Chapitre 1

Systèmes de numérations

1.1 Comment comptaient-ils ?

1.1.1 Les Égyptiens

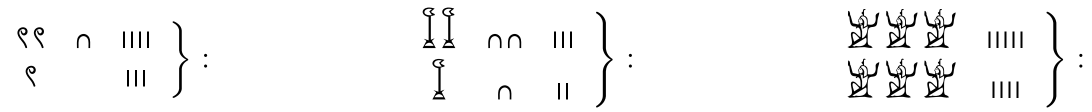
À l'époque des pharaons (3 000 av. J.-C. - 300 av. J.-C.) les scribes égyptiens écrivaient les nombres en utilisant un symbole (hiéroglyphe) pour chacun des nombres 1, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000 et 1 000 000. Chaque symbole était répété autant de fois qu'il y avait de multiples du nombre correspondant : il s'agit d'une numération *additive*.
Pour écrire 300, on écrit trois fois le hiéroglyphe qui correspond à la valeur 100…

Les symboles :

1 :	10 :	100 :	1 000 :
10 000 :	100 000 :	1 000 000 :	

Exemple 1.1
Écrire en numération égyptienne les nombres suivants :
25 : 10 201 : 3 250 000 :

Exemple 1.2
Écrire dans notre système de numération les nombres suivants :



Écriture des fractions :
Les égyptiens n'utilisaient que des fractions[1] de dénominateur 1. Pour écrire l'inverse d'un nombre on le surmontait du symbole :

Exemple 1.3
Écrire en numération égyptienne $\frac{1}{21}$ et $\frac{1}{102}$.

1.1.2 Les Babyloniens

La numération babylonienne est une numération en base 60. Elle a été « couramment » utilisée à partir de 1 800 av. J.-C. soit 3 200 ans après le début de cette civilisation.

[1]Sauf $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$ qui avaient leur propre hiéroglyphe.

Le symbole 𒁹 représente l'unité et est répété jusqu'à neuf fois. Le symbole 𒌋 représente le nombre 10 et est répété jusqu'à cinq fois pour écrire en combinant avec le précédent les nombres jusqu'à 59.
À partir de 60, on utilise les mêmes combinaisons : ainsi 𒁹 𒁹 signifie $1 \times 60 + 1 = 61$ dans notre système. La position d'un même groupe de symboles lui donne donc une valeur différente : il s'agit du premier système de numération positionnel. Il n'y avait cependant pas de symbole pour le zéro mais un espace vierge plus ou moins grand pour séparer les groupes de symboles. Par ailleurs le contexte dans lequel se trouve le nombre aidait à la détermination de l'ordre de grandeur.
On verra sur la figure 1.1 un exemple de tablette d'argile sur laquelle on peut lire différents nombres.

Exemple 1.4
Écrire dans notre système de numération les nombres suivants :
𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹 ; 𒌋𒌋𒁹 𒌋𒁹 ; 𒁹𒁹 𒁹

Exemple 1.5
Écrire en numération babylonienne 7 424.
Il s'agit de décomposer[2] 7 424 en une somme de multiples de 60^2, 60 et 1.

$$7\ 424 = 2 \times 3\ 600 + 224 = 2 \times 60^2 + 3 \times 60 + 44$$

Donc 7 424 s'écrit : 𒁹𒁹 𒁹𒁹𒁹 𒌋𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹

Remarque 1.1
Il nous reste des traces de ce système de numération en base 60 : notre système de lecture des heures où l'heure est divisée en 60 minutes et la minute en 60 secondes.

1.1.3 Les Romains

La numération romaine n'est pas destinée à effectuer des opérations sur les nombres mais à écrire de façon abrégée les nombres. Elle est surtout régie par le principe additif compliquée par la règle selon laquelle *tout signe numérique placé à gauche d'un chiffre de valeur supérieur s'en retranche*. Ainsi 4 s'écrira $5 - 1$ plutôt que $1 + 1 + 1 + 1$. Cette règle permet de ne jamais écrire côte à côte plus de trois symboles identiques.

Les chiffres romains :

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1 000

Pour écrire les très grands nombres, on surmonte d'une barre horizontale les multiples de 1 000 et de deux barres horizontales les multiples de 1 000 000.

Exemple 1.6
2 006 s'écrit **MMVI**.
599 s'écrit **DXCIX**.
17 429 s'écrit $\overline{\mathbf{XVII}}$**CDXXIX**

[2]Voir le paragraphe 1.2.3 page 9 pour les changements de bases.

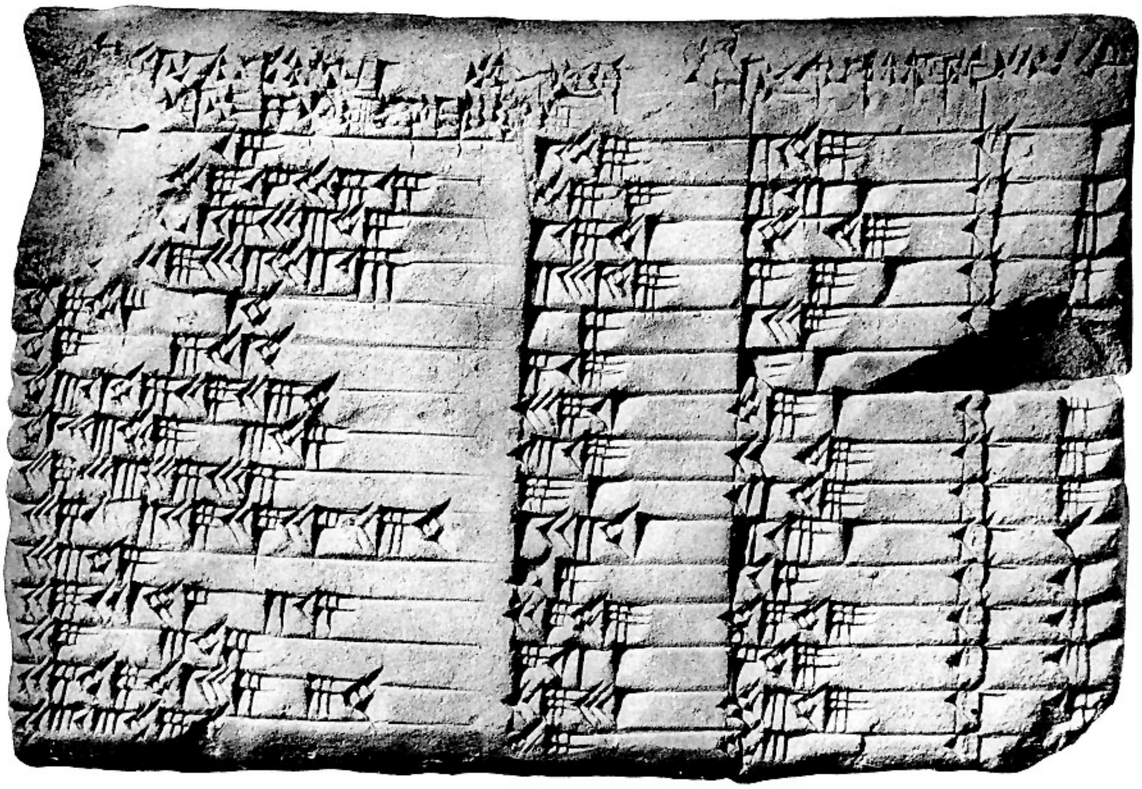


FIG. 1.1 – Tablette Plimpton 322 datant de la période 1 900-1 600 av. J.-C.

Exemple 1.7
1. Écrire tous les nombres de 1 à 20.
2. Écrire les nombres suivants : 85, 749, 29 200, 12 234 700.
3. Lire les nombres suivants : **MCMLXXXV**, **DCCCXLIII**.

1.1.4 Les Grecs

Le système de numération ionique est un système additif à base 10 utilisé dès le V^e siècle av. J.-C. Les grecs ont utilisé leur alphabet pour écrire les nombres. Pour distinguer les nombres des lettres dans un texte, ils les surmontaient d'une barre horizontale. Ici, nous ne le ferons pas pour ne pas alourdir les notations...

Les chiffres grecs :

Unités	1	2	3	4	5	6	7	8	9
En grec	α	β	γ	δ	ϵ	Ϝ	ζ	η	θ
Se lit	alpha	bêta	gamma	delta	epsilon	digamma	dzêta	êta	thêta

Dizaines	10	20	30	40	50	60	70	80	90
En grec	ι	κ	λ	μ	ν	ξ	O	π	Ϙ
Se lit	iota	kappa	lambda	mu	nu	ksi	omicron	pi	koppa

Centaines	100	200	300	400	500	600	700	800	900
En grec	ρ	σ	τ	υ	ϕ	χ	ψ	ω	ϡ
Se lit	rhô	sigma	tau	upsilon	phi	khi	psi	omega	sampi

Le système de numération est un système additif : $\tau\lambda\alpha$ désigne le nombre 331. Pour écrire les multiples de 1 000, on les précédait d'une virgule : $,\tau\lambda\alpha$ désigne le nombre 331 000.

Exemple 1.8
Écrire en numération grecque les nombres suivants : 85, 749, 29 200.

Exemple 1.9
Lire les nombres suivants : $,\delta\,\phi\lambda\eta$; $\tau\nu\epsilon$; $,\nu\,\sigma\theta$.

1.1.5 L'apparition du zéro

La naissance du zéro n'est pas le fruit d'une civilation en particulier mais elle est une création collective de nombreux peuples.

Les premières numérations (égyptiennes, grecques, romaines, ...) permettaient de compter jusqu'à un nombre fini au delà duquel il fallait inventer de nouveaux symboles. L'idée révolutionnaire[3] qui a permis de dépasser ce stade, c'est d'utiliser un petit nombre de symboles, les chiffres, qui ont une valeur différente suivant leur emplacement : ce sont les numérations de *position*. Dans notre système actuel, le chiffre 2 n'a pas la même valeur dans 12 et dans 23.

Les Babyloniens sont les premiers à adopter ce système : le « clou » 𒁹 répété jusqu'à neuf fois permet de compter jusqu'à 9, puis le « chevron » 𒌋 vaut 10 et les deux permettent de compter jusqu'à 59. Puis on reprend le clou qui vaut 60, deux clous valent 120, ... jusqu'à 10 clous remplacés par un chevron valant alors 600.... Ainsi, un clou peut valoir 1, 60, ..., un chevron 10, 600, ...

Ce progrès est décisif : avec deux symboles répétés, on peut écrire n'importe quel nombre à ceci près qu'il peut y avoir des confusions : deux clous peuvent représenter 2 (deux clous valant chacun 1), 61 (un clou valant 60 et l'autre 1), 120 (deux clous valant 60),....

Les Babyloniens se sont contentés de ce système jusqu'au III^{e} siècle av.J.-C. en laissant des espaces vides plus ou moins grands entre les groupes de symboles. Puis est apparu un nouveau symbole : les deux clous en biais[4] signifiant les emplacements vides. Ce nouveau symbole fut le premier zéro de l'histoire de l'humanité.

Les Chinois marquèrent eux[5], à partir du III^{e} siècle de notre ère, les emplacements vides par un point puis par un petit cercle. Quant aux Mayas, il ont utilisé indépendamment des autres civilisations un symbole représentant un coquillage pour marquer ces emplacements vides.

Ces zéros n'ont cependant pas encore la signification actuelle : ils ne servent qu'à marquer un emplacement vide. La dernière étape de la création du zéro est franchie par les Indiens au VII^{e} siècle : le zéro est défini comme un nombre, résultat d'une soustraction d'un nombre par lui-même. Les Indiens décriront également ses propriétés : « lorsque zéro est ajouté ou soustrait à un nombre, celui-ci est inchangé et un nombre multiplié par zéro devient zéro.

Le zéro « actuel » est donc l'invention des Indiens. Il ne sera introduit en occident qu'au XII^{e} siècle.

[3]Trouvée indépendamment par les Babyloniens (1 800 ans av.J.-C.), les Mayas (entre le V^{e} et le XXI^{e} siècle), et peut-être même les Chinois et les Indiens (II^{e} siècle av.J.-C.).

[4]Parfois remplacés par deux petits chevrons superposés.

[5]Sans qu'on sache s'ils ont été inspirés par les Babyloniens.

1.2 Les bases de numération

1.2.1 Écrire les nombres aujourd'hui

Notre système de numération est un système positionnel à base 10 ou décimal. Nos dix chiffres ont une valeur différente suivant leur position dans le nombre.
Parmi les chiffres, le zéro (on l'a vu dans le paragraphe 1.1.5) a une importance particulière, il permet par exemple de distinguer 54 de 504.
Dans un système positionnel binaire (base 2) utilisé en informatique il n'existe que deux chiffres : le 0 et le 1. Les premiers nombres sont alors $\overline{0}^2$, $\overline{1}^2$, $\overline{10}^2$, $\overline{11}^2$, $\overline{100}^2$, … valant respectivement en base 10 : 0, 1, 2, 3, 4, …
Plus généralement, un nombre qui s'écrit $\overline{\dots cba}^B$ en base B vaut $a + b \times B^1 + c \times B^2 + \dots$.

1.2.2 Passage d'une base B à la base 10

Exemple 1.10
Écrire en base 10 les nombres suivants :
$\overline{147}^8 = 1 \times 8^2 + 4 \times 8^1 + 7 \times 8^0 = 103$.
En base 16 on a besoin de 16 « chiffres ». On utilise donc les 10 chiffres habituels, auquels on ajoute A, B, …, F qui correspondent à 10, 11, …, 15.
$\overline{A7D1}^{16} = 10 \times 16^3 + 7 \times 16^2 + 13 \times 16 + 1 = 42\,961$.
$\overline{1\,001}^2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 = 9$.
$\overline{1\,101}^2 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 = 13$.
$\overline{123}^6 = 1 \times 6^2 + 2 \times 6 + 3 = 51$.

```
Entrées :
B;
i;
N = ‾C_i C_{i-1} ... C_1 C_0‾;
M = 0;
début
    tant que i ≥ 0 faire
        M + C_i × B^i → M;
        i − 1 → i;
    Afficher M
fin
```

Algorithme 1 : passage d'une base B à la base 10

1.2.3 Passage de la base 10 à une base B

Exemple 1.11 (passage de la base 10 à la base 4)
Écrire 39 en base 4 :
$39 = 9 \times 4 + 3$. Or $9 = 2 \times 4 + 1$ (Ces égalités sont obtenues par la division euclidienne). On a donc :
$39 = (2 \times 4 + 1) \times 4 + 3 = 2 \times 4^2 + 1 \times 4 + 3$ (en développant)
Ainsi, 39 s'écrit $\overline{213}^4$ en base 4.

Exemple 1.12
Écrire 39 en base 5 :
$39 = 7 \times 5 + 4 = (1 \times 5 + 2) \times 5 + 4 = 1 \times 5^2 + 2 \times 5 + 4 = \overline{124}^5$.

Exemple 1.13
Écrire 39 en base 2 :

$$\begin{aligned}
39 &= 19 \times 2 + 1 \\
&= (9 \times 2 + 1) \times 2 + 1 \\
&= ((4 \times 2 + 1) \times 2 + 1) \times 2 + 1 \\
&= ((2^3 + 1) \times 2 + 1) \times 2 + 1 \\
&= 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\
&= \overline{100111}^2
\end{aligned}$$

Entrées :
N en base 10;
$i = 0$;
début
  tant que $N > 0$ **faire**
    Division euclidienne de N par B :;
    Quotient $\rightarrow Q$;
    Reste $\rightarrow C_i$;
    $i + 1 \rightarrow i$;
    $Q \rightarrow N$;
  Afficher $\overline{C_i C_{i-1} \dots C_1 C_0}$
fin

Algorithme 2 : passage de la base 10 à une base B

Programme en langage CASIO :

```
"BASE 10→BASE B"
"B?":?→B
"N EN BASE 10?":?→N
0→I:0→M
Lbl 0
Int(N÷B)→Q
N-B×Q→R
M+R×10^I→M
Q→N
I+1→I
If N≥B
Then Goto 0
IfEnd
M+N×10^I→M
```

1.2.4 Opérations en base B

Lors d'une addition de deux nombres en base B, si la somme des chiffres des unités est supérieure ou égale à B, on écrit le reste de la soustraction par B et on ajoute 1 (la retenue) à la somme des chiffres des « B-zaines ».
Pour effectuer une multiplication en base B, on commence par écrire la table de multiplication de la base B, puis on procède comme une multiplication habituelle en base 10.

Exemple 1.14
Effectuer les opérations suivantes[6] :

$$\overline{32}^5 + \overline{12}^5 = \overline{44}^5; \qquad \overline{43}^5 + \overline{21}^5 = \overline{114}^5; \qquad \overline{143}^5 + \overline{342}^5 = \overline{1040}^5$$

[6] Au lecteur consciencieux de « poser » les opérations...

$$\overline{4302}^5 - \overline{1201}^5 = \overline{3101}^5; \qquad \overline{2303}^5 - \overline{1402}^5 = \overline{401}^5$$

Exemple 1.15
Écrire la table de multiplication en base 5, puis calculer :

$\times$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

$$\overline{213}^5 \times \overline{3}^5 = \overline{1144}^5; \qquad \overline{321}^5 \times \overline{23}^5 = \overline{13433}^5$$

Exemple 1.16
Quel nombre suit $\overline{4124}^5$? Il s'agit de $\overline{4124}^5 + 1 = \overline{4130}^5$.
Quel nombre précède $\overline{1200}^5$? Il s'agit de $\overline{1200}^5 - 1 = \overline{1144}^5$