \frac{3}{4}x + \frac{1}{3}y - 4 = 0; \qquad 2x + 3y = 1 - 5x + 3y$$

Remarque 2.1
Une équation de droite peut toujours s'écrire sous la forme $ux + vy + w = 0$, avec $(u; v) \neq (0; 0)$.

Propriété 2.2 (Rappel)
Dire que deux droites d'équations respectives $y = m_1x + p_1$ et $y = m_2x + p_2$ sont parallèles équivaut à dire que $m_1 = m_2$.

Propriété 2.3
Dire que deux droites d'équations respectives $u_1x + v_1y + w_1 = 0$ et $u_2x + v_2x + w_2$ sont parallèles équivaut à dire que $u_1v_2 = u_2v_1$.

Interprétation graphique de m et p :
p est l'ordonnée du point d'intersection de d avec l'axe des ordonnées (yy').
m est la différence des ordonnées de deux points M et N de d tels que $x_N = x_M + 1$.



2.2 Système de deux équations à deux inconnues

2.2.1 Définition

Définition 2.1
Un système de deux équations à deux inconnues x et y est un couple d'équations d'inconnues x et y. Une solution du système est un couple de nombres $(x_0; y_0)$ vérifiant les deux équations.

2.2.2 Résolution graphique. Nombre de solutions

Exemple 2.2
On considère le système S_1 : $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -2x + y = -5 \end{cases}$.

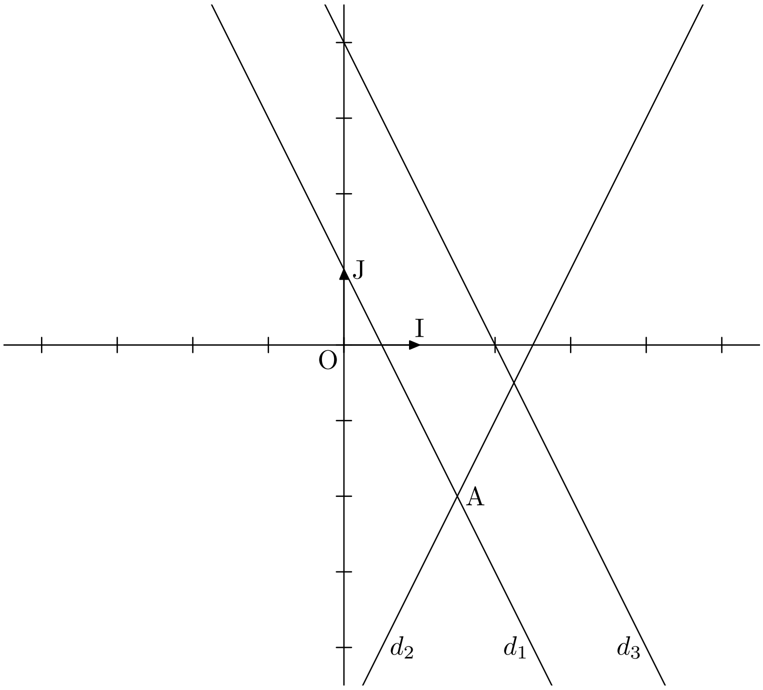
1. Tracer les droites d_1 et d_2 d'équations respectives $2x + y = 1$ et $-2x + y = -5$ dans un repère. Nommer A leur point d'intersection et lire les coordonnées de A.
2. Résoudre le système par le calcul.

Exemple 2.3
On considère le système S_2 : $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -3x - \frac{3}{2}y = -6 \end{cases}$. On note d_3 la droite d'équation $-3x - \frac{3}{2}y = -6$

1. Tracer d_3 dans le même repère que l'exemple 2.2. Que peut-on dire de d_1 et d_3 ?
2. Que peut-on en déduire pour le système S_2 ?

Exemple 2.4
On considère le système S_3 : $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2} \end{cases}$.

1. Écrire chacune des deux équations de S_3 sous la forme $y = mx + p$.
2. Que peut-on en déduire pour le nombre de solutions du système ? Donner plusieurs exemples.



2.3 Méthodes de résolution

2.3.1 Par substitution

Exemple 2.5

Résoudre dans $\mathbf{R}$ le système suivant : $\begin{cases} 4x + y = 7 & (L_1) \\ 3x - 2y = 8 & (L_2) \end{cases}$

Il s'agit d'exprimer une inconnue en fonction de l'autre à l'aide d'une des deux équations et de la remplacer par l'expression obtenue dans l'autre équation :

Avec L_1, on obtient $y = 7 - 4x$. En remplaçant dans L_2, on obtient : $3x - 2(7 - 4x) = 8$. En résolvant cette dernière équation, on obtient $11x = 22$ soit $x = 2$. On calcule alors y : $y = 7 - 4 \times 2 = -1$.

Donc, si le système a une solution elle est égale à $(2; -1)$. Il reste à vérifier que cette solution convient : $4x + y = 4 \times 2 + (-1) = 7$ et $3x - 2y = 3 \times 2 - 2 \times (-1) = 8$.

Donc $\mathscr{S} = \{(2; -1)\}$.

Remarque 2.2

Cette méthode n'est à utiliser[1] que lorsqu'une inconnue s'exprime *très facilement* en fonction de l'autre.

2.3.2 Par combinaisons linéaires

Exemple 2.6

Résoudre par combinaisons linéaires le système suivant : $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 5x + 4y = -3 \end{cases}$

On multiplie la première équation par 5, puis la deuxième par 2 et on soustrait les deux équations membres à membres. Ainsi, si un couple $(x_0; y_0)$ est solution du système, alors y_0 sera solution de cette équation obtenue par soustraction :

[1]et encore . . .

$$(10x - 15y) - (10x + 8y) = 40 - (-6) \text{ soit : } -23y = 46$$

On obtient $y = -2$ et on remplace dans une des deux équations : $2x - 3 \times (-2) = 8$ donc $x = \frac{2}{2} = 1$.

Ainsi, si une solution existe, c'est le couple $(1; -2)$. On vérifie : $\begin{cases} 2 \times 1 - 3 \times (-2) = 2 + 6 = 8 \\ 5 \times 1 + 4 \times (-2) = 5 - 8 = -3 \end{cases}$

Donc la solution du système est $\mathscr{S} = \{(1; -2)\}$.

2.3.3 Méthode de Gauss

Le but de cette méthode est de trouver un système triangulaire *équivalent* au système de départ (c'est à dire ayant le même ensemble solution). Pour cela on va effectuer des combinaisons linéaires sur les lignes du système.

Exemple 2.7

Résoudre le système (S) : $\begin{cases} 3x + 2y - 5z = -25 & (L_1) \\ x + 6y - z = -13 & (L_2) \\ 2x - 4y + 2z = 18 & (L_3) \end{cases}$

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - 5z = -25 & (L_1) \\ -16y - 2z = 14 & (L_1 - 3L_2 \to L_2') \\ 16y - 16z = -104 & (2L_1 - 3L_3 \to L_3') \end{cases}$$

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - 5z = -25 & (L_1) \\ -16y - 2z = 14 & (L_2') \\ -18z = -90 & (L_2' + L_3' \to L_3'') \end{cases}$$

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-25 - 2 \times \frac{3}{2} + 5 \times 5}{3} = 1 \\ y = \frac{14 + 2 \times 5}{-16} = -\frac{3}{2} \\ z = \frac{-90}{-18} = 5 \end{cases}$$

La solution du système est $\mathscr{S} = (1; -\frac{3}{2}; 5)$. (Contrairement aux deux méthodes précédentes, la vérification n'est pas nécessaire puisqu'on a procédé tout au long de la résolution par équivalences.)

2.4 Système d'inéquations

2.4.1 Inéquation à deux inconnues

Propriété 2.4

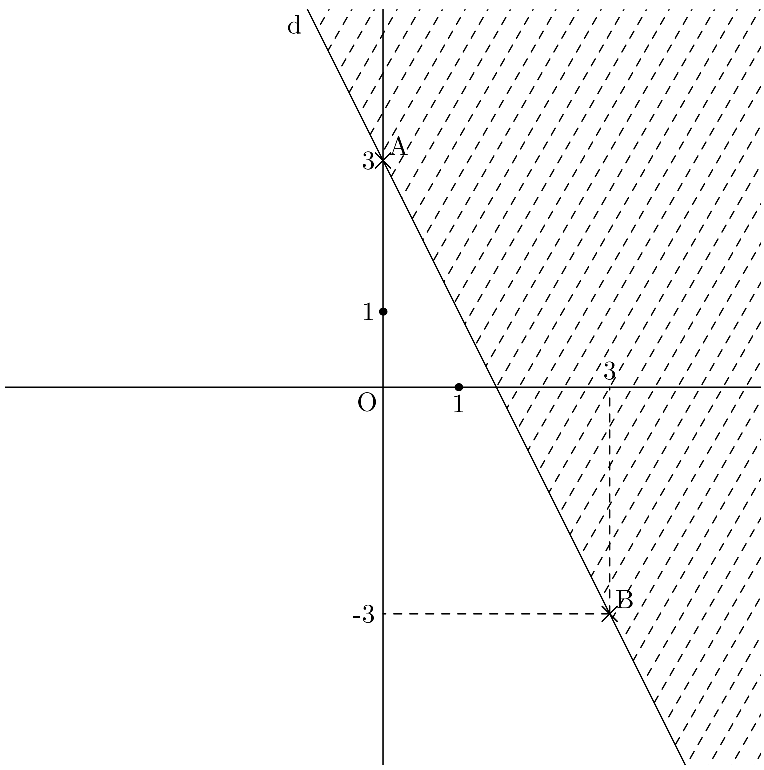
Les solutions d'une inéquation à deux inconnues x et y du type $ux + vy + w < 0$ sont les coordonnées des points appartenant à l'un des deux demi-plans délimités par la droite d'équation $ux + vy + w = 0$.

Exemple 2.8

On considère l'inéquation à deux inconnues x et y suivante : $2x + y - 3 \leq 0$. On trace la droite d d'équation $2x + y - 3 = 0$: d passe par les points $A(0, 3)$ et $B(3; -3)$.

Puisque graphiquement, la solution correspond à un demi-plan délimité par d, il suffit de vérifier si les coordonnées de O, l'origine du repère, vérifient l'inéquation. Dans ce cas O ferait partie du demi-plan solution ; dans le cas contraire, le demi-plan solution serait celui ne contenant pas O.

Pour $x = y = 0$, on a : $2x + y - 3 = -3$ et $-3 \leq 0$ donc le demi-plan solution est le demi-plan contenant le point O : on hachure l'autre demi-plan. De plus l'inégalité est *large* ($\leq$ ou $\geq$) donc la droite d fait partie de la solution. Dans le cas d'une inégalité *stricte* ($<$ ou $>$) la droite ne fait pas partie de la solution.



2.4.2 Système d'inéquations

Pour résoudre un système d'inéquations à deux inconnues, on trace les droites correspondant à chaque inéquation, pour chacune d'elles, on hachure le demi-plan qui ne convient pas. La solution du système correspond donc graphiquement aux points du plan qui ne sont pas hachurés du tout.

Exemple 2.9

On considère le système S : $\begin{cases} 2x + y - 3 \leq 0 \\ x - y + 2 \geq 0 \\ x > -3 \\ y > -4 \end{cases}$

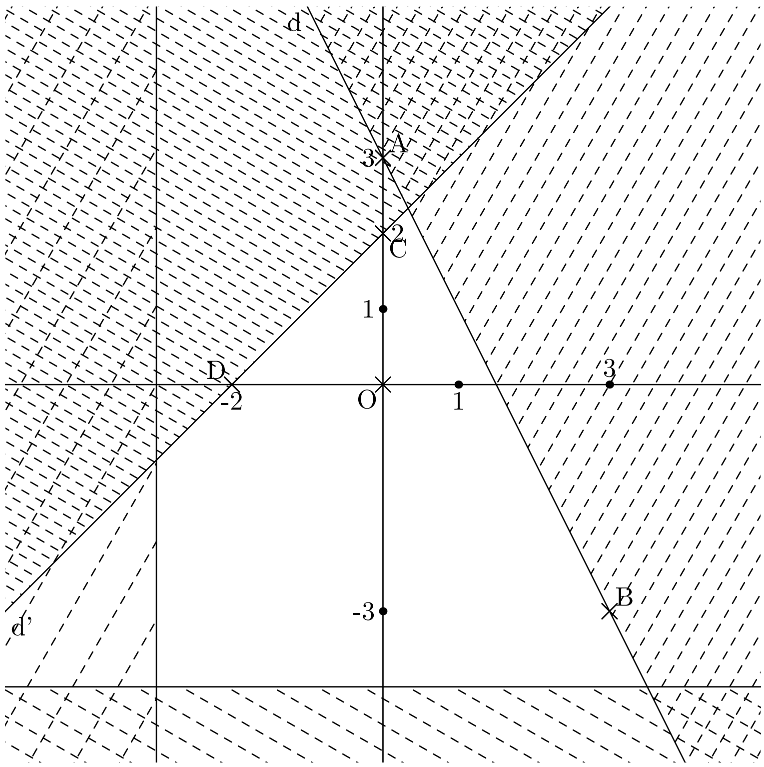
La première inéquation a déjà été résolue dans l'exemple 2.8 : il s'agit du demi plan contenant O et délimité par d d'équation $2x + y - 3 = 0$.

On trace donc d' d'équation $x - y + 2 = 0$: elle passe par $C(0; 2)$ et par $D(-2; 0)$. On teste si les coordonnées de O vérifient l'inéquation correspondante : $x - y + 2 = 0 - 0 + 2 = 2 \geq 0$. Donc on hachure le demi-plan délimité par d' qui ne contient pas O.

On trace ensuite Δ d'équation $x = -3$ et on hachure le demi-plan situé à gauche de Δ.

On trace enfin Δ' d'équation $y = -4$ et on hachure le demi-plan inférieur à Δ'.

La solution de notre système correspond donc à l'intérieur du quadrilatère resté non hachuré, les frontières d et d' étant incluses, et les frontières Δ et Δ' étant exclues.



2.5 Programmation linéaire

Exemple 2.10
Une entreprise fabrique deux types de produits notés A et B en utilisant la même matière première et deux machines : M_1 et M_2.
Pour fabriquer le produit A, on a besoin de 6 kg de matière première et il faut utiliser M_1 pendant deux heures et M_2 pendant deux heures.
Pour fabriquer le produit B, on a besoin de 2 kg de matière première et il faut utiliser M_1 pendant deux heures et M_2 pendant quatre heures.
Les machines M_1 et M_2 ne sont respectivement disponibles que pendant 120 et 180 heures. La matière première à utiliser est limitée à 300 kg.
Le bénéfice b réalisé est de 400 € pour le produit A et de 200 € pour le produit B.
On désigne par x et y les nombres respectifs de produits A et B fabriqués.

1. Montrer que le système vérifié par x et y est le suivant : $\left\{\begin{array}{r} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + y \leq 150 \\ x + y \leq 60 \\ x + 2y \leq 90 \end{array}\right.$
2. Représenter graphiquement le polygone des contraintes.
3. Calculer le bénéfice maximal ainsi que les valeurs de x et y pour l'obtenir.

1. x et y sont des nombres de produits fabriqués, il sont doncs positifs ou nuls.

   La masse de matière première est inférieure ou égale à 300 kg donc $6x + 2y \leq 300$; soit, en divisant les deux membres par 2 ($2 > 0$), on obtient : $3x + y \leq 150$.

   La machine M_1 ne peut fonctionner que 120 heures au total donc : $2x + 2y \leq 120$; soit en divisant par 2 : $x + y \leq 60$.

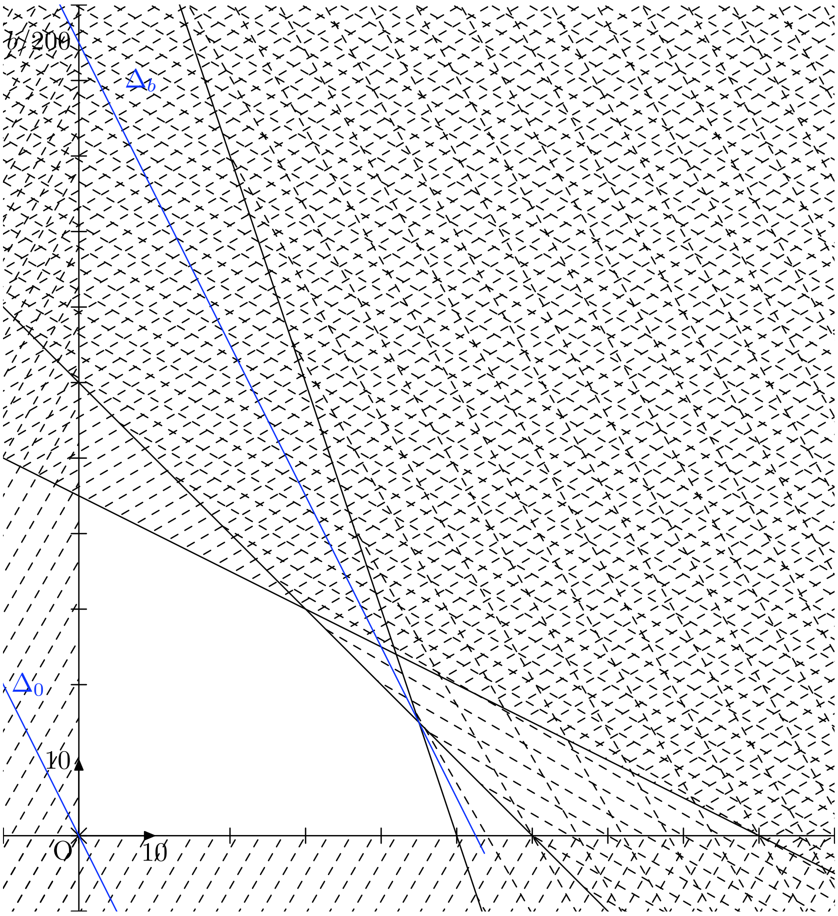
La machine M_2 ne peut fonctionner que 180 heures au total donc : $2x + 4y \leq 180$; soit en divisant par 2 : $x + 2y \leq 90$.

D'où le système annoncé.

2. On trace les droites d'équations respectives :

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad 3x + y = 150, \qquad x + y = 60, \qquad x + 2y = 90$$

On hachure ensuite les demi-plans qui ne sont pas solutions des inéquations correspondantes, et on obtient le graphique ci-dessous :



La solution du système est le polygone non hachuré, frontières comprises.

3. Le bénéfice est $b = 400x + 200y$. En exprimant y, on obtient : $y = -2x + \frac{b}{200}$. Traçons la droite Δ_0 correspondant aux couples $(x; y)$ pour lesquels le bénéfice est de 0 €. Son équation réduite est $y = -2x$.

   On va chercher ensuite la droite Δ_b parallèle à Δ_0 qui a l'ordonnée à l'origine la plus grande possible tout en ayant un point à coordonnées entières en commun avec le domaine solution du système. On obtient la droite d'équation $y = -2x + 105$; Soit un bénéfice de $105 \times 200 = 21000$ €. Ce bénéfice est obtenu pour le couple $(45; 15)$ soit une production de 45 produits A et 15 produits B.