Chapitre 1

Équations de droites. Second degré

1.1 Équation de droite

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, une droite d a une équation du type $ax+by+c=0$. Cela signifie que si un point A appartient à la droite d, alors les coordonnées de A vérifient l'équation de la droite ; réciproquement, si un point B a ses coordonnées qui vérifient l'équation de la droite d, alors B appartient à la droite d.

Remarque 1.1
Une même droite a plusieurs équations : si d a pour équation $ax+by+c=0$, alors quelque soit $k \in \mathbf{R}^*$, $(ka)x+(kb)y+(kc)=0$ est aussi une équation de d.

Si $c \neq 0$, (c'est à dire si d ne passe pas par l'origine du repère) on peut donc toujours trouver une équation de d sous la forme $ax+by+1=0$.

Remarque 1.2
Si la droite d n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, alors elle admet une équation du type $y=mx+p$. Cette équation est appelée *équation réduite* de d

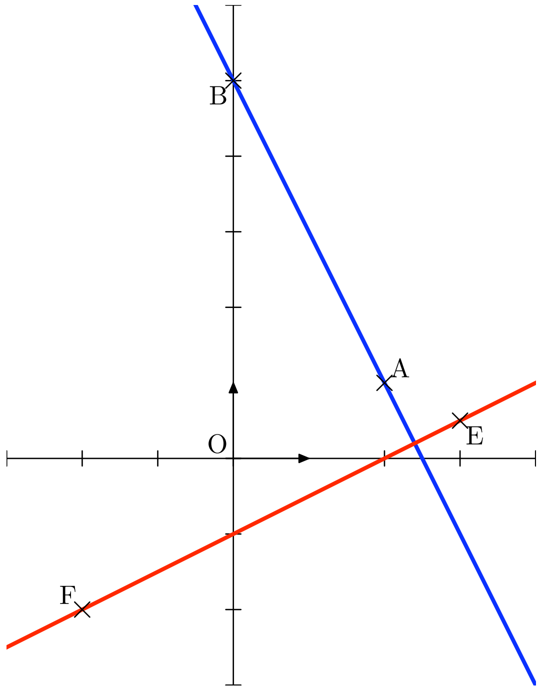
Exemple 1.1
Soit d la droite d'équation $2x+y-5=0$. Pour tracer cette droite dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$:

- on détermine deux points A et B dont les coordonnées vérifient l'équation. Par exemple, en *choisissant*[1] $x_A=2$, on obtient : $4+y-5=0$ soit $y=1$. Donc le point $A(2;1)\in d$. De même, en prenant $x_B=0$, on obtient $y_B=5$ donc le point $B(0;5)\in d$.
- on place les deux points dans le repère et on trace la droite (AB) : c'est la droite d.

Pour déterminer l'équation de la droite (EF) où $E(3;\frac{1}{2})$ et $F(-2;-2)$:

- (EF) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées donc elle admet une équation du type $y=mx+p$. En remplaçant par les coordonnées de E puis de F, on obtient le système : $\begin{cases} \frac{1}{2}=3m+p \\ -2=-2m+p \end{cases}$
- En résolvant on obtient : $m=\frac{1}{2}$ et $p=-1$. La droite (EF) a donc pour équation $y=\frac{1}{2}x-1$.

[1] On aurait pu choisir n'importe quelle autre valeur de x_A.



1.2 Polynôme du second degré

Définition 1.1
On appelle polynôme du second degré de coefficients a, b et c la fonction f définie par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ où } a \in \mathbf{R}^*, b \in \mathbf{R}, c \in \mathbf{R}$$

1.2.1 Résolution d'une équation du second degré

Définition 1.2
Une équation du second degré à une inconnue x est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$, avec a, b et c trois réels et $a \neq 0$.

Définition 1.3
On appelle *discriminant* de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ le nombre réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'existence de solutions à l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dépend du signe de Δ :

Théorème 1.1
Soit $ax^2 + bx + c = 0$ un équation du second degré et Δ son discriminant.

si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution.

si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$

si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.

Exemple 1.2
Résoudre l'équation $2x^2 - 2x = -5$.

On écrit cette équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ et on obtient $2x^2 - 2x + 5 = 0$.

On calcule $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 2 \times 5 = 4 - 40 = -36 < 0$. Donc cette équation n'a pas de solution : $\mathscr{S} = \emptyset$.

Exemple 1.3
Résoudre l'équation $x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{25}{9} = 0$

On calcule $\Delta = \left(-\frac{10}{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times \frac{25}{9} = \frac{100}{9} - \frac{100}{9} = 0$.

L'équation a donc une unique solution $x_0 = -\frac{-\frac{10}{3}}{2\times 1} = \frac{5}{3}$.

Exemple 1.4
Résoudre l'équation $2x^2 + \frac{11}{2}x - \frac{3}{2}$.

On calcule $\Delta = \left(\dfrac{11}{2}\right)^2 - 4 \times 2 \times \left(-\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{121}{4} + 12 = \dfrac{169}{4} > 0$. Donc l'équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-\frac{11}{2} - \sqrt{\frac{169}{4}}}{2 \times 2} = \frac{-\frac{11}{2} - \frac{13}{2}}{4} = -\frac{24}{8} = -3.$$

$$x_1 = \frac{-\frac{11}{2} + \sqrt{\frac{169}{4}}}{2 \times 2} = \frac{-\frac{11}{2} + \frac{13}{2}}{4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

$\mathscr{S} = \left\{-3; \frac{1}{4}\right\}$.

1.2.2 Interprétation graphique

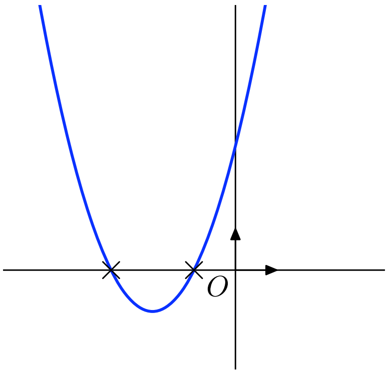
Soit $(E) : ax^2 + bx + c = 0$ une équation du second degré ($a \neq 0$).

On peut associer à (E) le polynôme du second degré $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$. Les solutions de (E) sont alors les réels x tels que $f(x) = 0$. Ces nombres sont appelés les *racines* du polynôme du second degré f.

La représentation graphique de f dans un repère orthogonal est une parabole $\mathscr{P}_f$. Graphiquement, les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les *abscisses* des points d'intersection de $\mathscr{P}_f$ et de la droite d'équation $y = 0$ (axe des abscisses).

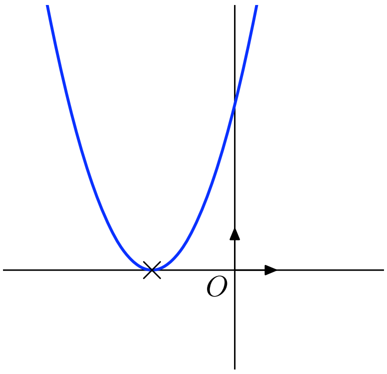
Exemple 1.5
On considère trois polynômes du second degré f, g et h et on note $\mathscr{P}_f$, $\mathscr{P}_g$, $\mathscr{P}_h$, leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal.

$f(x) = x^2 + 4x + 3$



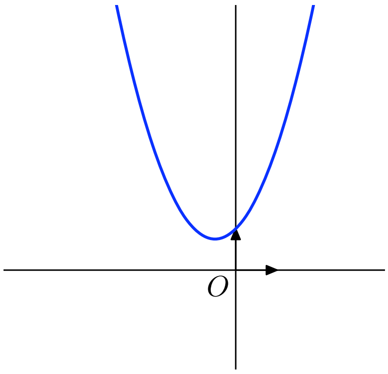
$\mathscr{P}_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses $x_1 = -3$ et $x_2 = -1$. L'équation $f(x) = 0$ a donc deux solutions : -3 et -1.
On peut retrouver ce résultat par le calcul :
$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 > 0$.
Les solutions sont :
$\frac{-4-\sqrt{4}}{2} = -3$, et $\frac{-4+\sqrt{4}}{2} = -1$

$g(x) = (x+2)^2$



$\mathscr{P}_g$ est *tangent* à l'axe des abscisses en un point d'abscisses $x_0 = -2$. L'équation $g(x) = 0$ a donc une solution : -2.
On peut retrouver ce résultat par le calcul :
$g(x) = x^2 + 4x + 4$, donc :
$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$.
La solution est :
$\frac{-4}{2} = -2$

$h(x) = x^2 + x + 1$



$\mathscr{P}_h$ et l'axe des abscisses n'ont pas de point commun : l'équation $h(x) = 0$ n'a pas de solution.
On peut retrouver ce résultat par le calcul :
$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$.
Donc l'équation n'a pas de solution.

On peut se poser le problème inverse du paragraphe précédent : soit $\mathscr{P}$ une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ dans un repère orthogonal. On ne connait pas la position précise de $\mathscr{P}$ dans le repère, mais on peut étudier sa position par rapport à l'axe des abscisses ; en effet :

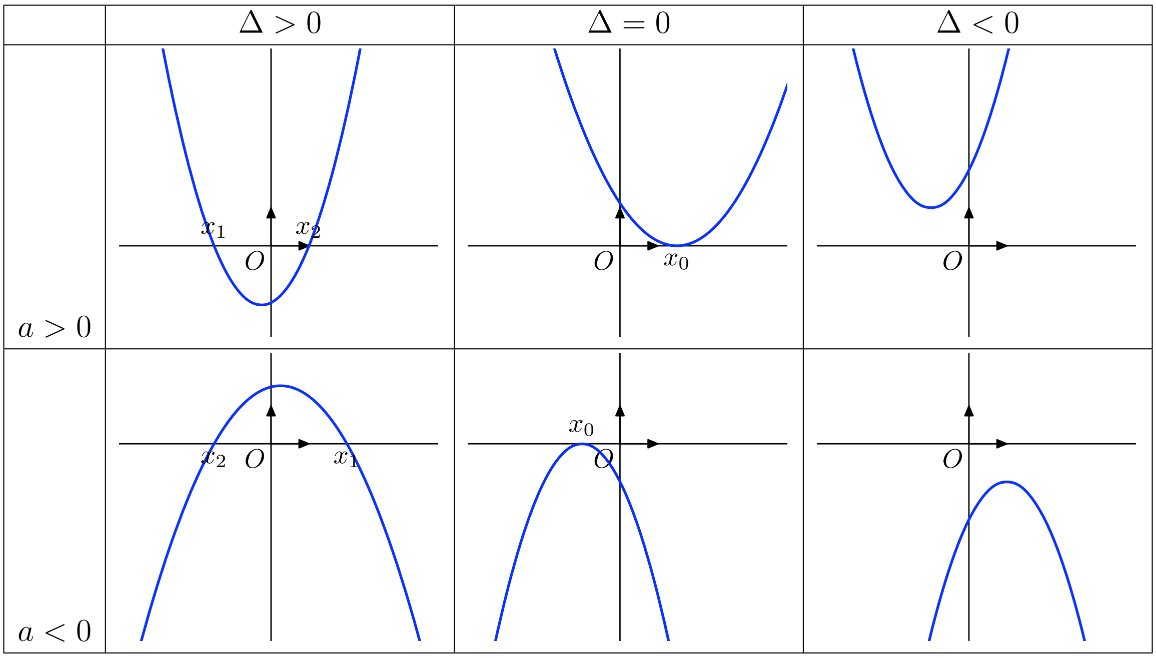
si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions donc $\mathscr{P}$ coupe l'axe des abscisses en deux points.

si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution : on dit que $\mathscr{P}$ est *tangente* à l'axe des abscisses.

si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution donc $\mathscr{P}$ ne rencontre pas l'axe des abscisses.

De plus, on admettra que si $a > 0$, la parabole est « tournée » vers le haut, et si $a < 0$, la parabole est « tournée » vers le bas.

On regroupe les résultats dans le tableau suivant :



1.2.3 Inéquation du second degré

Une inéquation du second degré peut s'écrire sous la forme $ax^2+bx+c \geq 0$ ou $ax^2+bx+c > 0$.

Théorème 1.2
Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

si $\Delta < 0$, pour tout $x \in \mathbf{R}$, le nombre $ax^2 + bx + c$ est du signe de a.

si $\Delta = 0$, pour tout $x \neq -\frac{b}{2a}$, le nombre $ax^2 + bx + c$ est du signe de a.

si $\Delta > 0$, le nombre $ax^2 + bx + c$
- est du signe de a pour x « à l'extérieur des racines » de $ax^2 + bx + c$,
- est du signe contraire de a « à l'intérieur des racines » de $ax^2 + bx + c$.

Exemple 1.6
On considère le trinôme $6x^2 - 10x - 4$. $\Delta = 10^2 - 4 \times 6 \times (-4) = 196$. Les racines du trinôme sont :

$$x_1 = \frac{10 - \sqrt{196}}{2 \times 6} = -\frac{1}{3} \text{ et } x_2 = \frac{10 + \sqrt{196}}{2 \times 6} = 2$$

- Pour $x \in \left]-\frac{1}{3}; 2\right[$ (x à l'intérieur des racines), $6x^2 - 10x - 4$ est du signe contraire de 6 soit $6x^2 - 10x - 4 < 0$
- Pour $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[\cup]2; +\infty[$ (x à l'extérieur des racines), $6x^2 - 10x - 4$ est du signe de 6 soit $6x^2 - 10x - 4 > 0$

Exemple 1.7
Résoudre l'inéquation $2x^2 - 3x - 3 < x^2 - 5x$.
L'inéquation proposée peut s'écrire sous la forme $2x^2 - 3x - 3 - x^2 + 5x < 0$ soit $x^2 + 2x - 3 < 0$.
On calcule le discriminant : $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$. Les racines sont $x_1 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2} = -3$ et $x_2 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2} = 1$.
Le trinôme $x^2 + 2x - 3$ est strictement négatif pour x à l'intérieur des racines soit $x \in]-3; 1[$.

1.2.4 Factorisation d'un trinôme du second degré

On admet le théorème 1.3 :

Théorème 1.3
On considère le trinôme $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
– Si ce trinôme n'a pas de racine ($\Delta < 0$), il ne peut pas être factorisé.
– Si le trinôme a une racine unique x_0 ($\Delta = 0$), on a : $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.
– Si le trinôme a deux racines x_1 et x_2, ($\Delta > 0$), on a : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Exemple 1.8
En reprenant le trinôme de l'exemple 1.6 :

$$6x^2 - 10x - 4 = 6\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 2)$$